Grundkursen i sannolikhetslära 29.09.95, förslag till lösningar

1. Utfallsrummet omfattar 6^5 möjligheter, som alla är lika sannolika. Fyra värden är aktuella. Det värde som ska förekomma två gånger kan väljas på $\binom{6}{1}$ sätt. Övriga tre värden kan då väljas på $\binom{5}{3}$ sätt. Vi erhåller t.ex. utfallet 1, 1, 2, 3, 4. Dessa värden kan dock permuteras på $\frac{5!}{2!}$ olika sätt. Den sökta sannolikheten är

$$\frac{\frac{5!}{2!}\binom{6}{1}\binom{5}{3}}{6^5} = \frac{25}{54}$$

2. Se kurskompendiet.

3. Sätt $P(\xi = K) = f(K)$. Vi har $f(1) = \frac{1}{6}, f(2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, f(3) = (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}, ...,$

   $f(K) = (\frac{5}{6})^{K-1} \cdot \frac{1}{6}, ...$

   Den stokastiska variabeln ξ är alltså geometriskt fördelad.

   Kurskompendiet, sid 31, gamla upplagan, ger $E(\xi) = \frac{1}{p}$, där p i vårt fall är $= \frac{1}{6}$.

   Dvs väntevärdet $E(\xi) = 6$.

   $P(\xi = uddatal) = f(1) + f(3) + f(5) + ... + = \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^4 \cdot \frac{1}{6} + ...$

   $= \frac{1}{6}[1 + (\frac{5}{6})^2 + (\frac{5}{6})^4 + ...] =^{(*)} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(\frac{5}{6})^2} = \frac{6}{11}$

   (*) Använd formeln för summan av en geometrisk serie.

4. Vi inför beteckningar för de relevanta händelserna.

   F åsnan frisk, S åsnan sjuk, D_F diagnosen "frisk", D_S diagnosen "sjuk".

   Vi vet $P(S) = 0.2, P(D_F|F) = 0.98, P(D_F|S) = 0.05$ Vi söker $P(F|D_F)$. Bayes sats ger

   $P(F|D_F) = \frac{P(F \cap D_F)}{P(D_F)} = \frac{P(F) \cdot P(D_F|F)}{P(F) \cdot P(D_F|F) + P(S) \cdot P(D_F|S)} = \frac{0.8 \cdot 0.98}{0.8 \cdot 0.98 + 0.2 \cdot 0.05} = 0.987$

5. Låt stokastiska variabeln ξ ange den sprit hon skänkt ut åt 100 gäster. Centrala

   gränsvärdessatsen ger

   $\xi \sim N(395, 2)$.

   Vi får (med användning av tabell)

   $P(\xi \leq 390) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$

   $\text{Svar}: 0.006$