Grundkurs i analys, v.45

2.1 Definitioner och räkneregler

Vi har i kapitel 1 behandlat frågeställningar som: " Hur uppför sig en funktion $f(x)$ då $x \to \pm\infty$ eller $x \to 0$". Vi skall ge precisa definitioner av begreppet gränsvärde i olika fall som kan förekomma. Först behandlar vi gränsvärden där $x \to +\infty$ och betraktar inledningsvis ett exempel.

Gränsvärden

Exempel 2.1. Låt funktionen f vara given av

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0\,.$$

Då verkar det klart att $f(x) \to 1$ då $x \to +\infty$, ty $1/\sqrt{x}$ avtar mot 0 då x växer. Vi gör en exaktare analys:

$$|f(x)-1| = |1+\frac{1}{\sqrt{x}}-1| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{10}\,, \quad \text{om } \sqrt{x} > 10\,,\ \text{dvs. om } x > 100\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{100}\,, \quad \text{om } \sqrt{x} > 100\,,\ \text{dvs. om } x > 10000$$

$$\vdots$$

Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$,

$$|f(x)-1| = \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon\,, \quad \text{om } \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

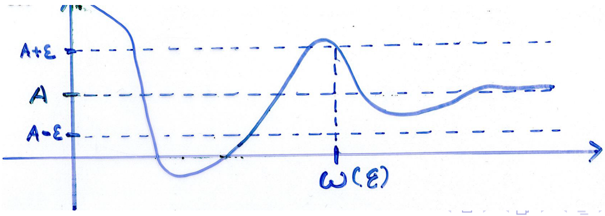
$$\text{dvs. om } x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = \omega\,(=\omega(\varepsilon))\,.$$

Definition 2.1. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad för godtyckligt stora reella tal, ($D_f \cap [a, +\infty[\neq \emptyset$ för alla $a > 0$). Då har $f(x)$ **gränsvärdet** A då x går mot oändligheten om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\omega = \omega(\varepsilon)$ sådant att

$$(x > \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Detta betecknas

$$f(x) \to A \text{ då } x \to +\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = A .$$



Exempel 2.2. Visa med stöd av definitionen att

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin x}{1+x^2} = 1\,.$$

Tag $\varepsilon > 0$: $|f(x) - 1| = \left| \frac{x^2+\sin x}{1+x^2} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x - 1}{1+x^2} \right|$

$= \frac{|\sin x - 1|}{1+x^2} \leq \frac{\overbrace{|\sin x|}^{\in[0,1]} + |-1|}{1+x^2} \leq \frac{2}{1+x^2} \leq \frac{2}{x^2}$

Δ-olikheten

Alltså: $|f(x) - 1| < \frac{2}{x^2} < \varepsilon$ om $x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$,

dvs. om $x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} = \omega$.

$\therefore$ $x > \omega = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$,

Exempel 2.3. Funktionen $f(x) = \cos x$ saknar gränsvärde då $x \to +\infty$, eftersom den i varje intervall $[a, +\infty[$, $a > 0$, antar alla värden i intervallet $[-1, 1]$. Funktionsvärdena "samlar sig inte kring något värde A".

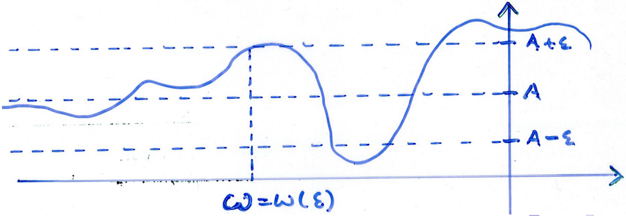
Exempel 2.4. En talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ kan tolkas som en funktion med $D_f = \mathbb{N}$. Om en talföljd har ett gränsvärde då $n \to \infty$, säger vi att den är **konvergent**, i annat fall är den **divergent**. Exempelvis är talföjden $(1+n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet 1, medan talföljden $((-2)^n)_{n=0}^{\infty}$ är divergent.

Definition 2.2. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad för godtyckligt små reella tal, $(D_f \cap]-\infty, a] \neq \emptyset$ för alla $a \leq 0)$. Då har $f(x)$ **gränsvärdet** A då x går mot minus oändligheten om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\omega = \omega(\varepsilon)$ sådant att

$$(x < \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Detta betecknas

$$f(x) \to A \text{ då } x \to -\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A\,.$$



Antag att a och $\delta > 0$ är givna tal. En **omgivning** av talet a är en mängd av formen

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} =]a - \delta, a + \delta[\,.$$

Vi kan då definiera begreppet gränsvärde då $x \to a$

Definition 2.3. Antag att f är en funktion sådan att varje omgivning av punkten $a \in \mathbb{R}$ innehåller punkter ur D_f. Då har $f(x)$ gränsvärdet A då x går mot a om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

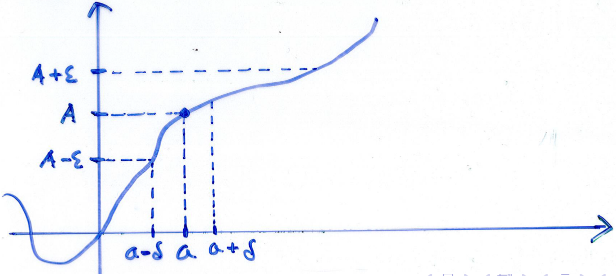
$$(|x - a| < \delta \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Detta betecknas

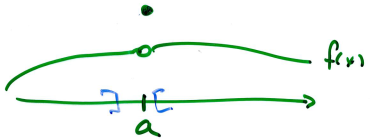
$$f(x) \to A \text{ då } x \to a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a} f(x) = A\,.$$

Observera: 1. Om $a \in D_f$ och $f(x) \to A$ då $x \to a$, så gäller $A = f(a)$. 2. Om man i definitionen ovan byter $|x - a| < \delta$ mot $a \leq$

$a \leq x < a + \delta$ eller $a - \delta < x \leq a$, fås definitionen på högergränsvärde, $f(x) \to A$ då $x \to a^+$, respektive vänstergränsvärde $f(x) \to A$ då $x \to a^-$.



Gränsvärden



$\lim_{x \to a} f(x)$ existerar ej

$(|x-a| < \delta$ och $x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

*) ej uppfyllt för något A
(om ε tillräckligt litet)

<u>men</u>:

$(0 < |x-a| < \delta$ och $x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

uppfyllt och $\lim_{x \to a} f(x)$ <u>existerar</u>

med denna definition!!
(som används i Analys I)

Exempel 2.5. Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$. Då gäller

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt{2},$$

ty för varje $\varepsilon > 0$ gäller:

$$|f(x) - \sqrt{2}| = |\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{2}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{2}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{2}|}$$

$$= \frac{|x - 2|}{|\sqrt{x} + \sqrt{2}|} = \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$< \frac{|x - 2|}{\sqrt{2}} < \varepsilon, \text{ om } |x - 2| < \sqrt{2} \cdot \varepsilon = \delta \,.$$ (= δ

För alla $\varepsilon > 0$ och $\delta = \sqrt{2} \cdot \varepsilon$ gäller:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \varepsilon \,.$$

Gränsvärden

Om $f(x) \to +\infty$ eller $-\infty$ då $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ eller $x \to a$ har vi att göra med **oegentliga gränsvärden**.

Definition 2.4. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad för godtyckligt stora reella tal, ($D_f \cap [a, +\infty[\neq \emptyset$ för alla $a > 0$). Då har $f(x)$ det **oegentliga gränsvärdet** (a) $+\infty$ eller (b) $-\infty$, då x går mot oändligheten, om det till varje tal $\lambda \in \mathbb{R}$ finns ett tal ω sådant att

$$(a)\quad (x > \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow f(x) > \lambda,$$

eller

$$(b)\quad (x > \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow f(x) < \lambda.$$

Detta betecknas

$$(a)\quad f(x) \to +\infty, \text{ då } x \to +\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

eller

$$(b)\quad f(x) \to -\infty, \text{ då } x \to +\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Vi har en analog definition på oegentligt gränsvärde då $x \to -\infty$.

Exempel 2.6. Betrakta funktionen $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$.
Om vi väljer $\omega = \sqrt[n]{\lambda} = \lambda^{1/n}$, $\lambda > 0$, så gäller:

$$x > \omega \Rightarrow f(x) = x^n > (\lambda^{1/n})^n = \lambda .$$

Alltså gäller det att

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

Vi definerar begreppet oegentligt gränsvärde då $x \to a$.

Definition 2.5. Antag att f är en funktion sådan att varje punkterad omgivning, $0 < |x - a| < \delta$, av punkten $a \in \mathbb{R}$ innehåller punkter ur D_f. Då har $f(x)$ gränsvärdet $+\infty$ $(-\infty)$ då x går mot a om det till varje tal $\lambda \in \mathbb{R}$ finns ett tal $\delta = \delta(\lambda) > 0$ sådant att

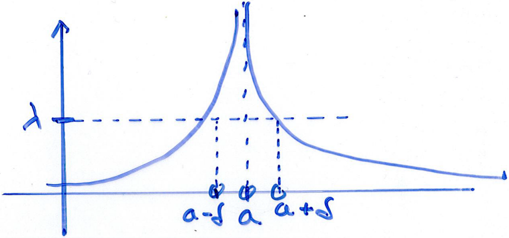
$$(0 < |x - a| < \delta \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow f(x) > \lambda \ (f(x) < \lambda).$$

Detta betecknas

$$f(x) \to +\infty \ (-\infty) \text{ då } x \to a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ ($$

$(-\infty)$

Observera: Om man i definitionen ovan byter $0 < |x - a| < \delta$ mot $a < x < a + \delta$ eller $a - \delta < x < a$, fås definitionen på högergränsvärde, $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$ då $x \to a^+$, respektive vänstergränsvärde $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$ då $x \to a^-$.



Exempel 2.7. Vi har att

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

ty om $0 < |x - 0| < 1/\sqrt{\lambda} = \delta > 0$, så gäller för alla $\lambda > 0$ att

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{(1/\sqrt{\lambda})^2} = (\sqrt{\lambda})^2 = \lambda.$$

Räkneregler för gränsvärden

Vi skall utan bevis ge ett antal räkneregler för gränsvärdestagning. Endel har vi de facto redan tillämpat i Kapitel 1. För bevisen hänvisas till avsnitt 2.1 i kursboken. Reglerna gäller för alla typer av gränvärden, ($x \to +\infty$, $x \to a$, $x \to a^+$, ...), så vi gör ingen specificering i formuleringen av reglerna.

Definition 2.6. Vi säger att en funktion $g(x)$ är **begränsad** i en mängd I om det finns ett tal $M > 0$ så att $|g(x)| \leq M$ för alla $x \in I$. En omgivning av $+\infty$ $(-\infty)$ är ett intervall av formen $]a, +\infty[$ $(]-\infty, a[)$.

Sats 2.1. Antag att $\lim f(x) = 0$ och att funktionen $g(x)$ är begränsad i en omgivning av punkten som gränsvärdet tas i. Då gäller

$$\lim f(x)\, g(x) = 0\,.$$

Sats 2.7

Bevis: $\quad (x \to +\infty)$

$g(x)$ begränsad $\Rightarrow \exists\, C, (w_0): x > w_0 \Rightarrow |g(x)| < C$

$\varepsilon > 0$ givet positivt tal

$\exists\, w_1 : x > w_1 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$.

Sätt: $w = \max(w_0, w_1)$.

$x > w \Rightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$.

$\therefore$ $f(x) \cdot g(x) \longrightarrow 0$, då $x \to +\infty$. $\square$

Gränsvärden

Exempel 2.8. Eftersom funktionen $g(x) = \cos x$ är begränsad i hela $\mathbb{R}$ gäller

$$\lim_{x \to 0} x \cos x = 0, \quad \text{och} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 .$$

$\frac{1}{x} \cdot \cos x$

Observera att om man i tillämpningar av de regler som presenteras i detta avsnitt erhåller uttryck av formen

$$\infty - \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0 \cdot \infty, \ \frac{0}{0}, \ 1^{\infty}, \ \infty^{0}, \ \text{eller } 0^{0},$$

så kan ingen slutsats dras om eventuellt gränvärde, utan vidare undersökningar (via omskrivningar) måste göras.

Formen $\infty - \infty$:

$$\left.\begin{array}{l}(+\infty) - (+\infty)\\ (-\infty) - (-\infty)\\ (+\infty) + (-\infty)\end{array}\right\} \text{obestämda}$$

$$(+\infty) + (+\infty) \text{ "=" } +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) \text{ "=" } -\infty$$

$$(+\infty) - (-\infty) \text{ "=" } +\infty$$

$$(-\infty) - (+\infty) \text{ "=" } -\infty$$

Gränsvärden

Sats 2.2. Antag att $\lim f(x) = A$ och $\lim g(x) = B$, där $A, B \in \mathbb{R}$. Då gäller:

1. $\lim(f(x) + g(x)) = A + B$, $\qquad (2.1)$
2. $\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$, $\qquad (2.2)$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, om $B \neq 0$. $\qquad (2.3)$

Sats 2.2, 1. $(x \to +\infty)$

Tag $\varepsilon > 0$.

$\exists\, \omega_1, \omega_2 : \begin{cases} x > \omega_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ x > \omega_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

För $x > \omega = \max(\omega_1, \omega_2)$ gäller:

$$|(f(x) + g(x)) - (A+B)|$$
$$= |(f(x) - A) + (g(x) - B)|$$
$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \quad (\Delta\text{-olikh.})$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Alltså: $(f(x) + g(x)) \longrightarrow A+B$, då $x \to +\infty$

Exempel 2.9. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x + 2}{3 + x^2}.$$

Lösning: Det gäller att $x \to 0$, $\sin x \to 0$ och $2 \to 2$ då $x \to 0$, så regel (2.1) ger att $(x + \sin x + 2) \to 0 + 0 + 2 = 2$, då $x \to 0$. Vidare ger (2.2) att $x^2 = x \cdot x \to 0 \cdot 0 = 0$, så med stöd av (2.1) erhålls att $(3 + x^2) \to 3 + 0 = 3$ då $x \to 0$. Slutligen ger regel (2.3) att det eftersökta gränsvärdet är

$$\frac{0 + 0 + 2}{3 + 0 \cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Exempel 2.10. En direkt tillämpning av räknereglerna på gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x + \sin x}{2x + x^4}$$

ger formen $\frac{0}{0}$, som är obestämd och kräver en omformning av uttrycket. (Se föreläsningsanteckningar.)

Gör omskrivning!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x + \sin x}{2x + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x\cos x + \frac{\sin x}{x}\right)}{x(2 + x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\text{Sats 2.1}\ \to 0}{x\cdot\cos x} + \overset{\to 1}{\frac{\sin x}{x}}}{2 + \underset{(2.2)\ \to 0}{x^3}} \underset{(2.1),(2.3)}{=} \frac{0+1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Gränsvärden

Exempel 2.11. Vid beräkning av gränsvärdet

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

ger en direkt gränsövergång det obestämda uttrycket $\infty-\infty$. Här kan man **förlänga med konjugatuttrycket**. (Se föreläsningsanteckningar.)

Gör omskrivning genom förlängning med konjugatuttryck

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}_{\to\,+\infty,\ \text{då } x\to+\infty}}=\underline{\underline{0}}$$

Följande sats ger en användbar **sammansättningsregel**

Sats 2.3. Antag att $g(x) \to a$ då $x \to x_0$ och att $f(t) \to A$ då $t \to a$. (Vi kan här tillåta att A och a är $\pm\infty$). Då gäller

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A\,.$$

$(x_0 = a, a^+, a^-, \pm\infty)$

Gränsvärden

(då $x \to a$)

Exempel 2.12. Antag att $g(x) \to 0$ då $x \to 0$. Eftersom $f(x) \to 1$ då $x \to 0$ för $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, ger Sats 2.3 att

$$f(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{g(x)} \to 1, \quad \text{då } x \to 0\,.$$

(då $x \to a$)

Exempel 2.13. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}.$$

Lösning: Vi övergår till en ny variabel och använder sammansättningsregeln. Sätt $y = \arctan x$, varvid $x = \tan y$ och $y \to 0$ då $x \to 0$. Då erhålls

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{y}{\tan y} = \frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} \to \frac{1}{1} = 1\,, \quad \text{då } x \to 0\,.$$

För heltalen $n \geq k \geq 0$ definieras **binomialkoefficienterna** $\binom{n}{k}$, (uttalas "n över k"), genom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Då vi har definierat $0! = 1$ erhålls

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Sats 1.6. Binomialsatsen. För varje $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Speciellt för $y = 1$ erhålls

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Sats 1.7. Antag att $a > 1$. Då gäller det att

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \to +\infty, \text{ då } x \to +\infty, \tag{1.11}$$

$$\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0, \text{ då } x \to +\infty. \tag{1.12}$$

Bevis: Klart att gränsvärdena gäller för $\alpha \leq 0$. Antag att $\alpha = 1$. Beteckna $a = 1 + p$, $p > 0$, och sätt $n = [x]$. Nu ger binomialsatsen upp-

$x - 1 < n \leq x$

skattningen

$$a^x = (1+p)^x \ge (1+p)^n > \overset{k\geq 2}{\binom{n}{2}}\, p^2 = \frac{n(n-1)}{2}\, p^2\,.$$

För $x > 2$ gäller då

$$\frac{a^x}{x^1} \ge \frac{n(n-1)}{2\cancel{x}}\, p^2 > \frac{\overbrace{(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2}}{2x}\, p^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right) p^2$$

och vi ser att

$$\frac{a^x}{x^1} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty\,.$$

Om $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, gör vi omskrivningen

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^x}{x}\right)^\alpha,$$

där $a^{1/\alpha} > 1$, och utnyttjar det vi redan bevisat.

Exempel 1.19. Hur uppför sig funktionen

$$f(x) = \frac{2^x + x^{50} + 10}{4^x + x}$$

för stora värden på x?

Lösning: Omskrivning av $f(x)$ genom att dividera täljare och nämnare med nämnarens ledande term. Denna är 4^x (Sats 1.7).

$$f(x) = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^x + \frac{x^{50}}{4^x} + \frac{10}{4^x}}{1 + \frac{x}{4^x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{4^x} \\ \frac{x^{50}}{4^x} \\ \frac{10}{4^x} \end{array}\right\} \longrightarrow 0, \text{ då } x \to +\infty \quad \text{(Sats 1,7)}$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{\underbrace{2^x}_{\to +\infty,\ \text{då } x \to +\infty}} \longrightarrow 0, \text{ då } x \to +\infty.$$

Alltså: $f(x)$ närmar sig $\frac{0+0+0}{1+0} = 0$ då $x \to +\infty$.

$\therefore$ $f(x) \longrightarrow 0$, då $x \to +\infty$.

Vi kan nu, i analogi med Sats 1.7, göra en jämförelse av tillväxthastigheterna av x^α och ${}^a\log x$ för stora värden på x.

Sats 1.8. Antag att $\alpha > 0$ och $a > 1$. Då gäller att

$$\frac{x^\alpha}{{}^a\log x} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty\,, \tag{1.22}$$

$$\frac{{}^a\log x}{x^\alpha} \to 0 \text{ då } x \to +\infty\,. \tag{1.23}$$

Gränsvärden

Bevis: Sätt ${}^a\!\log x = t$. Då är $x = a^t$ och

$$\frac{x^\alpha}{{}^a\!\log x} = \frac{(a^t)^\alpha}{t} = \frac{(\overset{>1}{a^\alpha})^t}{t}\,.$$

I täljaren har vi en exponentialfunktion med basen $a^\alpha > 1$ och i nämnaren potensfunktionen t. Nu ger formel (1.20) att $t \to +\infty$ då $x \to +\infty$. Då ger Sats 1.7, formel (1.11), att

$$\frac{x^\alpha}{{}^a\!\log x} = \frac{(a^\alpha)^t}{t} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty\,. \qquad \square$$

Satserna 1.7 och 1.8 ger då en rangordning i avseende på tillväxthastighet för logaritm-, potens- och exponentialfunktionerna

$$ {}^{a}\!\log x, \quad x^{\alpha} \text{ och } b^{x}\,, $$

då $a > 1$, $\alpha > 0$ och $b > 1$. Speciellt gäller då också

$$ \frac{b^x}{{}^{a}\!\log x} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty\,, $$

$$ \frac{{}^{a}\!\log x}{b^x} \to 0 \text{ då } x \to +\infty\,. $$

Exempel 1.23. Beräkna gränsvärdet av

$$f(x) = \frac{e^x + x^5 - \ln x}{2e^x + 2^x}.$$

då $x \to +\infty$

Lösning: Division med nämnarens ledande funktion e^x ger:

$$f(x) = \frac{1 + \frac{x^5}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x}}{2 + \left(\frac{2}{e}\right)^x}.$$

Sats 1.7 ger: $\frac{x^5}{e^x} \to 0$, då $x \to +\infty$,

Sats 1.8 $\Rightarrow$ $\frac{\ln x}{e^x} \to 0$, då $x \to +\infty$,

$e > 2 \Rightarrow 0 < \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{e}\right)^x \to 0$, då $x \to +\infty$.

Alltså: $f(x) \to \frac{1 + 0 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$, då $x \to +\infty$.

Exempel 2.14. För $\alpha > 0$ och $a > 1$ gäller

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, {}^a\!\log x = 0\,. \qquad (2.4)$$

Bevis: Direkt gränsövergång ger det obestämda uttrycket $0\cdot(-\infty)$. Om vi inför variabeln $t = 1/x$ gäller $t \to +\infty$ då $x \to 0^+$, och sammansättningsregeln ger oss

$$x^\alpha\, {}^a\!\log x = \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha {}^a\!\log(1/t) = -\frac{{}^a\!\log t}{t^\alpha} \to 0\,, \quad \text{då } x \to 0^+\,,$$

med stöd av formel (1.23) i Sats 1.8. □

Speciellt ser vi ur (2.4) att

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0\,, \quad \text{då } \alpha > 0\,.$$

Vi har följande **instängningsregel** och regel om **gränsövergång i olikhet**.

Sats 2.4. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ har gränsvärdena A respektive B då $x \to a$. Då gäller:

$(f(x) \leq g(x)$ i en omgivning av $a) \Rightarrow A \leq B$.

Om $A = B$ och $h(x)$ är en funktion som i en omgivning av punkten a uppfyller

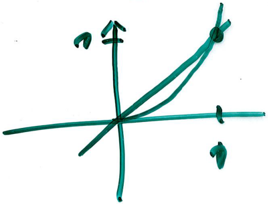
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) ,$$

Så gäller det att $h(x) \to A$, då $x \to a$

Observera att om $f(x) < g(x)$ i en punkterad omgivning av a behöver inte detta innebära att $A < B$, exempelvis om $f(x) = x^4$ och $g(x) = x^2$ och $x \to 0$, så är $A = B = 0$.

Ex För $\underline{\alpha > 1}$ och $\underline{0 \leq x \leq 1}$ gäller

$$0 \leq x^{\alpha} \leq x$$



Då $\begin{cases} x \to 0 \\ 0 \to 0 \end{cases}$; $\underline{\text{om } x \to 0^+}$

ger Sats 2.4 att

$$\underline{x^{\alpha} \to 0, \text{ då } x \to 0^+}.$$

Definition 2.7. Om $a \in D_f$ och funktionen $f(x)$ har ett gränsvärde i punkten a så gäller

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

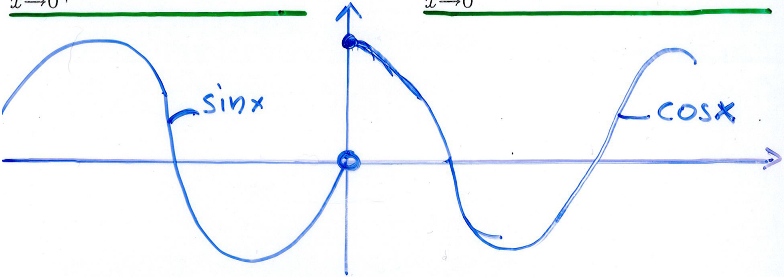
och vi säger att $f(x)$ är **kontinuerlig i punkten** a. Om $M \subseteq D_f$ och $f(x)$ är kontinuerlig i varje punkt i M, så säger vi att $f(x)$ är kontinuerlig i M. Om $M = D_f$ säger vi att $f(x)$ är **kontinuerlig**. En punkt som en funktion inte är kontinuerlig i kallas en **diskontinuitetspunkt** eller en **singularitet**.

Exempel 2.15. För funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x\,, & \text{om } x \geq 0\,, \\ \sin x\,, & \text{0m } x < 0. \end{cases}$$

gäller att

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0) \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \text{ saknas (varför?)}$$



Funktionen saknar gränsvärde då $x \to 0$.

Existensen av ett gränsvärde i en punkt a kan kontrolleras med hjälp av vänster- och högergränsvärden.

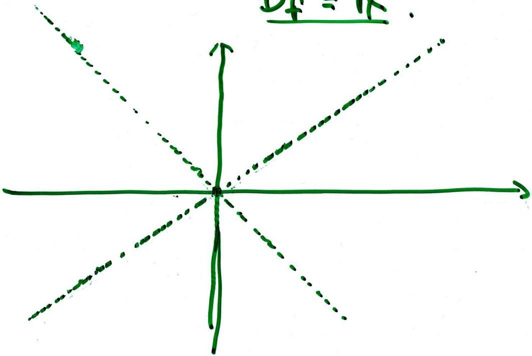
Sats 2.5. Om funktionen $f(x)$ har ett vänster- och högergränsvärde i punkten a så gäller

$$\left(\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A\,.$$

Om $a \in D_f$ så är $A = f(a)$ och $f(x)$ är kontinuerlig i punkten a.

Ex Definiera $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rationellt}, \\ -x, & x \text{ irrationellt}. \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$.



1° Klart att $f(x)$ diskontinuerlig i varje punkt $x_0 \neq 0$.

2°) Det gäller att $f(0)=0$ och

$-|x| \leq f(x) \leq |x|$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Men $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x \to 0} |x| = 0$

Så instängningsregeln (Sats 8.4) ger att

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

så $f(x)$ är kontinuerlig i $x_0 = 0$.

(3°) $f(x)$ är även omvändbar på $D_f = \mathbb{R}$, fastän $f(x)$ inte är strängt monoton på något intervall $[a,b]$.)