**Grundkursen i sannolikhetslära 23.05.96, förslag till lösningar**

1. Tre revolvrar $R_1, R_2, R_3$. Revolver $R_i$ har $i$ styck skarpa skott ($i = 1, 2, 3$).

   $A =$ händelsen att den första spelaren överlever.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(R_i) \cdot P(A|R_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. Sannolikheten att i ett enskilt försök slå summan 7 är $\frac{6}{36}$, dvs $\frac{1}{6}$.

   Sätt $\xi =$ antalet gånger man slår summan 7 vid de 6 försöken.

   $\xi \sim Bin(6, \frac{1}{6})$

   Frekvensfunktionen $f_\xi$ ges av

   $f_\xi(K) = \binom{6}{K} (\frac{1}{6})^K (\frac{5}{6})^{6-K}, K = 0, 1, 2, ..., 6.$

   $P(\xi \geq 2) = 1 - [P(\xi = 0) + P(\xi = 1)] = 1 - [f_\xi(0) + f_\xi(1)]$

   $= 1 - [(\frac{5}{6})^6 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^5] = 0.26$

3. Sätt $\xi =$ antalet bilar som anländer per 10 minuer.

   $\xi \sim Po(5), f_\xi(K) = \frac{5^K}{K!} e^{-5}, K = 0, 1, 2, ...$

a) Sökes $P(\xi = 0)$.

   $P(\xi = 0) = f_\xi(0) = e^{-5} = 0.0067$

b) Sökes $P(\xi \geq 3)$.

   $P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - [f_\xi(0) + f_\xi(1) + f_\xi(2)]$

   $= 1 - [e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{25}{2} e^{-5}] = 1 - \frac{37}{2} e^{-5} = 0.875$

4. $A, B$ spelar enligt de givna reglerna. $A$ börjar. Låt $H_i$ vara händelsen att spelet avgörs i $A$:s favör i omgång $i, i = 1, 2, 3, ...$ Sannolikheten att $A$ vinner är $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + ...$

   $A_K$ : "$A$ lyckas (dvs femma eller sexa) i försök K"

   $B_K$ : definieras analogt.

   $P(H_1) = P(A_1) = \frac{1}{3}$

   $P(H_2) = (1 - P(A_1))(1 - P(B_1)) \cdot P(A_2) = (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3}$

$P(H_3) = (1 - P(A_1))(1 - P(B_1))(1 - P(A_2))(1 - P(B_2)) \cdot P(A_3) = (\frac{2}{3})^4 \cdot \frac{1}{3}$

$P(H_4) = (\frac{2}{3})^6 \cdot \frac{1}{3}$ osv.

Alltså $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + ... = \frac{1}{3}[1 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^4 + (\frac{2}{3})^6 + ...]$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(\frac{2}{3})^2}(*) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}$

Svar : $\frac{3}{5}$

(*) Summan av en geometrisk serie vars första term är 1 och ration $(\frac{2}{3})^2$

5. a) $x \leq 0 : F(x) = 0, x \geq 1 : F(x) = 1$

$0 \leq x \leq a : F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{2}{a^2}(a-t)dt = \frac{2}{a^2}[-(a-t)^2 \cdot \frac{1}{2}]_0^x = 1 - \frac{(a-x)^2}{a^2}.$

b) $E(\xi) = \int_0^a x \cdot f(x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (xa - x^2)dx = \frac{a}{3}$

$V(\xi) = E(\xi^2) = E^2(\xi)$

$E(\xi^2) = \int_0^a x^2 \cdot f(x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a (x^2a - x^3)dx = \frac{a^2}{6}$

Alltså $V(\xi) = \frac{a^2}{6} - (\frac{a}{3})^2 = \frac{a^2}{18}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(2-x) = 1 - \frac{x}{2}$

$P(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \frac{x}{2})dx = \frac{5}{16}$

6. $\xi =$ en lampas livslängd i timmar.

$\xi \sim N(1500, 75)$

När har $\frac{1}{11}$ av lamporna slocknat?

$P(\xi \leq x) = \frac{1}{11} \iff P(z \leq \frac{x-1500}{75}) = 0.0909 \iff \Phi(\frac{x-1500}{75}) = 0.0909$

$\iff \Phi(\frac{1500-x}{75}) = 1 - \Phi(\frac{x-1500}{75}) = 0.9091 \iff \frac{1500-x}{75} = 1.335 \iff 1500 - x = 100.13$

$\iff x = 1400.$

Svar: Efter 1400 timmar