

Grundkursen i analys, övningsuppgifter

1. Lös andragradsekvationen $z^2 + 2iz - 4 + 4i = 0$.
2. Ange lösningarna till den komplexa ekvationen $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = i$.
(Ledning: Faktorera vänsterled i ekvationen).
3. Visa med hjälp av formeln $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ att funktionen $\sin x$ är kontinuerlig (dvs. visa att $|\sin x - \sin x_0| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow x_0$).
4. Bestäm

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \quad a, b \neq 0, \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n/2}}{(n/2)^n}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3}.$$

5. Givet funktionerna $f(x) = x^2 - a$ och $g(x) = -x^2 + a$, där $x \geq 0$ och $a > 0$. Bestäm a så att tangenten för $f(x)$ sammanfaller med normalen för $g(x)$ i kurvornas skärningspunkt.
6. Givet funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right) - \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi.$$

Beräkna $f'(x)$. Vad kan man säga om $f(x)$ i intervallet $]0, \pi[$?

7. Bestäm extremvärden samt globala maxima och minima till

$$f(x) = x^2 e^x.$$

8. För vilket värde på a ($a > 0$) är maximivärdet av

$$f(x) = x^a e^{2a-x}, \quad x \geq 0,$$

så litet som möjligt?

9. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - x^2 \ln x + \arctan(3^x)}{\ln(e^{x^3} + 1) + \sin(3^x)}.$$

10. Visa att för $x > 0$ gäller olikheten

$$e^x - \frac{x^2}{2} > 1 + x.$$

11. Använd standardgränsvärden som hjälp för att bestämma gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right)^{\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

12. Bestäm för vilka värden på x serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (5 - x^2)^n$$

är konvergent och ange seriens summa i de fall den konvergerar.

13. Derivera funktionerna

(a) $\sin(\arccos(x)) \cdot \arctan(\ln(x))$, då $0 < x < 1$, (b) $(\tan x)^{\sin(\sqrt{\cos x})}$, då $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

14. Beräkna integralen

$$\int_0^1 x \arccos x \, dx.$$

15. Bestäm alla primitiva funktioner till den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 - 4x + 13}.$$

16. Bestäm värdet på den konvergenta generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x}}.$$

17. Beräkna integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 \cos^2 x + \cos x \sin x}.$$

18. Undersök om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

är konvergent.

19. Undersök om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 + 1}{2k^3 - k}$$

är konvergent.

20. Beräkna med hjälp av serieutvecklingar gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x \sin x - x^2}.$$

21. Undersök med serieutvecklingar för vilka värden på a gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + a \cos x - 3}{\ln(1+x^2) - x^2}$$

existerar, samt bestäm gränsvärdet i dessa fall.