Grundkursen i sannolikhetslära 04.04.97, förslag till lösningar

1. Svaret kan ges t.ex. på någon av formerna

$$\binom{32}{14}\frac{14!}{2!3!4!5!}$$

$$\binom{32}{2}\binom{30}{3}\binom{27}{4}\binom{23}{5}$$

$$\binom{32}{14}\binom{14}{2}\binom{12}{3}\binom{9}{4}\binom{5}{5}$$

En faktor 4! tillkommer, om texten tolkats så, att drottningen inte från början bestämt antalet juveler varje enskilt barn ska ha.

2. De relevanta händelserna införs genom A_0 = "Ett teorem på insten är skrivet av A". B_0, C_0 definieras analogt. F = "Ett teorem på insten är falskt". Sökes $P(C_0|F)$, som behändigt kan uträknas med Baye's sats.

$P(C_0|F) = \frac{P(C_0 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(C_0)\cdot P(F|C_0)}{P(A_0)\cdot P(F|A_0)+P(B_0)\cdot P(F|B_0)+P(C_0)\cdot P(F|C_0)} =$

$\frac{0.2\cdot 0.05}{0.5\cdot 0.03+0.3\cdot 0.04+0.2\cdot 0.05} = \frac{10}{37} \approx 0.27$

4. Sätt ξ = antalet stjärnfall under en period om 20 minuter. Vi har i medeltal 1 stjärnfall under en sådan period. Alltså $\xi \sim Po(1)$, det vill säga $f_\xi(K) = \frac{\lambda^K}{K!}e^{-1}, K = 0, 1, 2, ...$

$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - f_\xi(0) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63.$

5. Sätt ξ = antalet gånger trean kommer upp. $\xi \sim Bin(10^4, \frac{1}{10})(*)$

$P(\xi \leq 950) = \sum_{K=0}^{950} \binom{10^4}{K} \left(\frac{1}{10}\right)^K \left(\frac{9}{10}\right)^{10^4-K}.$

(*) ger $E(\xi) = 10^4 \cdot \frac{1}{10}, V(\xi) = 10^4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}, \sqrt{V(\xi)} = 30.$

de Moivre-Laplace ger $\xi \sim^{approx} N(1000, 30)$. Vi får $P(\xi \leq 950) =$

$P(z \leq \frac{950-1000}{30}) = P(z \leq -\frac{5}{3}) = 1 - P(z \leq \frac{5}{3}) \approx 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$