Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 6

1. Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar. Definiera funktionen $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genom $z(x, y) = f(x^2 - y^2)$. Visa att funktionen z på enhetscirkeln i $\mathbb{R}^2$ satisfierar den partiella differentialekvationen

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 4f''(x^2 - y^2) \ .$$

2. Låt r vara avståndet från punkten (x, y, z) till origo i $\mathbb{R}^3$. Visa att

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \, , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \, , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{r^3} \, .$$

3. Bestäm tangentplanet till paraboloiden $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$ i punkten $(1, 1, 5)$.

4. Visa med hjälp av en differentialapproximation att det för små x och y gäller

$$\frac{1}{\sqrt{3 + x + \sqrt{1 - y}}} \approx \frac{1}{2} - \frac{x}{16} + \frac{y}{32} \, .$$

5. Transformera uttrycket

$$x \, \frac{\partial f}{\partial x} + y \, \frac{\partial f}{\partial y}$$

genom substitutionen $u = x, \ v = \frac{y}{x}$.

6. Funktionen $f(u, v)$ är kontinuerligt deriverbar i $\mathbb{R}^2$. Sätt

$$h(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = f(u(x, y, z), v(x, y, z)) \, , \quad y > 0 \, , \ z > 0 \, .$$

Beräkna

$$x \, \frac{\partial h}{\partial x} + y \, \frac{\partial h}{\partial y} + z \, \frac{\partial h}{\partial z}$$

uttryckt i u och v och partiella derivator av f.