Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 5

1. Visa att funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given av

$$f(x,y) = \sqrt{1-xy} + \sqrt{1-x+y} + \sqrt{1+x-y}$$

är begränsad.(Ledning: Bestäm först definitionsmängden ...).

2. Visa att det för funktionen $f(t) = (t, t^2, t^3)$ inte finns något ξ mellan 0 och 2, så att $f(2) - f(0) = 2f'(\xi)$. Medelvärdessatsen gäller alltså ej för vektorvärda funktioner.

3. Antag att f och g är rymdkurvor, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

   a) Visa att om $f'(t) = 0$ i ett intervall, är $f(t)$ konstant i intervallet.

   b) Visa att om $f'(t) = g'(t)$ i ett intervall, är i intervallet $f(t) = g(t) + \bar{c}$ med en konstant vektor $\bar{c}$.

4. a) Bestäm tangenten till kurvan $(x, y, z) = (e^{2t}, 3e^t, 9t + 4)$ i punkten $(1, 3, 4)$.

   b) Bestäm i punkten $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ tangenten till den kurva som definieras av ekvationssystemet

$$x^2 + 2y^2 = 1\,, \quad x + y + z = 1\,.$$

5. Beräkna båglängden av nephroiden, (Huygens 1678),

$$x = a(3\cos t - \cos 3t) \quad \text{och} \quad y = a(3\sin t - \sin 3t),$$

där $-\pi \le t \le \pi$ och $a > 0$. (Se figur där $a = 1, 2, 3, 4$)