Kapitel 2

Kombinatorik

Allmänt kan sägas att inom kombinatoriken sysslar man huvudsakligen med beräkningar av det antal sätt, på vilket elementen i en given mängd kan arrangeras i delmängder på något sätt. Inom kombinatoriken har ordet **"kombination"** en bestämd mening: Låt A vara en mängd med n element. En delmängd av A med k element säges vara en **kombination** bestående av k element utvalda bland n.

Exempel 2.1 Låt $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

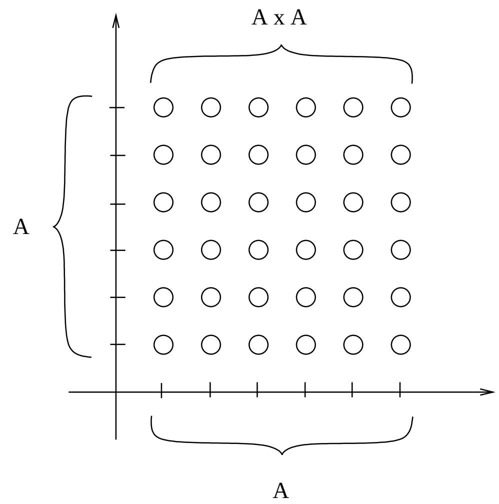
a) Bestäm antalet delmängder eller kombinationer till A som består av 2 element.

Dessa är:

$$\begin{array}{ccccc}
\{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{1,5\} & \{1,6\} \\
 & \{2,3\} & \{2,4\} & \{2,5\} & \{2,6\} \\
 & & \{3,4\} & \{3,5\} & \{3,6\} \\
 & & & \{4,5\} & \{4,6\} \\
 & & & & \{5,6\}
\end{array}$$

alltså 15 stycken.

b) Bestäm antalet element i produktmängden $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$:



Av figuren ser man genast att detta antal är $6 \cdot 6 = 36$.

Exempel 2.1 b) leder till den grundläggande kombinatoriska principen:

Sats 2.2 Multiplikationsprincipen
Låt $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_k$ vara en följd av icke-tomma mängder sådana att $\mathrm{n}(\mathrm{A}_1) = n_1, \mathrm{n}(\mathrm{A}_2) = n_2$, $..., \mathrm{n}(\mathrm{A}_k) = n_k$. Då är antalet element i produktmängden $\mathrm{X}_{i=1}^{k}\mathrm{A}_i$ lika med $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k := \prod_{i=1}^{k} n_i$.
Denna sats kan också formuleras mera allmänt på följande sätt: Om man i ordning skall utföra 6 operationer och härvid kan utföra operationen nr i på n_i olika sätt, $n = 1, 2, ..., k$, så är totala antalet sätt att i den angivna ordningen utföra de k operationerna $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

Bevis Vi ger ett indutionsbevis:

1. Klart att satsen gäller då $k = 1$.

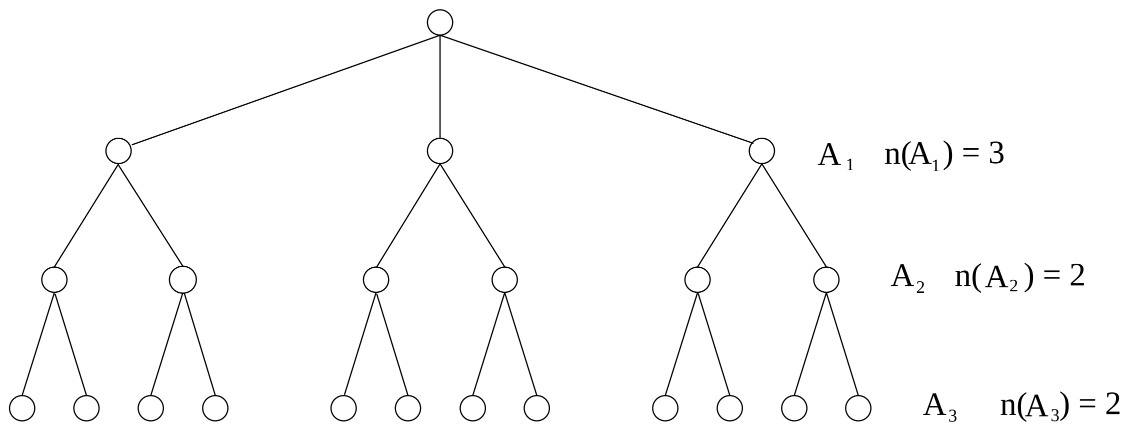
2. Antag att den gäller för $k \leq r$ och visa att den gäller även för $k = r + 1$, där r är ett godtyckligt, fixt heltal. Vi har

$$\mathrm{X}_{i=1}^{r+1}\mathrm{A}_i = (\mathrm{X}_{i=1}^{r}\mathrm{A}_i) \times \mathrm{A}_{r+1} := \mathrm{B} \times \mathrm{A}_{r+1},$$

   där $\mathrm{B} = \mathrm{X}_{i=1}^{r}\mathrm{A}_i$. Men enligt induktionsantagandet består mängden B av $\prod_{i=1}^{r} n_i$ element, och vidare enligt induktionsantagandet består mängden $\mathrm{B}\times\mathrm{A}_{r+1}$ av $\prod_{i=1}^{r} n_i \cdot n_{r+1}$ element. Således är beviset färdigt, ty $\prod_{i=1}^{r} n_i \cdot n_{r+1} = \prod_{i=1}^{r+1} n_i$.

$\square$

Multiplikationsprincipen kan åskådliggöras grafiskt med ett träddiagram:



$$n(A_1 \times A_2 \times A_3) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

Exempel 2.3

a) På en fest var 9 herrar och 7 damer bjudna. Om herrarna dansar enbart med damerna och damerna enbart med herrarna kan vi bilda $9 \cdot 7 = 63$ olika danspar.

b) Antalet delmängder till en mängd med n element är $\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ st}} = 2^n$, ty när vi bildar en delmängd skall vi för varje element i mängden avgöra om det skall ingå i delmängden eller ej.

Betrakta en mängd $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ med n element. I mängdläran gör vi inte skillnad mellan A och, t.ex., mängden $B = \{a_2, a_1, a_3, ..., a_n\}$, men i kombinatoriken är ordningen av mängdens element ofta av intresse. I detta sammangang kallas B en **permutation** av A (eller tvärtom). När vi alltså bildar en permutation av en given mängd, så skriver vi upp mängdens element i en bestämd ordning.

Exempel 2.4 Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$. De ordnade delmängderna som består av två element är

$$\begin{array}{lll} \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\} \\ \{2,1\}, & \{2,3\}, & \{2,4\} \\ \{3,1\}, & \{3,2\}, & \{3,4\} \\ \{4,1\}, & \{4,2\}, & \{4,3\} \end{array}$$

dvs $4 \cdot 3 = 12$ stycken.

Alla permutationerna av A är

{1,2,3,4}	{1,2,4,3}	{1,3,2,4}	{1,3,4,2}	{1,4,3,3}	{1,4,3,2}
{2,1,3,4}	{2,1,4,3}	{2,3,1,4}	{2,3,4,1}	{2,4,1,3}	{2,4,3,1}
{3,1,2,4}	{3,1,4,2}	{3,2,1,4}	{3,2,4,1}	{3,4,1,2}	{3,4,2,1}
{4,1,2,3}	{4,1,3,2}	{4,2,1,3}	{4,2,3,1}	{4,3,1,2}	{4,3,2,1}

dvs $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ stycken.

Delmängderna med två element är:

{1,2}	{1,3}	{1,4}
	{2,3}	{2,4}
		{3,4}

dvs $\frac{12}{2} = 6$ stycken.

Sats 2.5 Låt A = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a) Antalet ordnade delmängder till A som består av $k(\leq n)$ element är

$$(n)_k := n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

b) Antalet permutationer av A är

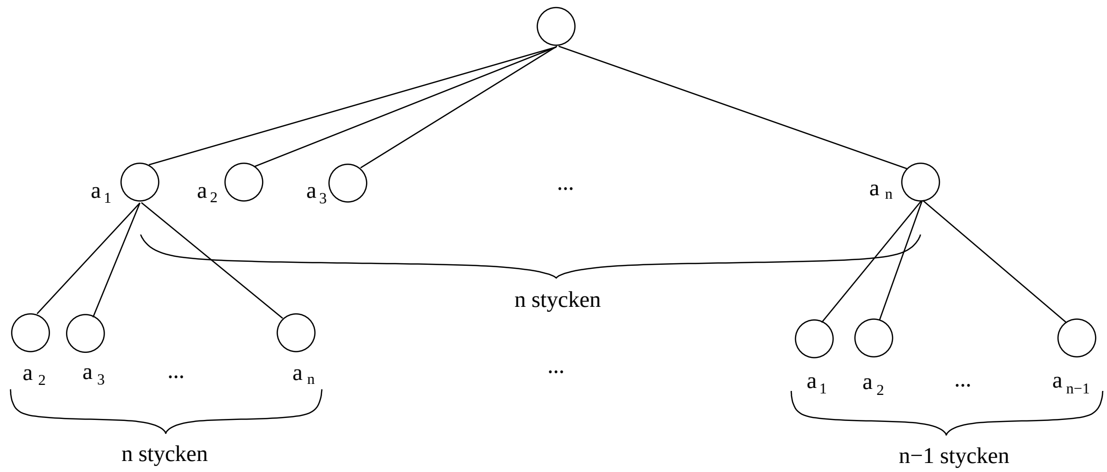
$$n! := n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

c) Antalet delmängder eller kombinationer som består av $k(\leq n)$ element är

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Bevis

a) Detta följer direkt ur multiplikationsprincipen: Eftersom n(A) = n kan det första elementet till en delmängd väljas på n olika sätt. Det följande kan väljas på $n-1$ olika sätt ty det får inte vara lika med det första utvalda elementet, osv. Slutligen kan det k:te elementet väljas på $n-(k-1)$ olika sätt. Enligt multiplikationsprincipen följer nu påståendet.



b) Detta följer ur a)-fallet genom att sätta $k = n$.

c) Enligt a)-fallet är antalet ordnade delmängder med k element $(n)_k$. Men enligt multiplikationsprincipen bör detta vara lika med antalet delmängder gånger antalet permutationer av de k elementen i delmängden, dvs:

x = antalet delmängder med k element

$x \cdot k! = (n)_k \;\Leftrightarrow\; x = \binom{n}{k}$.

$\square$

Följande korollarium är en generalisering av Sats 2.5 c).

Korollarium 2.6 Låt $n = n_1 + ... + n_k$, där $n_1, ..., n_k$ är naturliga tal. Antalet möjligheter att dela upp mängden A i k disjunkta delmängder, så att den i:te delmängden får n_i element är

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

Exempel 2.7 Betrakta de fyra bokstäverna $a,\ a,\ b,\ b$. Med dessa kan vi bilda 6 olika ord:

$$aabb,\ abab,\ abba,\ baab,\ baba,\ bbaa$$

dvs vi har 6 **åtskiljbara** permutationer. Antag nu att vi numrerar a:na och b:na: a_1, a_2, b_1, b_2. Då fås ordet $aabb$ på fyra olika sätt: $a_1a_2b_1b_2,\ a_1a_2b_2b_1,\ a_2a_1b_1b_2,\ a_2a_1b_2b_1$. Detta exempel leder till följande:

Sats 2.8 Antalet åtskiljbara permutationer av n element varav n_1 är av en typ, n_2 är av en annan typ, osv, n_k är av den k:te typen, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ är

$$\frac{n!}{n! \cdot n! \cdot ... \cdot n_k!}$$

(Observera att vi har samma formel som i Kor 2.6.)

Bevis Låt x vara antalet åtskiljbara permutationer och antag att vi numrerar de n_i elementen av typen i från 1 till n_i, $i = 1, ..., k$. Efter detta trick är alla element i den ursprungliga samlingen olika och kan således permuteras på $n!$ olika sätt. Men alla permutationer fås också om vi tar de ursprungligen årskiljbara permutationerna och permuterar de element som ursprungligen var av samma typ. Enligt multiplikationsprincipen är detta antal $x \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!$. Således

$$x \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k! = n!$$
$$\Leftrightarrow \; x = \frac{n!}{n! \cdot n! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

□

Dragning med/utan återläggning med/utan hänsyn till ordning

Låt A vara en mängd med n(A) = n; bland dessa n element bör vi välja ut k element. Detta kan göras **med eller utan återläggning**. I det första fallet tar man ett element, noterar dess "värde" och sätter det tillbaka innan nästa drages. I det senare fallet sätter man inte det dragna elementet tillbaka. Således vid dragning med återläggning kan samma element förekomma flera gånger men vid dragning utan återläggning kan varje element förekomma högst en gång samt $k \leq n$.

Då vi vill bestämma antalet sätt att välja ut dessa k element (som dras med eller utan återläggning) så bör vi också veta om dessa delmängder skall vara ordnade eller inte. Då ordningen (inte) beaktas säges dragning ske med (utan) hänsyn till ordning.

Exempel 2.9 Låt $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Alla delmängder av 2 element i de 4 olika fallen blir:

	Utan återläggning				**Med återläggning**				
Med hänsyn till ordning	A_{11} :	(a,b)	(a,c)	(a,d)	A_{12} :	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(a,d)
		(b,a)	(b,c)	(b,d)		(b,a)	(b,b)	(b,c)	(b,d)
		(c,a)	(c,b)	(c,d)		(c,a)	(c,b)	(c,c)	(c,d)
		(d,a)	(d,b)	(d,c)		(d,a)	(d,b)	(d,c)	(d,d)
Utan hänsyn till ordning	A_{21} :	(a,b)	(a,c)	(a,d)	A_{22} :	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(a,d)
			(b,c)	(b,d)			(b,b)	(b,c)	(b,d)
				(c,d)				(c,c)	(c,d)
									(d,d)

Sats 2.10 Antalet möjligheter att välja ut k element bland n element är

	Utan återläggning	**Med återläggning**
Med hänsyn till ordning	$(n)_k$	n^k
Utan hänsyn till ordning	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Bevis Endast formeln för fallet "dragning med återläggning och utan hänsyn till ordning" bör bevisas, ty de övriga fallen har redan behandlats i Sats 2.2 och Sats 2.5.

Antag att de n elementen är talen $1, 2, ..., n$. Eftersom dragningen sker utan hänsyn till ordning kan vi alltid ordna de k dragna elementen i storleksordning (t.ex. om $n = 4,\ k = 5$ är en möjlig realisation 4 1 3 4 1 dvs 1 1 3 4 4). Efter detta sätter vi en nolla efter ettor, en nolla efter tvåor, en nolla efter treor, osv. Sammanlagt sätter vi $n-1$ stycken nollor i en följd med k element och får således en följd med $k+n-1$ element (t.ex. 1 1 0 0 3 0 4). Men dessa nollor bestämmer entydigt hela följden (t.ex. $a_1\ a_2\ 0\ 0\ a_3\ 0\ a_4$ ger $a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4$). Genom att placera nollor på olika ställen i följden kan alla möjliga följder som fås vid dragning med återläggning och utan hänsyn till ordning konstrueras. Antalet sätt att placera de $n-1$ nollorna är

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

$\square$

Övningsuppgifter

1. Hur många “böcker” om 500 sidor och 2000 tecken per sida kan högst författas, om man använder 29 bokstäver samt punkt, komma och mellanslag?

2. 10 personer deltar i 3 olika tävlingsgrenar. På hur många sätt kan de 3 förstaprisen komma att delas ut om den som vunnit 2 förstapris inte får ställa upp i den tredje grenen?

3. Hur många 6-siffriga tal finns det, där samtliga siffror är olika, och nästsista siffran är 8? (Första siffran får ej vara 0.)

4. En mängd innehåller 52 element (t.ex. en vanlig kortlek). Beräkna antalet delmängder och antalet ordnade delmängder av storleken 5.

5. Ett bokstavslås med 10 bokstäver är så konstruerat att det öppnas om man trycker på 4 av bokstäverna i riktig ordning. Hur många olika sådana lås kan konstrueras?

6. Bevisa Korollarium 2.6.

7. Bevisa att

   a)
   $$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

   b)
   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

8. Bevisa att
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

9. Bevisa att
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k}\binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$$
   där n, N och M är positiva hela tal sådana att $n \leq \min(N, M)$.

10. Permutationerna av bokstäverna B, C, E, I, K, O, R, S, T ordnas i lexikografisk ordning. Vilket nummer har den permutation som ger ordet “sockerbit”?

11. Antag att det i övning 5 omtalade bokstavslåset ändras så att möjligheten att öppna det inte beror på i vilken ordning bokstäverna trycks in. Hur många olika lås kan då konstrueras?

12. Hur många tal större än 10 000 kan bildas genom permutationer av siffrorna 000 456?

13. Av en församling på n personer skall två grupper utväljas med p resp. q medlemmar så att de båda grupperna har a) minst en b) precis en medlem gemensam. På hur många sätt kan detta ske?

14. På hur många sätt kan man ta fem kort ur en kortlek, så att precis a) fyra b) tre kort har samma valör?

15. På hur många sätt kan röstsiffrorna fördela sig på de olika kandidaterna om 7 personer skall rösta på en av 3 kandidater (och det inte är tillåtet att lägga ned sin röst)?

16. Hur många olika händer kan en bridgespelare få om man endast tar hänsyn till färg (en bridgehand består av 13 godtyckliga kort ur en kortlek).

17. Ett fartyg har tre master. Man vill ge en flaggsignal genom att sätta upp flaggor på dessa master. Man har därvid 6 olika flaggor och vill sätta upp 4 av dessa på masterna. På hur många sätt kan detta ske? (Flaggor på samma mast skall sitta under varandra; olika ordningsföljd mellan flaggor på samma mast anges ge olika signal.)