

Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 4

1. Visa att unionen $A \cup B$ och snittet $A \cap B$ av två mängder är a) öppna mängder, om A och B är öppna mängder, b) slutna mängder om A och B är slutna mängder.
2. Undersök om någon av nedanstående mängder är kompakt,
 - a) $M_1 = \{(x, y) : 0 \leq xy \leq 1 \text{ och } x \geq 0\}$,
 - b) $M_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ och } 0 \leq z < 1\}$,
 - c) $M_3 = \{(x, y) : x + y \leq 1 \text{ och } x \geq 0 \text{ och } y \geq 0\}$.
3. Undersök om funktionen $\mathbf{r}$ är kontinuerlig i punkten $t = 0$ då man definierar $\mathbf{r}(0) = (1, 0)$ och
 - a) $\mathbf{r}(t) = (\frac{t^2}{1+2t-e^{2t}}, \sinh t)$,
 - b) $\mathbf{r}(t) = (\frac{\tan t}{t}, (1+t)^{2t})$.
4. Har följande funktioner ett gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:
 - a) $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$,
 - b) $g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+xy+y^2}$?
5. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \frac{\ln(1+xy)}{xy+x^3y^3}, \quad D_f = \{(x, y) : x > 0 \text{ och } y > 0\},$$

och utred om den har ett gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.