

1. a) Definiera begreppet “differentierbar funktion”.
b) Antag att $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ är differentierbar i punkten $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$. Visa att f är kontinuerlig och att första ordningens partialderivator av f existerar i denna punkt.

2. Visa att

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z, 2xy, 3z^2 - x)$$

är gradienten till en viss funktion f .

3. Visa att ekvationen

$$x^6 + y^6 + x^2 + y = 0$$

definierar i en tillräckligt liten omgivning av origo precis en funktion $y = y(x)$. Bestäm $y''(0)$ samt visa att $x = 0$ är en lokal maximipunkt för $y(x)$.

4. Bestäm ekvationen av tangentplanet till ytan

$$x - z + (y - z)^5 = 18$$

som går genom en godtycklig punkt (x_o, y_o, z_o) på ytan. Visa att det finns en och samma vektor (olika nollvektorn) som ligger i alla dessa plan. Ange också en sådan vektor.

5. Transformera differentialekvationen

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

med substitutionen $u = x^2 + 2y$, $v = y$ och bestäm den allmänna lösningen till den givna ekvationen.