

Flerdimensionell analys, delförhör I, 17.4.2003

1. Definiera vad som menas med begreppet a) riktningsderivata, b) gradient. Hur motiveras påståendet att "riktningen av gradienten är den riktning, i vilken funktionsvärdet växer snabbast" ?
2. Visa att $(0,0)$ är den enda lösningen av ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x + xy + e^y = 2 \\ x^3 - x + y + y^3 = 0 \end{cases}$$

i en tillräckligt liten omgivning av origo genom att använda satsen om inversa avbildningar.

3. Bestäm ekvationen av tangentplanet till ytan

$$x - z + (y - z)^5 = 18$$

som går genom en godtycklig punkt (x_o, y_o, z_o) på ytan. Visa att det finns en och samma vektor (olika nollvektorn) som ligger i alla dessa plan. Ange också en sådan vektor.

4. Verifiera att om $k(x)$ är lösningen till DE

$$k'' + a k' + b k = 0,$$

där $k(0) = 0$ och $k'(0) = 1$ (a och b konstanter), så är

$$y(x) = \int_0^x k(x-t) f(t) dt$$

lösningen till DE

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = f(x)$$

med bivillkoren $y(0) = y'(0) = 0$. Funktionen f antas vara kontinuerlig.

5. Undersök om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 + 3x + y^3 + 3y = \frac{7}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

har någon lösning genom att studera ett lämpligt extremvärdesproblem.