Grundkurs i analys, v.44

Grundkurs i analys I, 5 sp, 271005

Kurstider: v. 44 – v. 50 (29.10 – 13.12)

- Föreläsningar : Må 13 - 15, Ti 10 - 12 i Föreläsningssal Lindelöf, Geologicum.
- Demonstrationer: To 10 - 12 i Lindelöf, började vecka 45.
  Indelning i demonstrationsgrupper som under torsdagstiden sammanställer gruppens hemuppgifter för inlämning. Bonuspoäng (1 – 6 poäng) till tenten för räknade hemtal, 50% räknade ger 1 p, 90% ger 6 p (och linjärt däremellan). Sämsta talet i tenten kan bytas mot bonuspoängen.
- Frivilliga räkneövningar började vecka 45 eller inkorporering av räkneövningar i föreläsningarna.

Kurslitteratur: Persson-Böiers: Analys i en variabel (studentlitteratur), föreläsningsanteckningar och kurskompendiet *Grundkurs i analys,* tillgängligt på kurshemsidan:

http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/gkanalys/

Kursmapp: Kopior av kursmaterial i datasalen bredvid sal Lindelöf .

Kurstent: Må 17.12 kl. 12-16 i Aud. I i Geologicum.

Kursinnehåll

- Axiomatiskt införda komplexa talkroppen
- Räkneoperationer med komplexa tal
- Potenser och n-te rötter
- Andragradsekvationer och binomiska ekvationer

- Gränsvärden
- Definitioner och räkneregler
- Standardgränsvärden för beräkning av gränsvärden av sammansatta funktioner
- Tillämpning av gränsvärden på serier

- Derivator
- Räkneregler och elementära funktioners derivator
- Lokala extrempunkter och medelvärdessatsen
- Tillämpningar av derivator

Kursinnehåll

- Primitiva funktioner och integraler
- Räkneregler och integrationsteknik
- Generaliserade integraler: jämförelsesatser, tillämpning av integraler på serier (Cauchys integralkriterium)
- Dubbelintegraler

- Serieutvecklingar
- Taylors och Maclaurins formler
- Serieutveckling av elementära funktioner
- Tillämpningar av serieutvecklingar

1.17 Komplexa tal

Ekvationen

$$x^2 = -1$$

har ingen lösning i de reella talens mängd $\mathbb{R}$. Kan vi utvidga talområdet $\mathbb{R}$ så att varje polynomekvation

$$P_n(x) = 0\,,$$

där polynomet P_n är av gradtal n, har exakt n stycken lösningar då multipliciteten beaktas?

Betrakta mängden

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

i vilken **addition** definieras genom

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

och **multiplikation** genom

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Mängden $\mathbb{C}$ försedd med ovanstående räkneoperationer kallas de **komplexa talen**.

Exempelvis gäller:

$$(2,3)\cdot(-3,1) = (2\cdot(-3) - 3\cdot 1, 2\cdot 1 + 3\cdot(-3))$$
$$= (-9,-7)\,.$$

Man kan visa att alla räkneregler som gäller för addition och multiplikation i $\mathbb{R}$ även gäller i $\mathbb{C}$ med dess definitioner av addition och multiplikation. Exempelvis gäller

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = (b_1,b_2)\cdot(a_1,a_2)\,.$$

Likhet av två tal i $\mathbb{C}$ ges av

$$(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \text{ och } b_1 = b_2)\,.$$

$\mathbb{R}$ som delmängd av $\mathbb{C}$

Betrakta delmängden M av $\mathbb{C}$ given av

$$M = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}\,.$$

Vi observerar att M är sluten under addition och multiplikation,

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0) \in M\,,$$

$$\begin{aligned}(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) &= (a_1 \cdot a_2 - 0 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2)\\ &= (a_1 \cdot a_2, 0) \in M\,.\end{aligned}$$

Vi identifierar det komplexa talet $(a, 0)$ med det reella talet a och mängden M med de reella talen $\mathbb{R}$,

$$(a, 0) = a\,, \quad M = \mathbb{R}\,, \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}\,.$$

Ekvationen $z^2 = -1$ har en lösning $z = (0, 1) \in \mathbb{C}$, ty

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
$$= (-1, 0) = -1\,.$$

Vi definierar symbolen i genom

$$i = (0, 1) \in \mathbb{C}\,.$$

Då erhålls sambandet

$$i^2 = -1\,.$$

(Euler 1777: " $i = \sqrt{-1}$ ")

För $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

$$\lambda(a,b) = (\lambda,0)(a,b) = (\lambda\cdot a - 0\cdot b, \lambda\cdot b + 0\cdot a)$$
$$= (\lambda\cdot a, \lambda\cdot b).$$

Vi ser då att

$$(-i)^2 = (0,-1)^2 = (0,-1)(0,-1)$$
$$= (0\cdot 0 - (-1)\cdot(-1), 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0)$$
$$= (-1,0) = -1,$$

så $z = i$ och $z = -i$ är rötter till ekvationen

$$z^2 = -1.$$

Vi kan för $a, b \in \mathbb{R}$ skriva

$$a + b \cdot i = (a, b),$$

ty

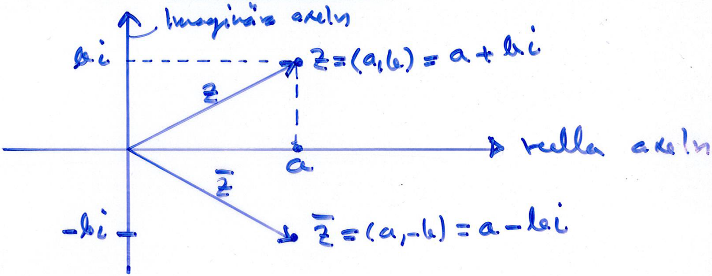
$$a + b \cdot i = (a, 0) + b\,(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Nu kan vi räkna med formen $a + b \cdot i$ och med vanliga räkneregler som gäller i $\mathbb{R}$, **bara vi beaktar att $i^2 = -1$**, exempelvis

$$\begin{aligned}(2 + i)(3 - i) &= 2 \cdot 3 - 2 \cdot i + 3 \cdot i - i^2 \\ &= 6 + i - (-1) = 7 + i.\end{aligned}$$

Låt $z = x + i\,y$ beteckna ett godtyckligt komplext tal. Då inför vi följande beteckningar:

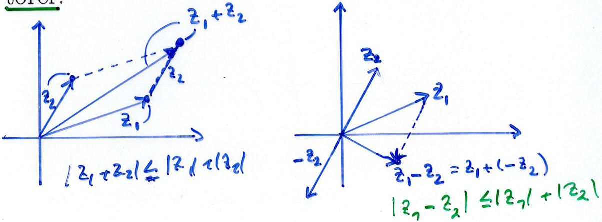
$$
\begin{aligned}
x &= \operatorname{Re} z\,, && \text{realdelen av } z\,,\\
y &= \operatorname{Im} z\,, && \text{imaginära delen av } z\,,\\
\overline{z} &= x - i\,y\,, && \text{konjugattalet till } z\,,\\
|z| &= \sqrt{x^2 + y^2}\,, && \text{absolutbeloppet (eller längden) av } z\,.
\end{aligned}
$$



Räkneregler: $(z, z_1, z_2 \in \mathbb{C})$

1. $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, 2. $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,
4. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
6. $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, (triangelolikheten).

Addition och subtraktion av komplexa tal kan tolkas som addition och subtraktion med vektorer.



Kvoten mellan ett komplext tal u och ett reellt tal $a \neq 0$ definieras som

$$\frac{u}{a} = \frac{1}{a} \cdot u\,.$$

Betrakta ekvationen

$$w\,z = u\,, \qquad w \neq 0\,,$$

där u och w är komplexa tal. Om z och z' är lösningar till ekvationen har vi att

$$wz - wz' = u - u = 0 \Leftrightarrow w\underbrace{(z - z')}_{=0} = 0 \Leftrightarrow z = z'\,,$$

$a, b \in \mathbb{C}:\ a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0$ eller $b = 0)$

så ekvationen har en **entydigt bestämd lösning:**

$$z = \frac{\overline{w}\, u}{|w|^2},$$

ty

$$w \cdot z = w \cdot \frac{\overline{w}\, u}{|w|^2} = u\, \frac{w\, \overline{w}}{|w|^2} \overset{3.}{=} u\, \frac{|w|^2}{|w|^2} = u\,.$$

Då $|w|^2 = w\,\overline{w}$ kan kvoten beräknas som $\frac{u\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}$, exempelvis är

$$\frac{4-i}{2+3i} = \frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{5-14i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}\, i\,.$$

Räkneregler vid division:

$$\frac{u_1}{w_1} \cdot \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 u_2}{w_1 w_2},$$

$$\frac{u_1}{w_1} + \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 w_2 + u_2 w_1}{w1w2}, \quad w_1 w_2$$

$$\overline{\left(\frac{u}{w}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{w}},$$

$$\left|\frac{u}{w}\right| = \frac{|u|}{|w|}.$$

(hem uppg.)

Ex $\frac{u_1}{w_1} \cdot \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 u_2}{w_1 w_2}$,

Sätt: $z_1 = \frac{u_1}{w_1}$, $z_2 = \frac{u_2}{w_2}$. Då gäller:

$(w_1 z_1 = u_1$ och $w_2 z_2 = u_2)$ $(*)$

$$\Rightarrow (w_1 z_1)(w_2 z_2) = u_1 u_2$$
$$\Rightarrow (w_1 w_2)\cdot(z_1 z_2) = u_1 u_2$$
$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \frac{u_1 \cdot u_2}{w_1 w_2} \Rightarrow \underline{\frac{u_1}{w_1} \cdot \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 u_2}{w_1 w_2}}.$$

$(*) \Rightarrow w_1 w_2 z_1 = u_1 w_2$ och $w_2 w_1 z_2 = u_2 w_1$

$$\Rightarrow w_1 w_2 (z_1 + z_2) = u_1 w_2 + u_2 w_1$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = \frac{u_1 w_2 + u_2 w_1}{w_1 w_2}$$
$$\Rightarrow \underline{\frac{u_1}{w_1} + \frac{u_2}{w_2} = \frac{u_1 w_2 + u_2 w_1}{w_1 w_2}}.$$

Komplexa talplanet

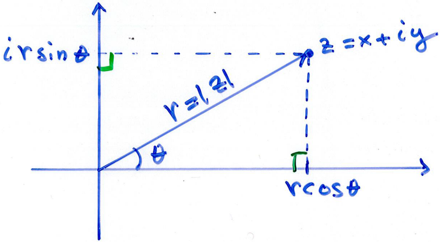
Sätt $z = \dfrac{u}{w}$. Då gäller

$$wz = u \Rightarrow \overline{(wz)} = \overline{u} \overset{4.a)}{\Rightarrow} \overline{w}\cdot\overline{z} = \overline{u}$$

Alltså: $\overline{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{w}} \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{u}{w}\right)} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{w}}$.

Komplexa tal på polär form

Vi inför **polära koordinater** r och θ i planet enligt följande figur,



och erhåller den **polära framställningen** av talet z,

$$z = r\,\cos\theta + i\,r\,\sin\theta = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

Komplexa talplanet

och erhåller den **polära framställningen** av talet z,

$$z = r\ \cos\theta + i\, r\ \sin\theta = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)\,,$$

där r är **längden** av z och θ är **vinkeln mellan z och positiva reella axeln**. Vinkeln θ kallas **argumentet** av z, betecknat $\arg z$. Vinkeln θ är inte entydigt bestämd. Argument som skiljs åt av en heltalsmultipel av 2π identifieras,

$$\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} : \theta_1 = \theta_2 + n\, 2\pi\,.$$

Vi har följande formler för att beräkna argumentet θ av talet $z = x + i\,y$

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta = \arctan \dfrac{y}{x}, \quad \text{då } -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}, & (1.74) \quad x > 0 \\ \theta = \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, \quad \text{då } \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}. & (1.75) \quad x < 0 \end{array}\right.$$

Vi inför det **exponentiella skrivsättet**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta\,. \qquad \text{(Euler)}$$

Den polära framställningen av z blir då

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,e^{i\theta},$$

där $r = |z|$ och $\theta = \arg z$.

Exempel 1.37. Vi har att

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$$

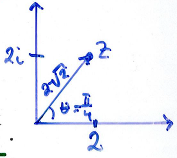
så $e^{i\theta}$ genomlöper enhetscirkeln då $0 \le \theta < 2\pi$.

Exempel 1.38. Vi skriver talet $z = 2 + 2i$, (som är i rektangulär form), i polär form.

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\theta = \arctan\frac{2}{2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$



Alt. $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Bestäm θ så att $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

Komplexa talplanet

Exempel 1.39. Vi har likheterna

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\,.$$

Den första likheten följer av att $e^{i\theta}$ ligger på enhetscirkeln,

3.

$$1 = |e^{i\theta}|^{2} = e^{i\theta}\,\overline{e^{i\theta}}\,.$$

Den andra likheten ges av

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\theta}} &= \overline{(\cos\theta + i\,\sin\theta)} = \cos\theta - i\,\sin\theta\\ &= \cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta) = e^{-i\theta}\,.\end{aligned}$$

Sats 1.12. det gäller att

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} .$$

Bevis: Genom att utnyttja cosinus och sinus additionsteorem erhålls

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\, e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\,\sin\theta)(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \\ &= \cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi \\ &\quad + i\,(\cos\theta\,\sin\varphi + \sin\theta\,\cos\varphi) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\,\sin(\theta+\varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)} . \quad \square \end{aligned}$$

Upprepad användning av Sats 1.12 för $n \in \mathbb{Z}_+$ ger att

$$(e^{i\theta})^n = \underbrace{e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta}}_{n \text{ st.}} = \underbrace{e^{2i\theta}}_{e^{i3\theta}} \cdot \underbrace{e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta}}_{n-2 \text{ st}}$$

$$= \ldots = e^{in\theta},$$

ex. 1.39

$$(e^{i\theta})^{-n} = \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}.$$

Därmed gäller De Moivres formel:

Sats 1.13. För varje $n \in \mathbb{Z}$ gäller

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Exempel 1.40. Skriv talet $(\sqrt{3}+3i)^{18}$ i formen $a+i\,b$.

Lösning: Vi sätter först $z=\sqrt{3}+3i$. Då erhålls

$$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3},$$

$$\theta = \arg z=\arctan\frac{3}{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

så $z=2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$. Då får vi

$$(\sqrt{3}+3i)^{18}=z^{18}=(2\sqrt{3})^{18}(e^{i\frac{\pi}{3}})^{18}=(\sqrt{12})^{18}e^{i\frac{18\pi}{3}}$$
$$=12^9\,\underbrace{e^{i6\pi}}_{1}=12^9.$$

Alt. $z=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

För vilket θ är $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$?

Ex) Geometrisk tolkning av multiplikation och division.

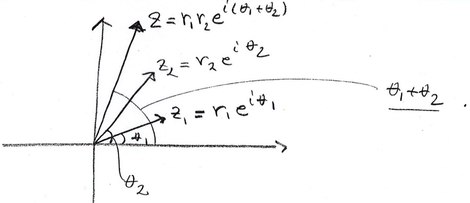
$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

Sats 1.12

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} |z| &= r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg z &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}}$$

Beloppen multipliceras och argumenten adderas



Komplexa talplanet

$$\underline{\underline{z}} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}}.$$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} |z| &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg z &= \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2 \end{aligned}}$$

<u>Beloppen divideras och</u> argumenten <u>subtraheras</u>.

Andragradsekvationer

Betrakta ekvationen

$$z^2 + 2uz + w = 0 ,$$

där u och w är kända **komplexa** konstanter och z är obekant. Kvadratkomplettering ger:

$$z^2 + 2uz + u^2 + w - u^2 = 0 \Leftrightarrow (z+u)^2 = u^2 - w .$$

$(y^2 = t \quad (y, t \in \mathbb{C})$

Vi kan betrakta $z + u$ som obekant. Om vi byter beteckningar, har vi således reducerat problemet till lösning av en ekvation av formen

$$z^2 = w ,$$

där w är en känd komplex konstant och z är en obekant variabel.

Lösning på rektangulär form: Sätt $w = a+ib$ och antag att vi söker en lösning av formen $z = x + iy$. Då gäller

$$(x+iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i\,2xy = a + ib\,.$$

Identifiering av reella och imaginära delarna ger:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a\,, \\ 2xy = b\,. \end{cases}$$

Vi erhåller ett tredje nyttigt samband ur kravet att $|z^2| = |a+ib|$, nämligen

$|z|^2$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Exempel 1.41. Lös ekvationen $z^2 \overbrace{-(2+2i)\,z}^{-2\cdot(1+i)z} + 3 + 6i = 0$.

Lösning: Kvadratkomplettering av vänsterled ger att $(z-(1+i))^2 \underbrace{-(1+i)^2}_{-2i} + 3 + 6i = 0$. Med andra ord gäller

$$(z-(1+i))^2 = -3-4i\,.$$

Sätt nu $x + iy = z - (1+i)$. Insättning i ekvationen ger:

$$x^2 - y^2 + i2xy = -3 - 4i\,,$$

så vi erhåller sambanden

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3\,, \\ \quad 2xy = -4\,, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5\,. \end{cases} \tag{1.76}$$

Första och tredje ekvationen ger:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 5 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \,. \end{cases}$$

Vi måste beakta tecknen på x och y så att $2xy = -4$ gäller! Då är

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

de eftersökta lösningarna som uppfyller **alla tre kraven** i (1.76). Därmed är

$$z = 2 - i \quad \text{och} \quad z = 3i$$

lösningarna till vår ursprungliga ekvation.

$x + iy = z - (1+i) \iff z = (x+iy) + (1+i)$

Binomiska ekvationer

Den enklaste typen av ekvation av gradtal n är den **binomiska ekvationen**

$$z^n = w\,,$$

där w är en komplex konstant. Vid lösning av en dylik ekvation utnyttjas den polära framställningen av komplexa tal. Sätt

$$z = re^{i\theta} \quad \text{och} \quad w = \rho e^{i\varphi}\,.$$

Sats 1.13, (de Moivres formel), ger då att $(re^{i\theta})^n = r^n \cdot (e^{i\theta})^n$

$$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi} .$$

Identifiering av belopp och argument i båda leden ger

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Då får vi precis n **stycken olika lösningar** svarande mot $k = 0, 1, \dots, n-1$. För övriga $k \in \mathbb{Z}$ sammanfaller lösningarna med dessa.

Geometriskt bildar lösningarna hörn i en regelbunden n-hörning med medelpunkt i origo och ett hörn i punkten $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$ svarande mot $k = 0$.

Exempel 1.42. Lös ekvationen $z^3 = 8i$.
Lösning: Sätt $z = r\,e^{i\theta}$,

$$r^3 e^{i3\theta} = 8i = 8\,\underbrace{(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}_{=i} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Alltså erhålls

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + k\,\dfrac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

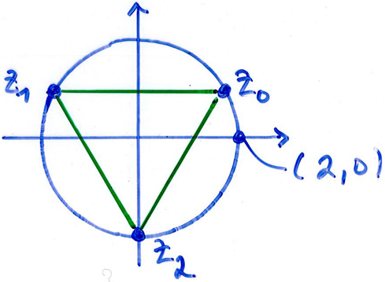
Vi får tre olika lösningar

$$z_k = 2\,e^{i(\frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\pi}{3})}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

explicit utskrivna

$$z_0 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad z_1 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}, \qquad z_2 = 2\,e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Lösningarna bildar hörn i en regelbunden 3-hörning:



Algebrans fundamentalsats bevisades 1799 av Gauss:

Sats 1.14. Varje komplex polynomekvation $p(z) = 0$, där gradtalet för $p(z)$ är n, har exakt n styc-

[redacted]