



FAKULTETSOMRÅDET FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

KURSKOMPENDIUM

Fledimensionell Analys

Författare: Christer Glader

Renskrivet: Christian Enlund

2018

Förord

Föreliggande kompendium är en sammanfattning av föreläsningsanteckningarna från läsåren 2016–2018 i kurserna Flerdimensionell analys del 1 och del 2, som ingår i ämnesstudierna i matematik vid Åbo Akademi. Inga anspråk på originalitet görs, materialet är sammanställt ur ett flertal böcker, av vilka nämnas kan kursboken: Analytiska metoder II, av Petermann, Studentlitteratur 2002, och den tidigare kursboken: Flerdimensionell analys, av Eriksson, Studentlitteratur 1976.

Ett stort tack går till Christian Enlund för textbehandling och redigering av materialet.

Åbo, i augusti 2018

Christer Glader

Innehåll

1	Del 1	5
1.1	Euklidiska Vektorrummet $\mathbb{R}^n$	5
1.1.1	Vektorprodukter i $\mathbb{R}^3$	9
1.1.2	Topologiska begrepp i $\mathbb{R}^n$	12
1.1.3	Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$	15
1.1.4	Sammanfattning av Funktioner	22
1.2	Gränsvärden och Kontinuitet	24
1.2.1	Räkneregler för Gränsvärden	31
1.2.2	Gränsvärden för punktföljder	35
1.2.3	Kontinuerliga Funktioner	36
1.2.4	Värdemängden till en kontinuerlig funktion	39
1.2.5	Likformig Kontinuitet	42
1.3	Analys av Rymdkurvor	45
1.3.1	Tangenter till Rymdkurvor	48
1.3.2	Båglängden av en Rymdkurva	50
1.4	Differentialkalkyl för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Partiella derivator	53
1.4.1	Differentierbarhet	59
1.4.2	Differential, Tangentplan och Felanalys	62
1.4.3	Derivering av Sammansatta Funktioner	65
1.4.4	Gradient och Riktningsderivata	70
1.4.5	Nivåkurvor, nivåytor och tangentplan	75

1.5	Differentialkalkyl för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Linjära avbildningar och funktionalmatriser	79
1.5.1	Kedjeregeln i allmän matrisform	82
1.5.2	Funktionaldeterminanter	84
1.6	Inversa avbildningar	89
1.6.1	Implicita funktioner av en variabel	93
1.6.2	Implicita funktioner av flera variabler	100
1.7	Om Derivering av Integraler	105
2	Del 2	112
2.1	Taylors Formel	112
2.1.1	Avbildningar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	112
2.1.2	Taylors formel för avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	114
2.2	Ordobegreppet för polynom av två variabler	118
2.2.1	Ordo-algebran för avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	119
2.2.2	Taylors formel med ordorestterm	121
2.3	Extremvärdesproblem	125
2.3.1	Inledande Exempel	125
2.3.2	Lokala maxima och minima	126
2.3.3	Lokala extremvärden för avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	128
2.3.4	Lokala extremvärden för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	132
2.3.5	Kvadratkomplettering av kvadratiska former	137
2.3.6	Extremvärdesproblem med ett bivillkor	142
2.3.7	Extremvärdesproblem med flera bivillkor	149
2.3.8	Största och minsta värden på kompakta mängder	154
2.3.9	Största och minsta värden på icke-kompakta mängder	157
2.4	Dubbelintegraler	159
2.4.1	Viktiga egenskaper hos dubbelintegralen	165
2.4.2	Upprepad Integration	169

2.4.3	Variabelsubstitution i dubbelintegraler	174
2.4.4	Linjära transformationer	176
2.4.5	Övergång till polära koordinater	177
2.4.6	Generaliserade dubbelintegraler	180
2.4.7	Generaliserade dubbelintegraler och upprepad integration utnyttjandes Fubinis Sats	185
2.5	Trippelintegraler	188
2.5.1	Tabellerade tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler	193
2.6	Integralkalkyl för vektorfält, kurvintegraler	195
2.6.1	Greens formel med Tillämpningar	199
2.6.2	Konservativa fält	204
2.7	Parameterframställning och areor av ytor i $\mathbb{R}^3$	209
2.7.1	Ytintegraler	214
2.7.2	Stokes Sats	220
2.7.3	Gauss' Sats	222

Flerdimensionell Analys

Del 1

1.1 Euklidiska Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Betrakta mängden av ordnade n -tiplar:

$$\mathbb{R}^n := \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Mängden $\mathbb{R}^n$ försedd med addition och multiplikation med reell skalär bildar ett vektorrum. För $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ definieras

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

och

$$c\bar{x} = c(x_1, \dots, x_n) := (cx_1, \dots, cx_n).$$

Additionen är kommutativ och associativ.

Multiplikationen med skalär är associativ.

Nollvektorn: $\bar{0} = (0, \dots, 0)$

är det neutrala elementet med avseende på addition.

Den additiva inversen till $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$-\bar{x} := (-1) \cdot \bar{x} = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Subtraktion definieras genom

$$\bar{x} - \bar{y} := \bar{x} + (-\bar{y}) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n).$$

Elementen i $\mathbb{R}^n$ kallas punkter eller vektorer.

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ blir euklidiskt om vi inför skalärprodukten (inre produkten)

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Punkterna i $\mathbb{R}^n$ kan tolkas som $n \times 1$ -matriser

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

varvid $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y}$.

Beloppet (längden) av en vektor $\bar{x}$ ges av

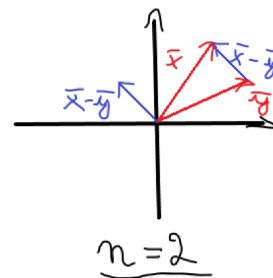
$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

och avståndet mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är

$$|\bar{x} - \bar{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Sats 1. (*Cauchy-Schwartz' olikhet*)

För alla vektorer $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

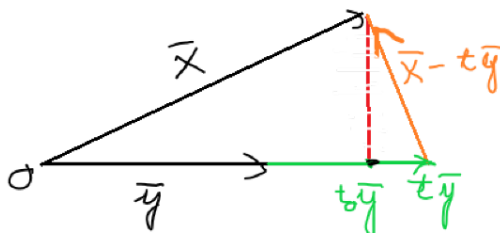


$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}| \quad (|\bar{x}^T \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|)$$

med likhet om och endast om $\bar{x} = \lambda \bar{y}$ eller $(\bar{x} = \bar{0} \vee \bar{y} = \bar{0})$.

Bevis. Gäller om $\bar{x} = \bar{0}$ eller $\bar{y} = \bar{0}$. Antag $\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}$.

Sätt: $\varphi(t) = |\bar{x} - t\bar{y}|^2 = (\bar{x} - t\bar{y}) \cdot (\bar{x} - t\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} - 2t\bar{x} \cdot \bar{y} + t^2\bar{y} \cdot \bar{y}$



$\varphi(t)$ 2:a grads polynom i t , minimum då $\varphi'(t) = 0$.

$$\varphi'(t) = -2\bar{x} \cdot \bar{y} + 2t\bar{y} \cdot \bar{y} = 0$$

$\iff$

$$t = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{y} \cdot \bar{y}} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} =: t_0.$$

$$\begin{aligned} \therefore 0 \leq \varphi(t_0) &= |\bar{x}|^2 - 2 \cdot \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} (\bar{x} \cdot \bar{y}) + \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{y}|^4} \cdot |\bar{y}|^2 \\ &= |\bar{x}|^2 - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{y}|^2} \end{aligned}$$

Alltså: $(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2$ och således $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$.

Likhet erhålls om $\bar{y} = \bar{0}$ eller om $\varphi(t_0) = 0$ dvs. $\bar{x} = t_0 \bar{y}$. □

Ur $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$ följer att $-1 \leq \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} \leq 1$, då $\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$.

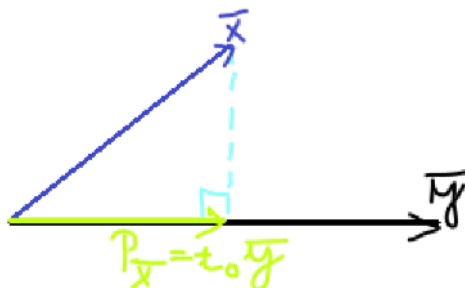
Vi kan då definiera vinkeln θ mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ genom

$$\cos \theta = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{\bar{x}^T \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}, \text{ då } \bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}.$$

Om $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ är vektorerna ortogonala och om $\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$ är de då vinkelräta ($\cos \theta = 0$).

Den ortogonala projektionen av en vektor $\bar{x}$ på vektorn $\bar{y}$ ges av

$$P_{\bar{x}} = t_0 \bar{y} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} \bar{y}.$$



En vektor $\bar{x}$ är en enhetsvektor om $|\bar{x}| = 1$.

I $\mathbb{R}^n$ är enhetsvektorerna $\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ \bar{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \end{cases}$ parvis ortogonala, ($e_i \perp e_j, i \neq j$), och bildar en ortonormal bas i $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$.

Sats 2. (*Triangelolikheten*)

För alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$$

med likhet om och endast om $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är parallella och lika riktade.

Bevis.

$$\begin{aligned} |\bar{x} + \bar{y}|^2 &= (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{y} \\ &\leq |\bar{x}|^2 + 2|\bar{x} \cdot \bar{y}| + |\bar{y}|^2 \stackrel{(\text{Sats 1})}{\leq} |\bar{x}|^2 + 2 \cdot |\bar{x}||\bar{y}| + |\bar{y}|^2 \\ &= (|\bar{x}| + |\bar{y}|)^2. \end{aligned}$$

Alltså gäller $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$. Vidare har vi att

$$|\bar{x}| = |(\bar{x} + \bar{y}) + (-\bar{y})| \leq |\bar{x} + \bar{y}| + |-\bar{y}| = |\bar{x} + \bar{y}| + |\bar{y}|,$$

så $|\bar{x}| - |\bar{y}| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. Analogt fås att $|\bar{y}| - |\bar{x}| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$ och då gäller $||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. $\square$

För $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$|\lambda \bar{x}|^2 = (\lambda \bar{x}) \cdot (\lambda \bar{x}) = \lambda^2 (\bar{x} \cdot \bar{x}) = \lambda^2 |\bar{x}|^2$$

alltså har vi att $|\lambda \bar{x}| = |\lambda| |\bar{x}|$. Sammanfattningsvis har vi för beloppet egenskaperna

$$|\bar{x}| \geq 0, \quad \text{med likhet om och endast om } \bar{x} = \bar{0},$$

$$|\lambda \bar{x}| = |\lambda| |\bar{x}|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n.$$

1.1.1 Vektorprodukter i $\mathbb{R}^3$

Antag att basvektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för $\mathbb{R}^3$ bildar ett högersystem: “Den minsta vridning som överför e_1 på e_2 sker moturs betraktat från spetsen av e_3 ”.



Alternativt: “Den minsta vridning som överför e_1 på e_2 får en vanlig högergängad skruv att röra sig i den riktning som representeras av e_3 ”.

Vektorprodukten av $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$, är en vektor i $\mathbb{R}^3$ betecknad $\bar{x} \times \bar{y}$ och definierad av

$$\bar{x} \times \bar{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

En minnesregel för beräkning av $\bar{x} \times \bar{y}$ ges av utvecklingen av nedanstående formella determinant

efter den första kolonnen:

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= \begin{vmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)\end{aligned}$$

Alternativt beräkningssätt (annan minnesregel), utveckling efter första raden:

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3$$

Exempel 1. Beräkna vektorprodukten $\bar{x} \times \bar{y}$ för vektorerna $\bar{x} = (1, 2, -2)$ och $\bar{y} = (-1, 2, 2)$.

Lösning

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= \begin{vmatrix} e_1 & 1 & -1 \\ e_2 & 2 & 2 \\ e_3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= (4 - (-4)) \cdot e_1 - (2 - 2) \cdot e_2 + (2 - (-2)) \cdot e_3 \\ &= \underline{(8, 0, 4)}\end{aligned}$$

Notera att $(\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{x} = 0$ och $(\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{y} = 0$, alltså är $\bar{x} \times \bar{y}$ vinkelrät emot $\bar{x}$ och $\bar{y}$

Med hjälp av definitionen kontrollerar man lätt att följande egenskaper gäller för vektorprodukten:

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= -\bar{y} \times \bar{x} && \text{(antikommutativ),} \\ \bar{x} \times (\bar{y} + \bar{z}) &= \bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} \times \bar{z} && \text{(distributiv),} \\ \bar{x} \times c\bar{y} &= c(\bar{x} \times \bar{y}) && \text{för alla } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Den skalära trippelprodukten av vektorerna $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ definieras som $\bar{u} \cdot (\bar{x} \times \bar{y})$.

Om $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ser vi direkt från minnesregeln för beräkning av $\bar{x} \times \bar{y}$ att

$$\bar{u} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \pm V(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}),$$

där $V(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ betecknar volymen av den parallelepiped som har sidorna $\bar{u}, \bar{x}$ och $\bar{y}$ och tecknet är “+” om dessa bildar ett högersystem (annars “−”).

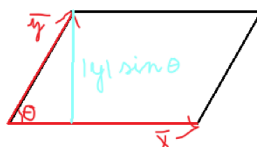
Ur ovanstående formel härleder vi lätt egenskaperna 1 och 2 för vektorprodukten.

Egenskaper för vektorprodukten

1. Vektorn $\bar{x} \times \bar{y}$ är vinkelrät mot både $\bar{x}$ och $\bar{y}$, ty om vi väljer $\bar{u} = \bar{x}$ eller $\bar{u} = \bar{y}$ så har determinanten två identiska kolonner och är därmed lika med noll.
2. Om $\bar{x} \times \bar{y} \neq \bar{0}$ bildar $\bar{x}, \bar{y}$ och $\bar{x} \times \bar{y}$ i denna ordning ett högersystem, ty om $\bar{x} \times \bar{y} = (a_1, a_2, a_3)$ har vi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1 \\ x_2 & y_2 & a_2 \\ x_3 & y_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & y_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) > 0.$$

3. Vidare gäller $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}| \sin \theta$, där θ betecknar vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$. Detta betyder att $|\bar{x} \times \bar{y}|$ är arean av den parallelogram som har sidorna $\bar{x}$ och $\bar{y}$.



Bevis. Med vår minnesregel för beräkning av $\bar{x} \times \bar{y}$ erhålls

$$\begin{aligned} |\bar{x} \times \bar{y}|^2 &= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= \dots = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2 - |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2 \left(1 - \frac{|\bar{x} \cdot \bar{y}|^2}{|\bar{x}|^2|\bar{y}|^2} \right) \\ &= |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2(1 - \cos^2 \theta) = |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Alltså gäller: $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}| \sin \theta$.

□

1.1.2 Topologiska begrepp i $\mathbb{R}^n$

De punkter i $\mathbb{R}^n$ som ligger på ett avstånd mindre än δ från $\bar{a}$ utgör en omgivning, (δ -omgivning). $O_\delta(\bar{a})$ till $\bar{a}$:

$$O_\delta(\bar{a}) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{a}| < \delta\}, \quad \delta > 0.$$



En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ kan definieras att vara en inre punkt, yttre punkt eller randpunkt till en specifik mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Definitionerna är följande:

Inre Punkt Om $\exists \delta > 0 : O_\delta(\bar{a}) \subseteq M$ så är $\bar{a}$ en inre punkt till mängden M .

Yttre Punkt Om $\exists \delta > 0 : O_\delta(\bar{a}) \cap M = \emptyset$ så är $\bar{a}$ en yttre punkt till mängden M . (Då är $\bar{a}$ en inre punkt till $\mathbb{C}M := \mathbb{R}^n \setminus M$).

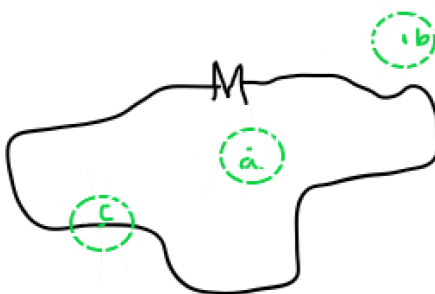
Randpunkt Om $\forall \delta > 0 : M \cap O_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset$ och $\mathbb{C}M \cap O_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset$ så är $\bar{a}$ en randpunkt till M .

Mängden av alla inre punkter till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ betecknas M° :

$$M^\circ := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \text{ är en inre punkt till } M\}$$

Det gäller att $M^\circ \subseteq M$, ty $O_\delta(\bar{a}) \subseteq M \implies \bar{a} \in M$.

Mängden av alla randpunkter till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ betecknas ∂M :



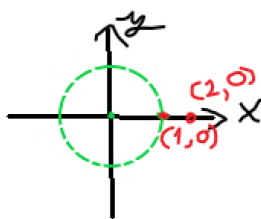
a inre punkt, b yttre punkt och c randpunkt till M .

$$\partial M := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \text{ är en randpunkt till } M\}$$

- Mängden $\bar{M} := M \cup \partial M$ kallas höljet av M .
- Mängden M är sluten om $\partial M \subseteq M$, dvs. $\bar{M} = M$.
- Mängden M är öppen om $M \subseteq M^\circ$, dvs. $M = M^\circ$.

Exempel 2. Låt $M \subseteq \mathbb{R}^2$ definieras av:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0), (2, 0)\}. \quad \text{öppna enhetsskivan} + \text{två punkter}$$



Då gäller:

$$M^\circ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\partial M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0)\}$$

$$\bar{M} = M \cup \partial M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}.$$

$M \neq M^\circ$ och $M \neq \bar{M}$, så M är varken sluten eller öppen.

Exempel 3. En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen om och endast om $\mathbb{C}M$ är en sluten mängd.

Bevis: (Notera att $\partial M = \partial \mathbb{C}M$). Det gäller att

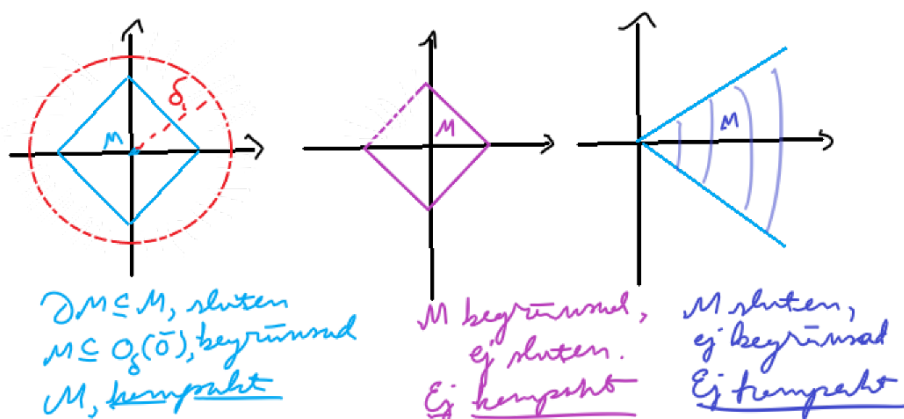
$$M \text{ är öppen} \iff M \subseteq M^\circ \iff \partial M \subseteq \mathbb{C}M$$

$$\iff \partial \mathbb{C}M \subseteq \mathbb{C}M$$

$$\iff \underline{\mathbb{C}M \text{ är sluten}} \square$$

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad om det existerar en δ -omgivning $O_\delta(\bar{0})$ av $\bar{0}$ sådan att $M \subseteq O_\delta(\bar{0})$. (Då är $|\bar{x}| < \delta$ för alla $\bar{x} \in M$.)

Om en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad och sluten kallas den kompakt.



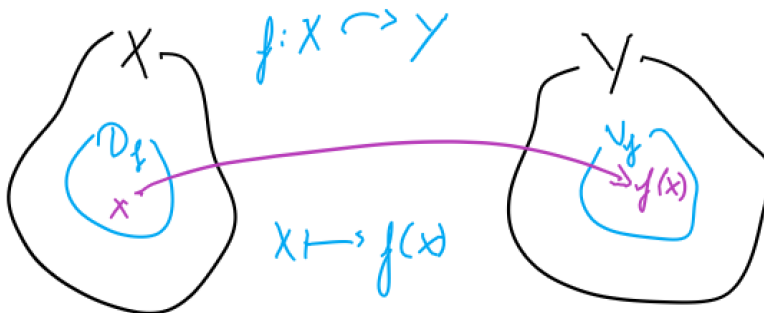
1.1.3 Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Låt f vara en funktion (avbildning) från mängden X till mängden Y , betecknat: $f : X \rightarrow Y$.

De punkter i X som f är definierad i utgör f 's definitionsmängd, betecknad D_f .

Värdemängden för f , betecknad V_f , är de värden i Y som antas av funktionen f ,

$$V_f := \{y \in Y : \exists x \in D_f : f(x) = y\} = \{f(x) : x \in D_f\}.$$



För avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har vi

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

och bilden av $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ under f är en vektor i $\mathbb{R}^m$:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})),$$

där komponentfunktionerna $f_1, \dots, f_m$ är reellvärda funktioner av n variabler,

$$f_k(\bar{x}) = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, m,$$

alltså $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, \dots, m$.

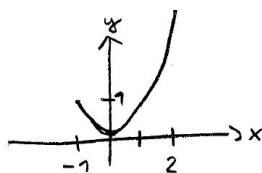
För en avbildning $f : X \rightarrow Y$ definierar vi grafen för f som mängden G_f given av

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\},$$

som då är en delmängd av produktmängden $X \times Y$.

Mängden G_f kan i vissa fall visualiseras i ett 2- eller 3-dimensionellt koordinatsystem.

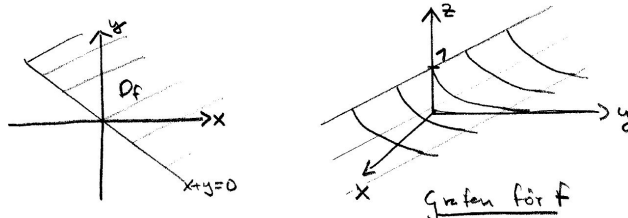
Exempel 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2$, $D_f = [-1, 2]$



Mängden G_f , grafen för f .

Exempel 5. (funktionsytor) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(x, y) = e^{-x-y}$, $D_f = \{(x, y) : x + y \geq 0\}$.

Kan framställas i ett 3-dimensionellt koordinatsystem med $z = f(x, y) = e^{-x-y}$. Observera att på linjerna $x + y = k$ gäller $z = e^{-k}$:



(Praktisk tolkning: Bestäm kurvan $z = f(0, y) = e^{-y}$ i yz -planet och translatera (förskjut) denna.)

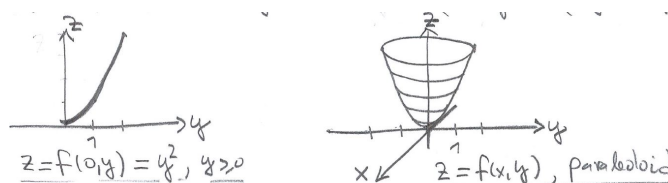
Ifall en funktionsyta är av formen:

$$z = f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

så är den rotationssymmetrisk kring z -axeln.

Då kan man i yz -planet för $y \geq 0$ rita ut kurvan $z = f(0, y)$ och rotera denna kring z -axeln för att skapa ytan $z = f(x, y)$.

Exempel 6. Rita en bild av ytan $z = x^2 + y^2$. Vi har $z = f(x, y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 (= g(\sqrt{x^2 + y^2}))$.



Ofta är det svårt att skissera en yta $z = f(x, y)$, då kan ett symboliskt programpaket användas.

Exempel 7. Rita ytan $z = f(x, y) = \sin(x + \cos(y))$, då $-2 \leq x \leq 2$ och $-3 \leq y \leq 3$, i Mathematica (bild a).

Ett annat sätt att visualisera avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är med nivåkurvor. Vi löser ekvationen:

$$f(x, y) = c$$

för lämpligt valda värden på c och ritat motsvarande kurvor i ett xy -plan. I exemplet med $f(x, y) = x^2 + y^2$ blir nivåkurvorna cirklar $x^2 + y^2 = c$ med radie $\sqrt{c}$. Ju tätare nivåkurvorna ligger, desto brantare är funktionsgrafen. (jämför topografiska kartor), i Mathematica (b) samt nivåkurvor för $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$ (c)

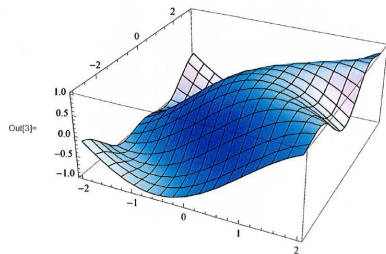
Avbildningar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som parameterkurvor i planet,

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t), y(t)), \text{ eller } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

```

In[1]:= f[x_, y_] := Sin[x + Cos[y]]
In[3]:= Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]

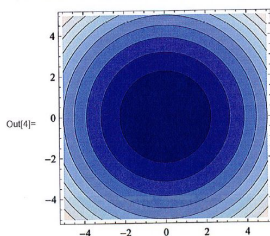
```

(a) $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$ upp-
ritad

```

In[4]:= ContourPlot[x^2 + y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]

```

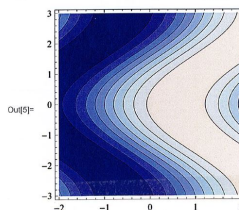


(b) Nivåkurvor

```

In[5]:= ContourPlot[Sin[x + Cos[y]], {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]

```

(c) Nivåkurvor för $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$

Bilder som hör till Ex7

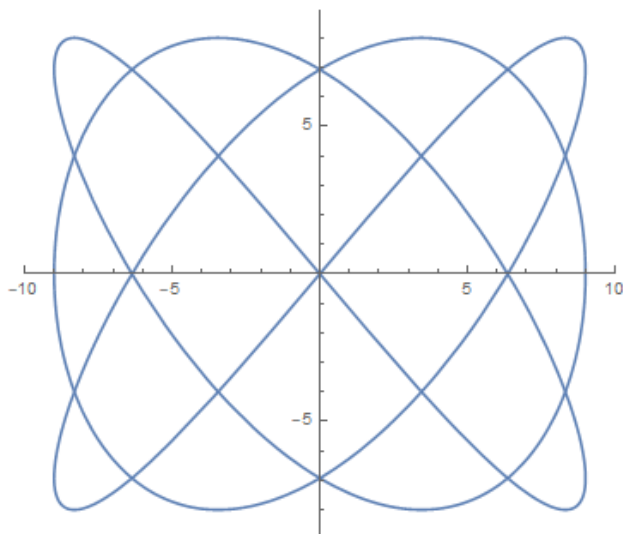
Exempel 8. Bowditch kurva (1815):

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (9 \sin\left(\frac{3}{4}t\right), 8 \sin t), 0 \leq t \leq 8\pi.$$

```

x[t_] := 9 Sin[3 t / 4]; y[t_] := 8 Sin[t]
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 8 Pi}]

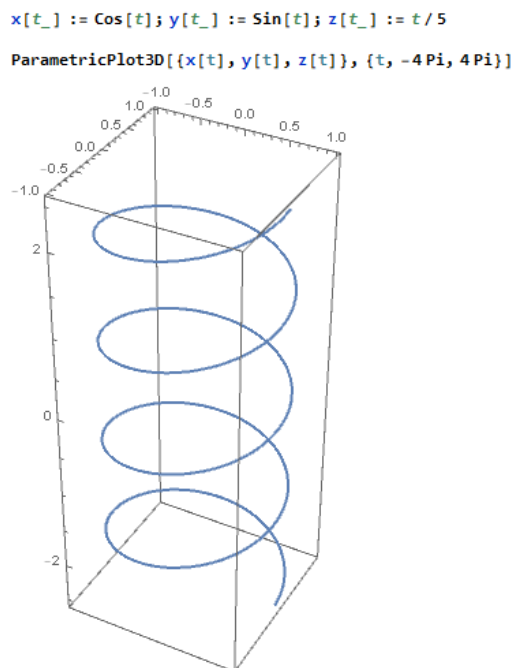
```



Avbildningar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ kan visualiseras som parameterkurvor i rummet,

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

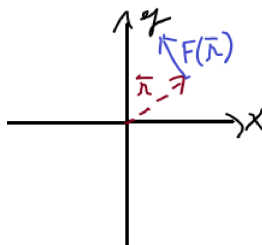
Exempel 9. Skruvlinjen $\bar{r} = \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{5})$, $-4\pi \leq t \leq 4\pi$, belägen på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$.



En avbildning $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan tolkas som ett vektorfält, (kraftfält), i planet

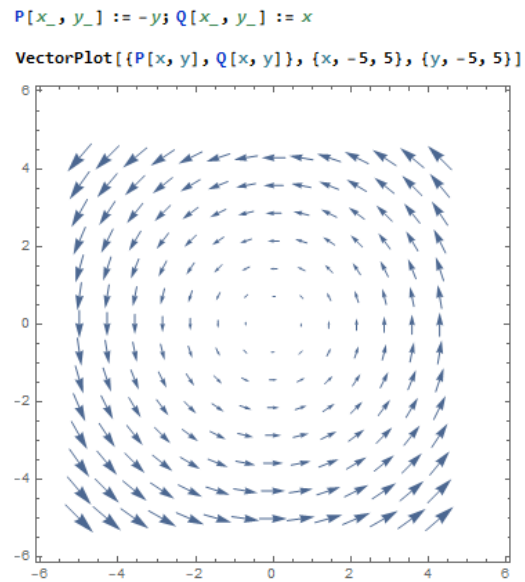
$$F = F(\bar{r}) = F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Det kan visualiseras så att man utgående från Ortsvektorn $\bar{r} = (x, y)$ ritat ut vektorn $F(x, y)$.



Exempel 10. Fältet $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (-y, x)$ "Vridet vektorn (x, y) moturs vinkeln $\frac{\pi}{2}$ ".

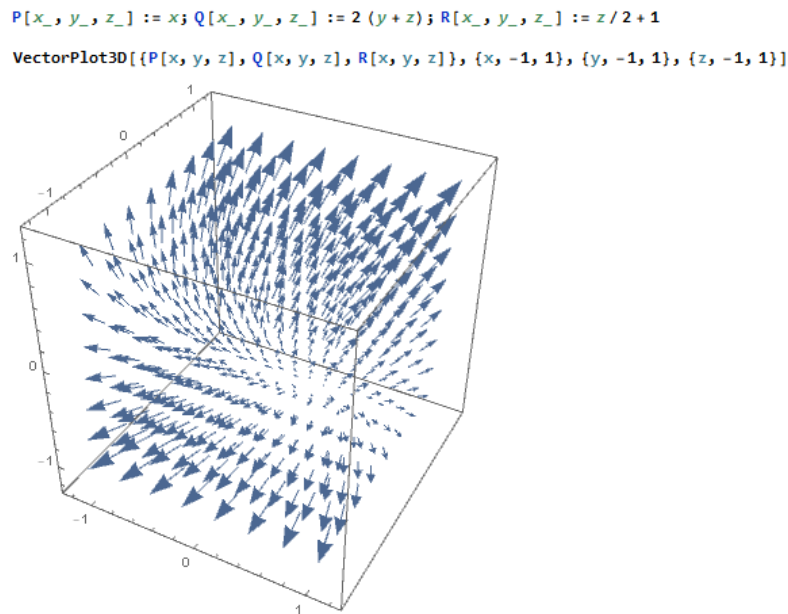
I Mathematica görs detta med VectorPlot:



På analogt sätt kan en avbildning $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tolkas som ett vektorfält i rummen

$$F = F(\vec{r}) = F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Exempel 11. Fältet $F(x, y, z) = (x, 2(y + z), \frac{z}{2} + 1)$ kan visualiseras med *VectorPlot3D*

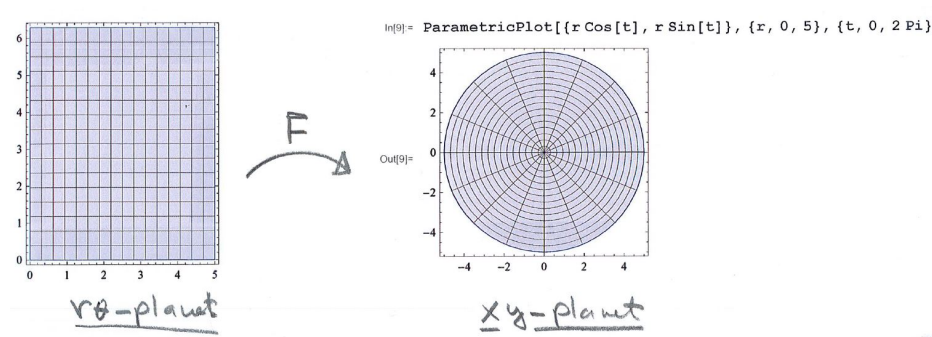


OBS! Mathematica anpassar längden av pilarna så att figuren blir överskådlig (pilarna går inte i

varandra). Vektorernas längd proportionella mot de riktiga värdena.

Avbildningar $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan tolkas som koordinatbyten, eller deformation av områden.

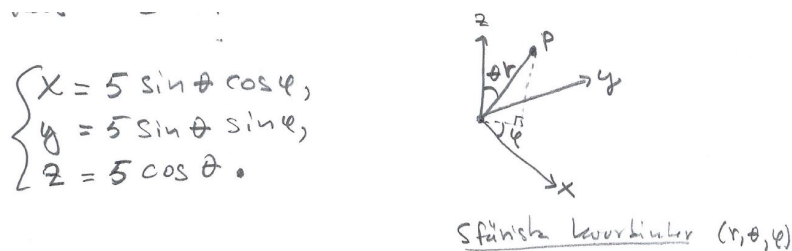
Exempel 12. Övergång från polära koordinater till kartesiska koordinater $F(r, \theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$



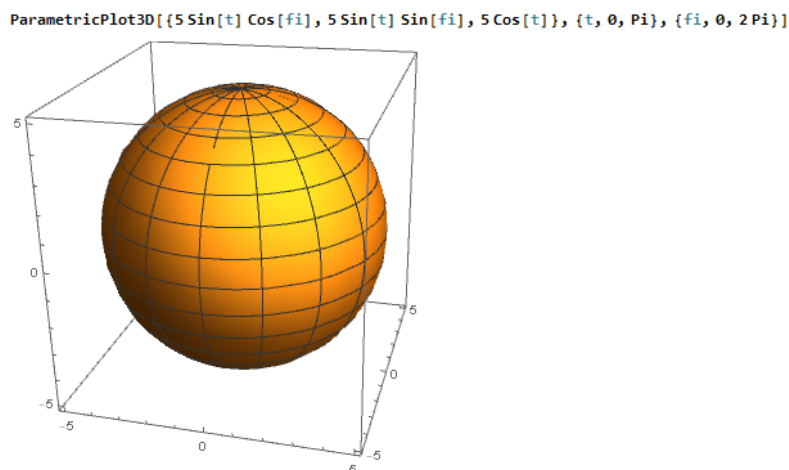
En avbildning $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kan tolkas som en avbildning av ett område i planet på en yta i rummet,

$$F(\vec{r}) = F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Exempel 13. Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ kan framställas med sfäriska koordinater som:



Ytan kan visualiseras i Mathematica med `ParametricPlot3D`:



1.1.4 Sammansättning av Funktioner

Antag att $f : \mathbb{R}^p \curvearrowright \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^p$. Om $V_f \cap D_f \neq \emptyset$ kan vi definiera den sammansatta funktionen $f \circ g : \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^m$,

$$(f \circ g)(\bar{x}) := f(g(\bar{x})),$$

med definitions- och värdemängd givna av

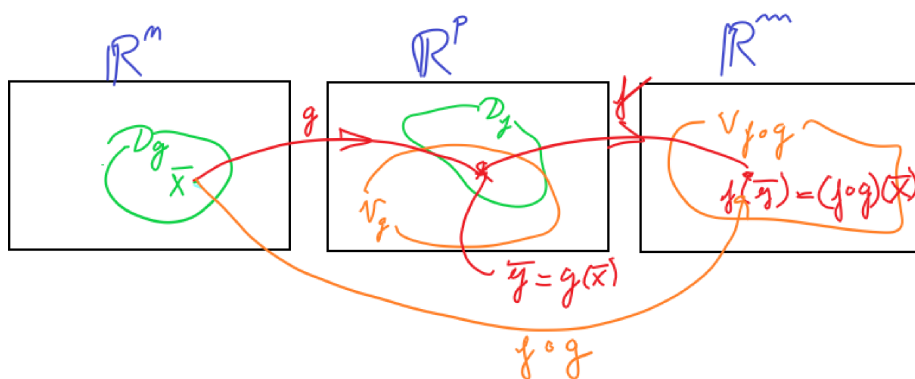
$$D_{f \circ g} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_g \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f\},$$

$$V_{f \circ g} = \{f(\bar{y}) : \bar{y} \in D_f \cap V_g\}.$$

Exempel 14. *Givet*

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^2, & f(u) = (u^2, u + 1) \\ g : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}, & g(x, y) = \sin(xy^2). \end{cases}$$

Då är $f \circ g : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ given av



$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(\sin(xy^2)) = (\sin^2(xy^2), \sin(xy^2) + 1)$$

och $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ given av

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(u^2, u + 1) = \sin(u^2(u + 1)^2)$$

1.2 Gränsvärden och Kontinuitet

Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Låt $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1. (Gränsvärde då $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bar{a}$).

Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{A} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a} \in D_f$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$, $\bar{a} \in D_f^\circ$, sådant att

$$(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f) \implies |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon$$

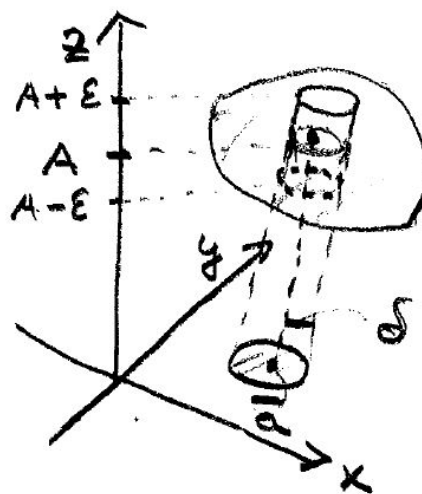
Alternativt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f \implies |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon$$

Beteckning: $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A}$ eller $f(\bar{x}) \rightarrow \bar{A}$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$.

Geometrisk tolkning. För $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

Cirkelskivan $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ avbildas på ett ytafsnitt som ligger innanför cylindern med höjden 2ε .



OBS! $(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} \text{ och } \bar{a} \in D_f) \not\Rightarrow f(\bar{a}) = \bar{A}$.

Definition 2. (Kontinuitet). Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{a} \in D_f$ om

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} = f(\bar{a}).$$

Funktionen f är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt $\bar{a} \in D_f$.

Undersökningen om ett gränsvärde existerar för $f : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan göras med hjälp av komponentfunktionerna:

Sats 3. Antag att $f : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$, där $f_k : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$. Då gäller:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} = (A_1, \dots, A_m) \iff \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = A_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Bevis. Det gäller att $|f(\bar{x}) - \bar{A}|^2 = \sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - A_k|^2$.

1°) Antag att $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} = (A_1, \dots, A_m)$, $(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \bar{x} \in D_f \text{ och } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \implies |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon)$.

$$|f_k(\bar{x}) - A_k|^2 \leq \sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - A_k|^2 = |f(\bar{x}) - \bar{A}|^2$$

Alltså gäller det för $k = 1, \dots, m$ att

$$|f_k(\bar{x}) - A_k| \leq |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon, \text{ så snart } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta,$$

vilket innebär att

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = A_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

2°) Antag att $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_k(\bar{x}) = A_k$, $k = 1, \dots, m$.

Tag $\varepsilon > 0$. För $k = 1, \dots, m$ gäller:

$$\exists \delta_k > 0 : (0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_k \text{ och } \bar{x} \in D_f) \implies |f_k(\bar{x}) - A_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

För $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_m)$ och $\bar{x} \in D_f$ gäller

$$|f(\bar{x}) - \bar{A}|^2 = \sum_{k=1}^m |f_k(\bar{x}) - A_k|^2 < m \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 = \varepsilon^2,$$

vilket ger att $|f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon$ och således

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A}.$$

□

Exempel 15. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras för $t \neq 0$ genom $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\ln(1+2t^2)}{t^2}, \frac{1-e^t}{t}\right)$.

Kan vi definiera värdet för f i $t = 0$ så att f blir kontinuerlig i punkten?

Lösning: Bör utreda om $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existerar. Sats 3 ger att detta kan utföras komponentvis,

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t^2)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\ln(1+2t^2)}{2t^2} = 2 \cdot 1 = 2, & \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \text{ och } 2t^2 \rightarrow 0\right) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{e^t-1}{t} = (-1) \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Svar: Ja, definiera $f(0) = (1, 2, -1)$. Då gäller det att $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$.

Anmärkning. Om gränsvärdet existerar är det entydigt bestämt.

Bevis. Antag $f(\bar{x}) \rightarrow \bar{A}_1$ och $f(\bar{x}) \rightarrow \bar{A}_2$, då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$.

Antites: $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$. Tag $\varepsilon = \frac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| > 0$.

För $\bar{x}$ nära $\bar{a}$ med $\bar{x} \in D_f$ gäller

$$|f(\bar{x}) - \bar{A}_1| < \frac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| \text{ och } |f(\bar{x}) - \bar{A}_2| < \frac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2|.$$

$$\begin{aligned} \therefore |\bar{A}_1 - \bar{A}_2| &= |(\bar{A}_1 - f(\bar{x})) + (f(\bar{x}) - \bar{A}_2)| \leq |\bar{A}_1 - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - \bar{A}_2| \\ &< \frac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| + \frac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| = |\bar{A}_1 - \bar{A}_2| \quad \mathbf{Motsägelse.} \end{aligned}$$

Alltså gäller $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$. □

Exempel 16. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

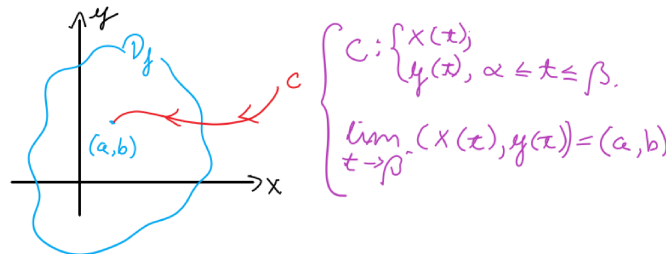
Existerar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

Lösning: Notera att $f(0, y) = 0, y \neq 0$, så om det finns ett gränsvärde så måste det vara 0, ty f antar värdet 0 i varje δ -omgivning av $(0, 0)$.

Tag $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \right| < \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 \\ &= |(x, y) - (0, 0)|^2 < \varepsilon, \text{ om } |(x, y) - (0, 0)| < \sqrt{\varepsilon} =: \delta \text{ och } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Alltså: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.



Antag att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = A$. Om det i varje δ -omgivning av (a, b) finns punkter på kurvan C som tillhör D_f gäller det att:

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} f(x(t), y(t)) = A.$$

Med andra ord: Om vi får olika gränsvärden för $f(x(t), y(t))$ på två kurvor då $(x(t), y(t)) \rightarrow (a, b)$, så kan inte $\lim_{\bar{x} \rightarrow (a,b)} f(\bar{x})$ existera.

Exempel 17. Existerar gränsvärdet då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ för

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)?$$

Lösning: Betrakta linjerna $y = x$ och $y = 0$ som båda går igenom $(0, 0)$.

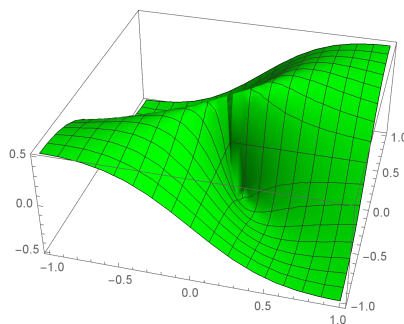
$$1^\circ) \quad y = x \text{ har parametreringen } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$g(t) = f(t, t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då } t \rightarrow 0.$$

$$2^\circ) \quad y = 0 \text{ har parametreringen } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$h(t) = f(t, 0) = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{då } t \rightarrow 0.$$

$\therefore$ Gränsvärdet saknas.



Exempel 18. Betrakta funktionen

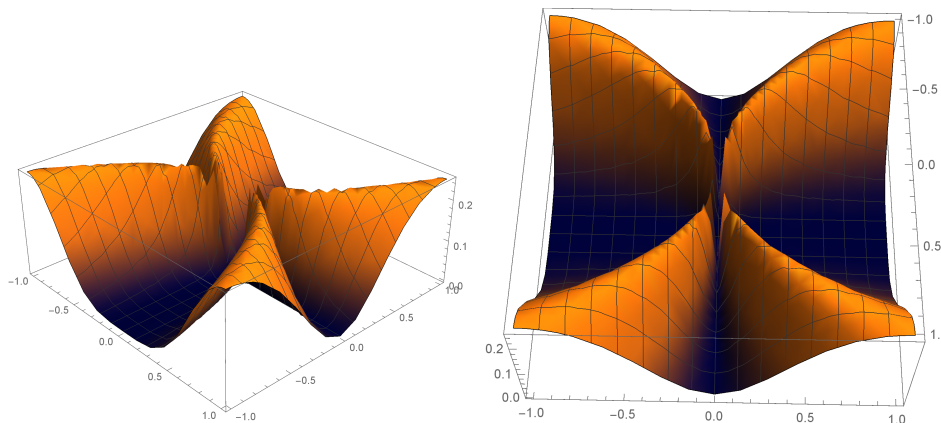
$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Om vi närmar oss origo på linjerna $y = kx, k \in \mathbb{R}$ har vi

$$f(x, kx) = \frac{x^4 k^2 x^2}{(x^4 + k^2 x^2)^2} = \frac{k^2 x^2}{(x^2 + k^2)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{då } x \rightarrow 0$$

Restriktionen av f till varje rät linje genom origo har gränsvärdet 0. Men ändå saknas gränsvärdet för $f(x, y)$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ty om vi närmar oss origo på parabeln $y = x^2$ erhålls

$$f(x, x^2) = \frac{x^8}{(x^4 + x^4)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{då } x \rightarrow 0.$$



När vi undersöker gränsvärden för $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ och misstänker att gränsvärdet existerar kan det många gånger vara fördelaktigt att övergå till polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$



Vi har då: $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff r \rightarrow 0$.

Hitta en kandidat till gränsvärdet och övergå till polära koordinater.

Exempel 19. Undersök om $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{y^2 + x^2}$ existerar.

Lösning: På linjen $y = 0$ erhålls $f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$, då $x \rightarrow 0$.

Kandidat till gränsvärde är 0. Övergår till polära koordinater:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r^2 \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \\
 |f(x, y) - 0| &= |r^2 \cos^3 \theta \sin \theta - 0| = r^2 |\cos^3 \theta \sin \theta| \\
 &\leq r^2 \cdot 1 = r^2 \longrightarrow 0, \quad \text{då } r \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Då gäller $f(x, y) \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Om man undersöker en gränsovergång $(x, y) \rightarrow (a, b)$ kan vi använda modifierade polära koordinater:

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Då gäller $(x, y) \rightarrow (a, b) \iff r \rightarrow 0$.

Exempel 20. Undersök $f(x, y) = \frac{xy - 2y}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}}$ då $(x, y) \rightarrow (2, 0)$.

Lösning: Längs linjen $y = 0$: $f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$, då $x \rightarrow 2$, kandidat till gränsvärde är 0.

$$f(x, y) = \frac{xy - 2y}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}} = \frac{(x - 2)y}{\sqrt{(x - 2)^2 + y^2}}$$

Övergå till modifierade polära koordinater

$$\begin{cases} x = 2 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2 = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} = r \cos \theta \sin \theta \\
 |f(x, y) - 0| &= |r \cos \theta \sin \theta| \leq r \cdot 1 \rightarrow 0, \quad \text{då } r \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Alltså gäller: $f(x, y) \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (2, 0)$.

Om vi vill underföka en funktions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beteende “långt från origo” kan vi undersöka vad som inträffar då beloppet av argumentet går mot oändligt.

Definition 3. Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har gränsvärdet A då $|\bar{x}| \rightarrow \infty$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$(|\bar{x}| > \omega \text{ och } \bar{x} \in D_f) \implies |f(\bar{x}) - A| < \varepsilon.$$

Exempel 21. Det gäller att $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} \rightarrow 0$, då $|(x, y)| \rightarrow \infty$, ty övergång till polära koordinater ger:

$$\left| \frac{x+y}{1+x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{r+r}{1+r^2} = \frac{2r}{1+r^2} < \frac{2}{r} \rightarrow 0, \text{ då } r \rightarrow \infty.$$

Definition 4. Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har det oegentliga gränsvärdet $\infty(-\infty)$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ om det för varje $k \in \mathbb{R}$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f) \implies f(\bar{x}) > K (< K).$$

Funktionen f har det oegentliga gränsvärdet $\infty(-\infty)$ då $|\bar{x}| \rightarrow \infty$, om det för varje $k \in \mathbb{R}$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$(|\bar{x}| > \omega \text{ och } \bar{x} \in D_f) \implies f(\bar{x}) > K (< K).$$

1.2.1 Räknerregler för Gränsvärden

Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Då definieras funktionerna summa, skillnad, skalärprodukt och vektorprodukt som följer.

Definition 5. Antag att $f : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m}$ och $g : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m}$.

$$\begin{aligned} (f \pm g)(\bar{x}) &:= f(\bar{x}) \pm g(\bar{x}), & D_{f \pm g} &= D_f \cap D_g, \\ (f \cdot g)(\bar{x}) &:= f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}), & D_{f \cdot g} &= D_f \cap D_g, \\ (f \times g)(\bar{x}) &:= f(\bar{x}) \times g(\bar{x}), & D_{f \times g} &= D_f \cap D_g. \end{aligned}$$

För $f : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}}$ och $\bar{g} : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m}$ definieras funktionerna produkt och kvot.

Definition 6. Antag att $f : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}}$ och $\bar{g} : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m}$.

$$\begin{aligned} (f\bar{g})(\bar{x}) &:= f(\bar{x})\bar{g}(\bar{x}), & D_{f\bar{g}} &= D_f \cap D_{\bar{g}}, \\ \left(\frac{\bar{g}}{f}\right)(\bar{x}) &:= \left(\frac{1}{f(\bar{x})}\right)\bar{g}(\bar{x}), & D_{\bar{g}/f} &= D_{\bar{g}} \cap D_f \cap \{\bar{x} : f(\bar{x}) \neq 0\} \end{aligned}$$

Sats 4. Antag att $f, g : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m}$, att $\bar{a} \in \overline{D_f \cap D_g}$ och att $f(\bar{x}) \rightarrow \bar{A}, g(\bar{x}) \rightarrow \bar{B}$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$. Då gäller:

1. $(f \pm g)(\bar{x}) \rightarrow \bar{A} \pm \bar{B}$, då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$,
2. $(f \cdot g)(\bar{x}) \rightarrow \bar{A} \cdot \bar{B}$, då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$,
3. $(f \times g)(\bar{x}) \rightarrow \bar{A} \times \bar{B}$, då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$.

Bevis. 1. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Enligt antaganden finns det $\delta_1 > 0$ och $\delta_2 > 0$ så att

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - \bar{A}| &< \frac{\varepsilon}{2} \text{ för alla } \bar{x} \in D_f \text{ med } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_1, \\ |g(\bar{x}) - \bar{B}| &< \frac{\varepsilon}{2} \text{ för alla } \bar{x} \in D_g \text{ med } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_2. \end{aligned}$$

För alla $\bar{x} \in D_f \cap D_g$ med $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ gäller:

$$\begin{aligned} |(f + g)(\bar{x}) - (\bar{A} + \bar{B})| &= |(f(\bar{x}) - \bar{A}) + (g(\bar{x}) - \bar{B})| \\ &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}| + |g(\bar{x}) - \bar{B}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Därmed gäller $(f + g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} + \bar{B}$, då $\bar{x} \longrightarrow \bar{a}$.

Analogt visas $(f - g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} - \bar{B}$, då $\bar{x} \longrightarrow \bar{a}$.

2. Vi gör först en uppskattning:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot \bar{B}| &= |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot g(\bar{x}) + \bar{A} \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot \bar{B}| \\ &= |(f(\bar{x}) - \bar{A}) \cdot g(\bar{x}) + \bar{A} \cdot (g(\bar{x}) - \bar{B})| \stackrel{\Delta\text{-olikhet}}{\leq} |(f(\bar{x}) - \bar{A}) \cdot g(\bar{x})| + |\bar{A} \cdot (g(\bar{x}) - \bar{B})| \\ &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}| |g(\bar{x})| + |\bar{A}| |g(\bar{x}) - \bar{B}| \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \end{aligned}$$

Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $\delta_3 > 0$: $|g(\bar{x}) - \bar{B}| < 1$ för $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_3$ och $\bar{x} \in D_g$. Då gäller för sådana $\bar{x}$:

$$|g(\bar{x})| = |\bar{B} + (g(\bar{x}) - \bar{B})| \leq |\bar{B}| + |g(\bar{x}) - \bar{B}| < |\bar{B}| + 1.$$

Vi kan välja $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - \bar{A}| &< \frac{\varepsilon}{(1 + |\bar{A}| + |\bar{B}|)}, \text{ då } \bar{x} \in D_f \text{ och } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_1, \\ |g(\bar{x}) - \bar{B}| &< \frac{\varepsilon}{(1 + |\bar{A}| + |\bar{B}|)}, \text{ då } \bar{x} \in D_g \text{ och } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_2. \end{aligned}$$

För $\bar{x} \in D_f \cap D_g$ med $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ gäller:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot \bar{B}| &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}| |g(\bar{x})| + |\bar{A}| |g(\bar{x}) - \bar{B}| \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + |\bar{A}| + |\bar{B}|} (|\bar{B}| + 1 + |\bar{A}|) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Alltså: $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} \cdot \bar{B}$, då $\bar{x} \longrightarrow \bar{a}$.

3. Vi gör en uppskattning:

$$\begin{aligned} |(f \times g)(\bar{x}) - \bar{A} \times \bar{B}| &= |f(\bar{x}) \times g(\bar{x}) - \bar{A} \times g(\bar{x}) + \bar{A} \times g(\bar{x}) - \bar{A} \times \bar{B}| \\ &\leq |(f(\bar{x}) - \bar{A}) \times g(\bar{x})| + |\bar{A} \times (g(\bar{x}) - \bar{B})| \\ &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}| |g(\bar{x})| + |\bar{A}| |g(\bar{x}) - \bar{B}|, \end{aligned}$$

ty vi har för vektorprodukter: $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}||\bar{y}| \overbrace{\sin \theta}^{\leq 1} \leq |\bar{x}||\bar{y}|$.

Därefter fortsätter beviset som i punkt 2.

□

Sats 5. Antag att $f : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ och $\bar{g} : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m} \rightarrow \mathbb{R}$, att $\bar{a} \in \overline{D_f \cap D_g}$ och att $f(\bar{x}) \rightarrow A, \bar{g}(\bar{x}) \rightarrow \bar{B}$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$. Då gäller:

$$4. (f\bar{g})(\bar{x}) \rightarrow A\bar{B},$$

$$5. \frac{1}{f(\bar{x})} \rightarrow \frac{1}{A}, \text{ om } A \neq 0,$$

$$6. \left(\frac{\bar{g}}{f}\right)(\bar{x}) \rightarrow \left(\frac{1}{A}\right)\bar{B}, \text{ om } A \neq 0.$$

Bevis. 4. $|(f\bar{g})(\bar{x}) - A\bar{B}| = |(f(\bar{x}) - A)\bar{g}(\bar{x}) + A(\bar{g}(\bar{x}) - \bar{B})| \leq |f(\bar{x}) - A||\bar{g}(\bar{x})| + |A||\bar{g}(\bar{x}) - \bar{B}|$,
och beviset är sedan analogt med punkt 2, i Sats 4.

$$5. \left| \frac{1}{f(\bar{x})} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|f(\bar{x}) - A|}{|A||f(\bar{x})|}. \text{ Eftersom } f(\bar{x}) \rightarrow A, \text{ då } \bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \exists \delta_1 > 0 : (\bar{x} \in D_f \wedge 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_1) \implies |f(\bar{x}) - A| < \frac{|A|}{2}.$$

$$\text{Då gäller: } |f(\bar{x})| = |A + (f(\bar{x}) - A)| \geq ||A| - |f(\bar{x}) - A|| = |A| - |f(\bar{x}) - A| > \frac{|A|}{2}.$$

$$\text{Tag godtyckligt } \varepsilon > 0. \exists \delta_2 > 0 : (\bar{x} \in D_f \wedge 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_2) \implies |f(\bar{x}) - A| < \frac{|A|^2}{2} \cdot \varepsilon.$$

Om $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ och $\underbrace{\bar{x} \in D_f}_{\bar{x} \in D_{\frac{1}{f}}}$ och $f(\bar{x}) \neq 0$ gäller:

$$\left| \frac{1}{f(\bar{x})} - \frac{1}{A} \right| < \frac{\frac{|A|^2}{2} \cdot \varepsilon}{|A| \cdot \left(\frac{|A|}{2}\right)} = \varepsilon.$$

Alltså: $\frac{1}{f(\bar{x})} \rightarrow \frac{1}{A}$, då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$.

$$6. \text{ Följer ur 4. och 5. då } \left(\frac{\bar{g}}{f}\right)(\bar{x}) = \left(\frac{1}{f(\bar{x})} \cdot \bar{g}(\bar{x})\right).$$

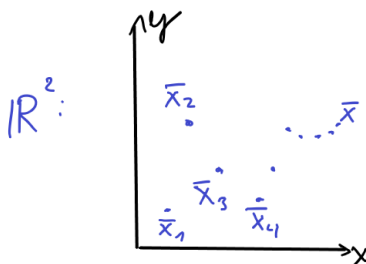
□

1.2.2 Gränsvärden för punktföljder

En funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definierar en punktföljd $(\bar{x}_p)_{p=1}^\infty$ eller $(\bar{x}_p)$ i $\mathbb{R}^n$.

Definition. Om $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : p > N \implies |\bar{x}_p - \bar{x}| < \varepsilon$, säger vi att punktföljden konvergerar mot $\bar{x}$.

Beteckning: $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}_p = \bar{x}$ eller $\bar{x}_p \rightarrow \bar{x}$, då $p \rightarrow \infty$.



Sats. A. $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}_p = \bar{x} \iff \lim_{p \rightarrow \infty} x_p^{(k)} \rightarrow x_k, k = 1, \dots, n$, där $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $\bar{x}_p = (x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)})$.

Bevis. Analogt med beviset till Sats 3. □

Definition. Följden $(\bar{x}_p)_{p=1}^\infty$ är begränsad, om det finns ett $M > 0 : |\bar{x}_p| \leq M$ för $p = 1, 2, \dots$.

Sats. B. (Bolzano-Weierstrass). Varje begränsad punktföljd $(\bar{x}_p)$ i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delföljd.

Bevis. $n = 2$. (Bevisas analogt för $n \geq 3$.) Sätt $\bar{x}_p = (x_p, y_p)$. $(\bar{x}_p)$ begränsad $\implies (x_p)$ och (y_p) begränsade följder i $\mathbb{R}$. ($|x_p| \leq |\bar{x}_p|$ och $|y_p| \leq |\bar{x}_p|$.)

Bolzano-Weierstrass Sats i $\mathbb{R}$ ger att (x_p) har en konvergent delföljd $(x_{p_q})_{q=1}^\infty$.

Delföljden $(y_{p_q})_{q=1}^\infty$ av (y_p) är begränsad. B-W i $\mathbb{R}$ ger att det existerar konvergent delföljd $(y_{p_{q_r}})_{r=1}^\infty$ av (y_{p_q}) .

Betrakta motsvarande delföljd $(x_{p_{q_r}})_{r=1}^\infty$ av (x_{p_q}) .

Denna är konvergent, eftersom (x_{p_q}) är konvergent.

$\therefore (x_{p_{q_r}}, y_{p_{q_r}})_{r=1}^\infty$ är en konvergent delföljd av $(\bar{x}_p)$ enligt Sats A. □

1.2.3 Kontinuerliga Funktioner

Enligt Definition 2 är $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuerlig i $\bar{a} \in D_f$ om $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$, annars är f diskontinuerlig i punkten $\bar{a}$.

Exempel 22. Funktionerna $f(\bar{x}) = \bar{c}$ (=konstant), $g(\bar{x}) = \bar{x}$ och $h(\bar{x}) = |\bar{x}|$ är kontinuerliga.

Bevis. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$.

$$a) |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| = |\bar{c} - \bar{c}| = 0 < \varepsilon, \text{ om } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < 1 =: \delta$$

$$\therefore f(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{a}) \text{ för varje } \bar{a}. \text{ } \underline{f \text{ är kontinuerlig.}}$$

$$b) |g(\bar{x}) - g(\bar{a})| = |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon, \text{ om } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon =: \delta$$

$$\therefore g(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{a}) \text{ för varje } \bar{a}. \text{ } \underline{g \text{ är kontinuerlig.}}$$

$$c) |h(\bar{x}) - h(\bar{a})| = ||\bar{x}| - |\bar{a}|| \leq |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon, \text{ om } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon =: \delta.$$

$$\therefore h(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} h(\bar{a}) \text{ för varje } \bar{a}. \text{ } \underline{h \text{ är kontinuerlig.}}$$

Sats 6. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$, och att $\bar{a} \in D_f$.

Då är f kontinuerlig i $\bar{a}$ om och endast om alla komponentfunktioner $f_1, \dots, f_m$ är kontinuerliga i $\bar{a}$.

Bevis. Påståendet följer direkt ur Sats 3. □

Exempel 23. Låt $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ och $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatfunktionen $f_k(\bar{x}) = x_k$, $k = 1, \dots, n$.

Funktionen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(\bar{x}) = \bar{x}$ är kontinuerlig enligt Exempel 22.

Då $g(\bar{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ger Sats 6 att $f_k(\bar{x}) = x_k$ är kontinuerlig för $k = 1, \dots, n$, så koordinatfunktionerna är kontinuerliga.

Exempel 24. Rätvinklig projektion av rummet på xy -planet, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, är kontinuerlig, enligt Sats 6, eftersom $(x, y, z) \mapsto x$ och $(x, y, z) \mapsto y$ är kontinuerliga enligt Exempel 23.

Sats 7. Antag att $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga i punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Då är även

1) $f \pm g$

2) $f \cdot g$

3) hf

4) $f \times g$ (om $m = 3$)

kontinuerliga i $\bar{a}$. Om $h(\bar{a}) \neq 0$ är $\frac{1}{h}$ och $(\frac{1}{h})f$ kontinuerliga i $\bar{a}$.

Bevis. Följer ur Sats 4 och Sats 5. □

Exempel 25. Alla polynom är kontinuerliga.

Exempelvis: $P(x, y) = xy + x^2 + 5$

$$\left. \begin{array}{ll} q(x, y) = x & \text{kont.} \\ r(x, y) = y & \text{kont.} \\ s(x, y) = 5 & \text{kont.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Sats 7}} p = qr + q^2 + s \quad \text{Kontinuerlig.}$$

Exempel 26. Alla rationella funktioner $\frac{P(\bar{x})}{Q(\bar{x})}$ är kontinuerliga, (i sina definitionsmängder)

Sammansättning av kontinuerliga funktioner ger en kontinuerlig funktion:

Sats 8. Antag att $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och att $\bar{a} \in D_g$ samt $g(\bar{a}) \in D_f$.

Om g är kontinuerlig i $\bar{a}$ och f i punkten $g(\bar{a})$, så är $(f \circ g) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuerlig i $\bar{a}$.

Bevis. Tag $\varepsilon > 0$. Då f är kontinuerlig i $g(\bar{a})$ existerar ett $\delta > 0 : (0 < |g(\bar{x}) - g(\bar{a})| < \delta, g(\bar{x}) \in D_f) \implies |f(g(\bar{x})) - f(g(\bar{a}))| < \varepsilon$.

Då g är kontinuerlig i $\bar{a}$ finns det ett $\delta' > 0$ så att $(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta', \bar{x} \in D_g) \implies |g(\bar{x}) - g(\bar{a})| < \delta$.

Då $D_{f \circ g} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_g \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f\}$ får vi att

$$(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta' \text{ och } \bar{x} \in D_{f \circ g}) \implies (|g(\bar{x}) - g(\bar{a})| < \delta \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f \implies |f(g(\bar{x})) - f(g(\bar{a}))| < \varepsilon,$$

och därmed är $f \circ g$ kontinuerlig i $\bar{a}$. □

Exempel 26. Enligt Exempel 22 är $f(\bar{x}) = |\bar{x}|$ en kontinuerlig funktion från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}$.

Om $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en kontinuerlig funktion så ger Sats 8 att $(f \circ g)(\bar{x}) = f(g(\bar{x})) = |g(\bar{x})|$ är en kontinuerlig funktion.

Exempel 27. $f(x, y) = \cos(xy)$ är en kontinuerlig funktion, ty då $h(x, y) = xy$ och $g(x) = \cos x$ är kontinuerliga, så är

$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y)) = \cos(xy)$$

kontinuerlig.

Sats. C. Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{a} \in D_f$ och att punktföljden $(\bar{x}_p)_{p=1}^\infty$ i D_f konvergerar mot $\bar{a}$.

Då gäller: $\lim_{p \rightarrow \infty} f(\bar{x}_p) = f(\bar{a})$.

Bevis. Tag $\varepsilon > 0$. Då f är kontinuerlig i a gäller:

$$\exists \delta > 0 : (0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f) \implies |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon.$$

Vidare då $\bar{x}_p \rightarrow \bar{a}$ då $p \rightarrow \infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : p > N \implies |\bar{x}_p - \bar{a}| < \delta.$$

Alltså:

$$\exists N \in \mathbb{N} : p > N \implies (|\bar{x}_p - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x}_p \in D_f) \implies |f(\bar{x}_p) - f(\bar{a})| < \varepsilon.$$

Men detta betyder att $\lim_{p \rightarrow \infty} f(\bar{x}_p) = f(\bar{a})$. □

1.2.4 Värdeomängden till en kontinuerlig funktion

Definition 7. En mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad om $\exists M > 0 : A \subseteq O_M(\bar{0})$, dvs. om $|\bar{x}| \leq M, \forall \bar{x} \in A$. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Då är f begränsad om värdeomängden $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in D_f\}$ är begränsad. Funktionen f är begränsad på mängden $B \subseteq D_f$, om mängden $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\}$ är begränsad.

En mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt om den är sluten och begränsad.

Exempel 28. Funktionen $f(x, y) = \sin(xy)$ är begränsad ($M = 1$), medan $g(x, y) = x^2 + y^2$ är obegränsad. På mängden $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ är g begränsad ($M = 1$).

Sats 9. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig på en kompakt mängd $B \in D_f$.

Då är f begränsad på B .

Bevis. Antites: f är inte begränsad på B .

Då gäller för alla $M > 0$ att $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\} \cap \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m : |\bar{y}| > M\} \neq \emptyset$.

Då kan vi konstruera en punktföljd $(x_p)_{p=1}^\infty$ i B :

$$M = 1 : \text{Tag } \bar{x}_1 \in B \quad \text{så att } |f(\bar{x}_1)| \geq 1,$$

$$M = 2 : \text{Tag } \bar{x}_2 \in B \quad \text{så att } |f(\bar{x}_2)| \geq 2,$$

$$\vdots$$

$$M = p : \text{Tag } \bar{x}_p \in B \quad \text{så att } |f(\bar{x}_p)| \geq p,$$

$$\vdots$$

Då B är kompakt är mängden begränsad, vilket innebär att punktföljden $(\bar{x}_p)_{p=1}^\infty$ är begränsad.

Då get Sats B (Bolzano-Weierstrass) att vi kan utplocka en konvergent delföljd $(\bar{x}_{p_q})_{q=1}^\infty$ ur $(\bar{x}_p)$,

med $\bar{x} = \lim_{q \rightarrow \infty} \bar{x}_{p_q}$.

Varje omgivning $O_\delta(\bar{x})$ av $\bar{x}$ innehåller punkter ut B , (åtminstone $\bar{x}_{p_q}$ för stora q), så $\bar{x} \in B \cup \partial B = B$ då B är sluten. (B kompakt).

Då f är kontinuerlig i B och därmed i $\bar{x}$, ger Sats C att $\lim_{q \rightarrow \infty} f(\bar{x}_{p_q}) = f(\bar{x})$. I Exempel 22 visade vi att $h(\bar{x}) = |\bar{x}|$ är kontinuerlig. Då sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga, Sats 8, gäller det att:

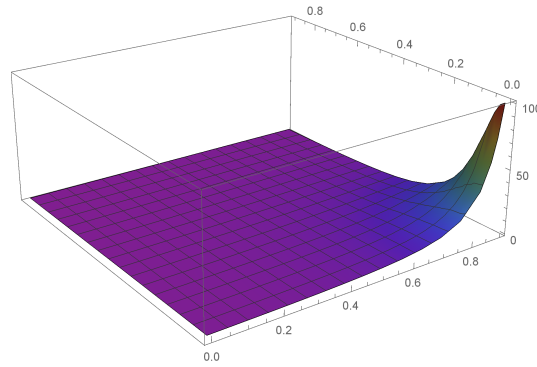
$$\lim_{q \rightarrow \infty} |f(\bar{x}_{p_q})| = \lim_{q \rightarrow \infty} f(\bar{x}_{p_q}) = |f(\bar{x})| < \infty,$$

ty $\bar{x} \in B \subseteq D_f$, men vår konstruktion av $(\bar{x}_p)$ ger att $|f(\bar{x}_{p_q})| \rightarrow \infty$, då $q \rightarrow \infty$, en motsägelse.
Antitesen falsk och f begränsad på B . $\square$

Anmärkning. 1. Satsen gäller inte om B inte är sluten.

$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \setminus \{(1, 0)\}$ är en begränsad men inte sluten mängd.

$f(x, y) = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$ kontinuerlig men inte begränsad på B .



2. Identiska avbildningen $f(x, y) = (x, y)$ är kontinuerlig men inte begränsad på $B = \mathbb{R}^2$, som är en sluten men obegränsad mängd.

($B = \mathbb{R}^2$ sluten, ty $\partial B = \emptyset$ så $B = B \cup \partial B = \bar{B}$).

Definition 8. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $B \subseteq D_f$. Med $f(B)$ avses talmängden $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\}$. Om $f(B)$ är uppåt begränsad existerar supremum av $f(B)$ och vi definierar:

$$\sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) := \sup f(B) = \text{det minsta tal som är större än eller lika med varje tal i } f(B).$$

Om $f(B)$ är nedåt begränsad existerar infimum av $f(B)$ och vi definierar:

$$\inf_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) := \inf f(B) = \text{det största tal som är mindre än eller lika med varje tal i } f(B).$$

Om $\sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$ för någon punkt $\bar{a} \in B$, kallas $f(\bar{a})$ för f :s största värde på B .

Om $\inf_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) = f(\bar{b})$ för någon punkt $\bar{b} \in B$, kallas $f(\bar{b})$ för f :s minsta värde på B .

Anmärkning. Om $B = D_f$ brukar man hänvisa till f :s supremum, infimum, största värde och minsta värde.

Sats 10. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på $B \subseteq D_f$ och antag att B är en kompakt mängd. Då gäller:

1. $\exists \bar{a} \in B : f(\bar{a}) = \sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x})$,
2. $\exists \bar{b} \in B : f(\bar{b}) = \inf_{\bar{x} \in B} f(\bar{x})$.

Bevis. 1. Enligt Sats 9 är $f(B)$ en begränsad mängd. Då existerar $S = \sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x})$.

Antites: $\forall \bar{x} \in B : f(\bar{x}) < S$.

Sätt: $g(\bar{x}) = \frac{1}{S - f(\bar{x})}$. Då är g definierad och kontinuerlig i hela B . Då B är kompakt ger Sats 9 att g är begränsad på B :

$$\exists M > 0 \forall \bar{x} \in B : \frac{1}{S - f(\bar{x})} < M.$$

Därmed erhålls följande implikationer:

$$S - f(\bar{x}) > \frac{1}{M} \implies f(\bar{x}) < S - \frac{1}{M} \implies S = \sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) \leq S - \frac{1}{M}$$

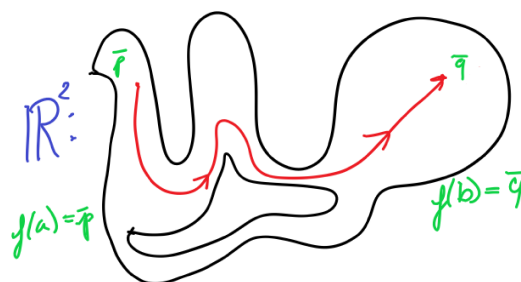
och därmed är antitesen falsk.

Det finns en punkt $\bar{a} \in B : f(\bar{a}) = S$.

2. Tillämpa 1. på $-f$.

□

Definition 9. Mängden $B \subseteq \mathbb{R}^n$ är sammanhängande om det för varje par av vektorer $\bar{p}, \bar{q} \in B$ finns en kontinuerlig kurva i B mellan $\bar{p}$ och $\bar{q}$, dvs. en kontinuerlig funktion $f : [a, b] \rightarrow B$ så att $f(a) = \bar{p}$ och $f(b) = \bar{q}$.



Sats 11. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på den kompakta och sammanhängande mängden B . Då är $f(B) = \{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\}$ ett slutet begränsat intervall.

Bevis. Sats 10 ger att det existerar $\bar{a}, \bar{b} \in B$:

$$f(\bar{a}) = \sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) = M \text{ och } f(\bar{b}) = \inf_{\bar{x} \in B} f(\bar{x}) = m.$$

Då B är sammanhängande finns en kontinuerlig avbildning $r : [a, b] \rightarrow B$ så att $r(a) = \bar{a}$ och $r(b) = \bar{b}$.

Avbildningen $(f \circ r) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, då r och f är kontinuerliga, Sats 8.

Då $f \circ r$ är en reellvärd kontinuerlig funktion på ett ändligt slutet intervall $[a, b]$ antar den alla värden mellan $(f \circ r)(a)$ och $(f \circ r)(b)$.

$$(f \circ r)(a) = f(r(a)) = f(\bar{a}) = M,$$

$$(f \circ r)(b) = f(r(b)) = f(\bar{b}) = m.$$

Men då gäller det att $f(B) = [m, M]$. □

1.2.5 Likformig Kontinuitet

En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerliga i punkten $\bar{x}_0 \in D_f$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (0 < |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta, \bar{x} \in D_f) \implies |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon.$$

Här beror δ av både ε och punkten $\bar{x}_0$, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

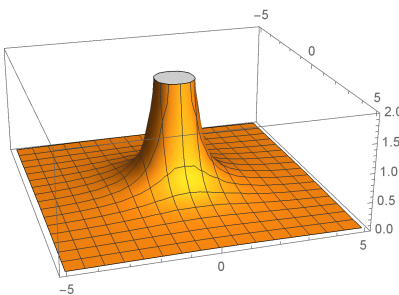
Väljer vi med samma ε en ny punkt $\bar{x}_1$ där f är kontinuerlig måste vi eventuellt välja ett mindre δ i kontinuitetsdefinitionen.

Om det för ett givet $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ som duger för varje kontinuitetspunkt $\bar{x}_0$, så är f likformigt kontinuerlig.

Definition 10. Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är likformigt kontinuerlig på $B \subseteq D_f$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (0 < |\bar{x} - \bar{y}| < \delta \text{ och } \bar{x}, \bar{y} \in B) \implies |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon.$$

Exempel 29. Funktionen $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ är inte likformigt kontinuerlig på $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.



Visar: $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \bar{x}, \bar{y} \in D_f : (|\bar{x} - \bar{y}| < \delta \text{ och } |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon).$

Välj: $\varepsilon = 1$. Tag godtyckligt $\delta > 0$.

Välj: $\bar{x} = (x, 0), \bar{y} = (x + \frac{\delta}{2}, 0), 0 < x \leq 1$.

Då är $|\bar{x} - \bar{y}| = |(-\frac{\delta}{2}, 0)| = \frac{\delta}{2} < \delta$.

$$\begin{aligned} \left| f(x, 0) - f\left(x + \frac{\delta}{2}, 0\right) \right| &= \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right| = \left| \frac{x^2 + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - x^2}{x^2 \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right| \\ &\geq \frac{\delta x}{x^2 \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\delta}{x \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2} \geq \frac{\delta}{x \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \geq 1, \text{ om } x \leq \frac{\delta}{\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

$\therefore \exists \varepsilon = 1 \forall \delta > 0 \exists \bar{x} = (x, 0), \bar{y} = (x + \frac{\delta}{2}, 0), x \leq \min\left(1, \frac{\delta}{\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2}\right) :$

$$|\bar{x} - \bar{y}| < \delta \text{ och } |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq 1.$$

$\therefore f$ är inte likformigt kontinuerlig i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Sats 12. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig på den kompakta mängden $B \subseteq D_f$.

Då är f likformigt kontinuerlig på B .

Bevis. Antites: f är ej likformigt kontinuerlig på B .

Då $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \in \{\frac{1}{p} : p \in \mathbb{N}\} \exists \bar{x}_p, \bar{y}_p \in B : (|\bar{x}_p - \bar{y}_p| < \frac{1}{p} \text{ och } |f(\bar{x}_p) - f(\bar{y}_p)| \geq \varepsilon)$.

B kompakt $\implies$ följderna $(\bar{x}_p)$ är begränsad. $\implies \exists$ konvergent delföljd $(\bar{x}_{p_q})$ av $(\bar{x}_p)$, (Sats B).

Sätt $\bar{x} = \lim_{q \rightarrow \infty} \bar{x}_{p_q}$. Varje omgivning av $\bar{x}$ innehåller punkter ur $(\bar{x}_{p_q}) \implies \bar{x} \in B \cup \partial B = B$, då B är sluten.

Låt $(\bar{y}_{p_q})$ vara motsvarande delföljd av $(\bar{y}_p)$.

$$|\bar{y}_{p_q} - \bar{x}| \leq \underbrace{|\bar{y}_{p_q} - \bar{x}_{p_q}|}_{< \frac{1}{p_q} \rightarrow 0, \text{ då } q \rightarrow \infty} + \underbrace{|\bar{x}_{p_q} - \bar{x}|}_{\rightarrow 0, \text{ då } q \rightarrow \infty}.$$

Alltså $|\bar{y}_{p_q} - \bar{x}| \rightarrow 0$, då $q \rightarrow \infty$, så $\lim_{q \rightarrow \infty} \bar{y}_{p_q} = \bar{x}$.

f är kontinuerlig: $f(\bar{x}) = \lim_{q \rightarrow \infty} f(\bar{x}_{p_q}) = \lim_{q \rightarrow \infty} f(\bar{y}_{p_q})$

Men då erhålls:

$$\varepsilon \leq |f(\bar{x}_{p_q}) - f(\bar{y}_{p_q})| \leq \underbrace{|f(\bar{x}_{p_q}) - f(\bar{x})|}_{\rightarrow 0, \text{ då } q \rightarrow \infty} + \underbrace{|f(\bar{x}) - f(\bar{y}_{p_q})|}_{\rightarrow 0, \text{ då } q \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Detta ger en motsägelse. Antitesen är falsk och f är likformigt kontinuerlig på B . □

1.3 Analys av Rymdkurvor

En avbildning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, m \geq 2$, definierar en rymdkurva. (En plan kurva då $m = 2$, en kurva i rummet då $m = 3$). Funktionen f har m reellvärda komponentfunktioner $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$. Sats 3 ger att om $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ existerar, så kan det beräknas komponentvis:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_m(t) \right).$$

Definition 11. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara definierad i en omgivning av punkten $t_0 \in D_f$.

Att f är deriverbar i t_0 betyder att gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0))$$

existerar. Gränsvärdet kallas derivatan av f i t_0 .

Beteckning: $f'(t_0)$. Höger- och vänsterderivatan $f'_+(t_0)$ resp. $f'_-(t_0)$ definieras analogt ($t \rightarrow t_0^+, t \rightarrow t_0^-$).

Anmärkning. 1. Vid existens av derivata ger Sats 3

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_m(t) - f_m(t_0)}{t - t_0} \right),$$

Alltså: $f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0))$ och f är deriverbar i $t_0 \iff f_1, \dots, f_m$ är deriverbara i t_0 . Om $f(t)$ är deriverbar i olika punkter t , ger derivatans värden i dessa punkter en ny funktion

$$f' = \frac{df}{dt} : t \in f'(t),$$

vilken i sin tur kan ha en derivata $f''(t)$ osv.

2. Funktionen $F(t) = (F_1(t), \dots, F_m(t))$ kallas en primitiv funktion till $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, om $F'(t) = f(t)$, vilket är ekvivalent med att $F'_1(t) = f_1(t), \dots, F'_m(t) = f_m(t)$. Mängden av

primitiver kan betecknas $\int f(t) \, dt$ och beräknas komponentvis:

$$\int f(t) \, dt = \left(\int f_1(t) \, dt, \dots, \int f_m(t) \, dt \right).$$

Definition 12. Antag att $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ och att $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar på intervallet $[a, b]$. Då definieras integralen av $f(t)$ över $[a, b]$ genom

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left(\int_a^b f_1(t) \, dt, \dots, \int_a^b f_m(t) \, dt \right).$$

Därmed är integration av $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ återförd på integration av komponentfunktioner $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exempel 30. Integralen av $f(t) = (e^t, t^3, \cos t)$ över intervallet $[0, 1]$ ges av

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \, dt &= \left(\int_0^1 e^t \, dt, \int_0^1 t^3 \, dt, \int_0^1 \cos t \, dt \right) \\ &= \left([e^t]_0^1, \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1, [\sin t]_0^1 \right) \\ &= \left(e - 1, \frac{1}{4}, \sin 1 \right). \end{aligned}$$

Exempel 31. (Kedjeregeln). Antag att $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i t_0 och att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ är deriverbar i $g(t_0)$. Då har den sammansatta funktionen $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ derivatan $g'(t_0)f'(g(t_0))$, ty

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t_0) &= ((f_1 \circ g)'(t_0), \dots, (f_m \circ g)'(t_0)) \\ &= (g'(t_0)f'_1(g(t_0)), \dots, g'(t_0)f'_m(g(t_0))) \\ &= g'(t_0)(f'_1(g(t_0)), \dots, f'_m(g(t_0))) \\ &= \underline{g'(t_0)f'(g(t_0))}. \end{aligned}$$

Sats 13. Antag att $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbara i punkten t_0 . ($t_0 \in D_f^\circ \cap D_g^\circ$ och $t_0 \in D_h^\circ$). Då är funktionerna $f \pm g$, $f \cdot g$, hf och $f \times g$, ($m = 3$) deriverbara i t_0 , och

$$1. (f \pm g)'(t_0) = f'(t_0) \pm g'(t_0),$$

2. $(hf)'(t_0) = h'(t_0)f(t_0) + h(t_0)f'(t_0),$
3. $(f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0),$
4. $(f \times g)'(t_0) = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0), \quad m = 3$

Bevis. 1. och 2. bevisas enkelt "komponentvis" genom att utnyttja motsvarande deriveringsregler för avbildningar från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

$$3. (f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t) = \sum_{k=1}^m f_k(t)g_k(t)$$

Derivering ger:

$$\begin{aligned} \underline{(f \cdot g)'(t_0)} &= \sum_{k=1}^m (f'_k(t_0)g_k(t_0) + f_k(t_0)g'_k(t_0)) \\ &= \sum_{k=1}^m f'_k(t_0)g_k(t_0) + \sum_{k=1}^m f_k(t_0)g'_k(t_0) \\ &= \underline{f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0)}. \end{aligned}$$

$$4. \underline{(f \times g)(t)} = \underline{(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t), f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t), f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t))}$$

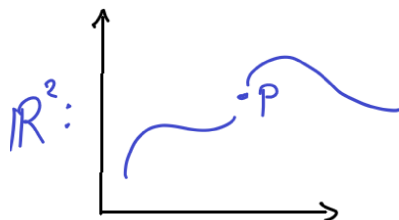
Derivering komponentvis ger:

$$\begin{aligned} \underline{(f \times g)'(t_0)} &= (f'_2(t_0)g_3(t_0) + f_2(t_0)g'_3(t_0) - f'_3(t_0)g_2(t_0) - f_3(t_0)g'_2(t_0), \\ &\quad f'_3(t_0)g_1(t_0) + f_3(t_0)g'_1(t_0) - f'_1(t_0)g_3(t_0) - f_1(t_0)g'_3(t_0), \\ &\quad f'_1(t_0)g_2(t_0) + f_1(t_0)g'_2(t_0) - f'_2(t_0)g_1(t_0) - f_2(t_0)g'_1(t_0)) \\ &= (f'_2(t_0)g_3(t_0) - f'_3(t_0)g_2(t_0), f'_3(t_0)g_1(t_0) - f'_1(t_0)g_3(t_0), \\ &\quad f'_1(t_0)g_2(t_0) - f'_2(t_0)g_1(t_0)) \\ &\quad + (f_2(t_0)g'_3(t_0) - f_3(t_0)g'_2(t_0), f_3(t_0)g'_1(t_0) - f_1(t_0)g'_3(t_0), \\ &\quad f_1(t_0)g'_2(t_0) - f_2(t_0)g'_1(t_0)) \\ &= \underline{f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)}. \end{aligned}$$

□

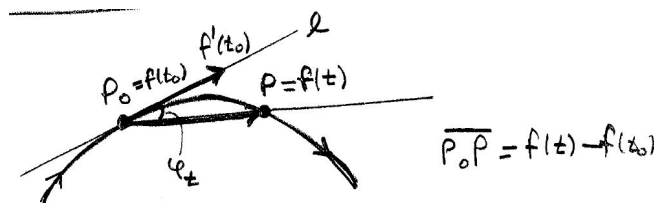
1.3.1 Tangenter till Rymdkurvor

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiera en rymdkurva. Om det finns en punkt P på kurvan sådan att det existerar en omgivning $O_\delta(P)$ som saknar andra punkter på kurvan, så är P en isolerad punkt för kurvan.



Exempelvis urartar $f(t) = (1, 0)$ till en enda punkt i $\mathbb{R}^2$ (f konstant). För isolerade punkter definierar vi inte begreppet tangent.

Låt P_0 vara en icke-isolerad punkt på kurvan $r = f(t)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Antag att $P_0 = f(t_0)$ och att $f'(t_0)$ existerar och $f'(t_0) \neq \bar{0}$.



Definition 13. l är en tangent till kurvan $r = f(t)$ i punkten P_0 om $\varphi_t \rightarrow 0$, då $t \rightarrow t_0$.

För $t > t_0$:

$$\cos \varphi_t = \frac{f'(t_0) \cdot (f(t) - f(t_0))}{|f'(t_0)| |f(t) - f(t_0)|} = \frac{f'(t_0) \cdot \overbrace{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}^{\rightarrow f'(t_0)}}{\underbrace{|f'(t_0)| \left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right|}_{\rightarrow f'(t_0)}} \rightarrow 1, \text{ då } t \rightarrow t_0^+$$

För $t < t_0$ fås analogt $\cos \varphi_t \rightarrow 1$, då $t \rightarrow t_0^-$. Alltså har vi att $\cos \varphi_t \rightarrow 1$ då $t \rightarrow t_0$, vilket ger att $\varphi_t \rightarrow 0$. Vi har då bevisat följande resultat.

Sats 14. Om funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ är deriverbar i punkten t_0 med $f'(t_0) \neq \bar{0}$, så har kurvan $r = f(t)$ i punkten $P_0 = f(t_0)$ en tangent med samma riktning som vektorn $f'(t_0)$.

Tangentens ekvation erhålls med punkten $P_0 = f(t_0)$ och riktningsvektorn $f'(t_0)$ i parameter form:

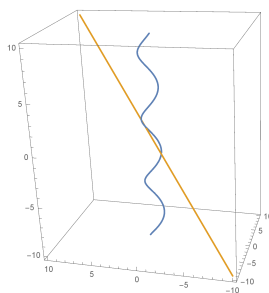
$$x(u) = f(t_0) + u f'(t_0), u \in \mathbb{R},$$

och i komponentform (i fallet $m = 3$):

$$\begin{cases} x_1(u) = f_1(t_0) + u f'_1(t_0), \\ x_2(u) = f_2(t_0) + u f'_2(t_0), \\ x_3(u) = f_3(t_0) + u f'_3(t_0), \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Exempel 32. Skruvlinjen $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ har riktningsvektor $f'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0, 1)$ och tan-

genten har parameterframställningen: $\begin{cases} x = \cos t_0 + u(-\sin t_0) \\ y = \sin t_0 + u \cos t_0 \\ z = t_0 + u. \end{cases}$ Tangentens skärningspunkt med xy -planet fås för $u = -t_0$.



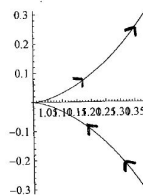
$$\underline{t_0 = 2}$$

Definition 14. Punkten $P_0 = f(t_0)$ är en singulär punkt på kurvan $r = f(t)$ om $f'(t_0) = \bar{0}$.

Exempel 33. Betrakta den plana kurvan $r = (x(t), y(t))$,

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

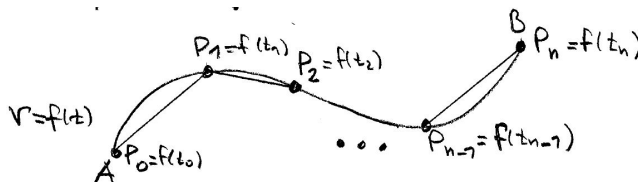
$$\begin{cases} x'(t) = t \cos t \\ y'(t) = t \sin t \end{cases}$$



$t = 0$ ger $(1, 0)$ som singulär punkt, en spets. Kurvan har x -axeln som tangent i $(1, 0)$.

1.3.2 Båglängden av en Rymdkurva

Betrakta kurvan $r = f(t)$ på ett parameterintervall $t \in [a, b]$. Vi inskriver ett polygondrag $P_0P_1 \dots P_n$ sammansatt av sträckorna $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$, där $P_0 = f(t_0) = f(a), P_1 = f(t_1), \dots, P_n = f(t_n) = f(b)$ och $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.



Definition 15. Båglängden av kurvan mellan A och B är $S = \sup \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|$, där $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, och supremum tas för alla inskrivna polygondrag mellan A och B .

Sats 15. Kurvbågen $r = f(t)$, $a \leq t \leq b$, har båglängden

$$S = \int_a^b |f'(t)| \, dt,$$

förutsatt att derivatan är kontinuerlig på $[a, b]$.

Bevis. För $k = 1, \dots, n$ gäller

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = (f_1(t_k) - f_1(t_{k-1}), \dots, f_m(t_k) - f_m(t_{k-1})),$$

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})|^2.$$

Med stöd av medelvärdessatsen gäller

$$|f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| = \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\Delta t_k} |f'_i(\alpha_{ik})|,$$

där $\alpha_{ik} \in]t_{k-1}, t_k[$. Då erhålls:

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| = \underbrace{\Delta t_k \left(\sum_{i=1}^m f'_i(\alpha_{ik})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=:g(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk})}.$$

Längden av polygondraget blir:

$$l = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \Delta t_k \cdot g(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}).$$

Å andra sidan gäller:

$$I = \int_a^b |f'(t)| dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f'(t)| dt$$

med stöd av integralkalkylens medelvärdessats.

$$= \sum_{k=1}^n \Delta t_k |f'(\tau_k)| = \sum_{k=1}^n \Delta t_k g(\tau_k, \dots, \tau_k), \tau_k \in]t_{k-1}, t_k[.$$

Då har vi:

$$|l - I| \leq \sum_{k=1}^n |\Delta t_k| |g(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}) - g(\tau_k, \dots, \tau_k)|$$

Funktionen g är kontinuerlig på mängden $M = \{(x_1, \dots, x_m) : a \leq x_j \leq b, j = 1, \dots, m\}$, som är en kompakt mängd i $\mathbb{R}^m$. Då ger Sats 12 att g är likformigt kontinuerlig på M .

Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. För en tillräckligt fin indelning av $[a, b]$ existerar ett $\delta > 0$ så att

$$|(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}) - (\tau_k, \dots, \tau_k)| < \delta \implies |g(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}) - g(\tau_k, \dots, \tau_k)| < \varepsilon.$$

För en tillräckligt fin indelning gäller då:

$$|l - I| \leq \sum_{k=1}^n |\Delta t_k| \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^n |\Delta t_k| = \varepsilon \cdot (b - a).$$

Detta ger att

$$I - \varepsilon(b - a) < l < I + \varepsilon(b - a),$$

för tillräckligt fin indelning, alltså att

$$I - \varepsilon(b - a) < l \leq I,$$

ty finare indelning ger större l . Detta ger att

$$I = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right\},$$

där supremet tas för alla inskrivna polygondrag.

Då är $I = S$. □

För en kurva $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ erhålls formeln:

$$S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt,$$

för en plan kurva $r(t) = (x(t), y(t))$ gäller formeln:

$$S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

och speciellt för $y = f(x)$ på $[a, b]$ med parametriseringen $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ gäller formeln:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

1.4 Differentialkalkyl för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Partiella derivator

Vid undersökning av en funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ av n variabler kan man undersöka hur varje variabel påverkar funktionen då de övriga hålls som fixa konstanter. Vi betraktar n olika funktioner av en variabel:

$$x_j \frown f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Derivatan är det viktigaste hjälpmedlet för att studera det lokala beteendet hos en funktion av en variabel.

Definition 16. Låt $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vara en inre punkt i definitionsmängden D_f till $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existerar, så säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på variabeln x_j i punkten $\bar{a}$. Gränsvärdet kallas den partiella derivatan med avseende på x_j av f i punkten $\bar{a}$.

Beteckningar: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a})$, $f'_{x_j}(\bar{a})$, $f'_j(\bar{a})$.

För en partiellt deriverbar funktion f utgör

$$\bar{x} \leadsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}), \quad j = 1, \dots, n,$$

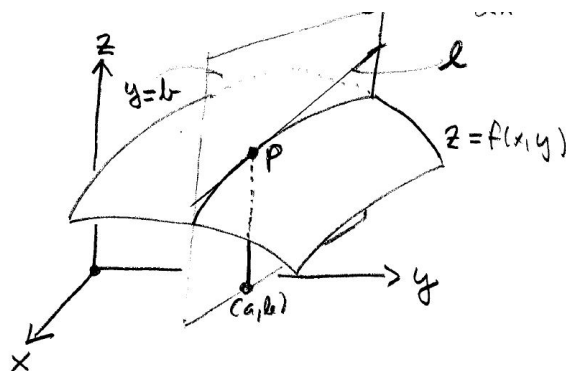
nya funktioner som betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, f'_{x_j} eller f'_j .

Om alla partiella derivator $f'_{x_j}(\bar{a})$, $j = 1, \dots, n$, existerar sägs f vara partiellt deriverbar i punkten $\bar{a}$. Vi säger att f är partiellt deriverbar om den är partiellt deriverbar i varje punkt i D_f .

Om $z = f(x, y)$ är partiellt deriverbar i (a, b) :

$$\begin{cases} z'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \\ z'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \end{cases}$$

Den geometriska tolkningen av $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$:



$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ kan tolkas som riktningskoefficienten för tangenten l som går igenom $P = f(a, b)$ och ligger i planet $y = b$, dvs. riktningskoefficienten till tangenten för $z = f(x, b)$ i punkten $x = a$.

Vid beräkning av partiella derivator till $f(x_1, \dots, x_n)$ betraktar man i tur och ordning alla utom en variabel som konstanter och deriverar med avseende på variabeln enligt regler från envariabelanalysen.

Exempel 34. För polynomet $f(x, y, z) = x^2y - zy + z^2x$ har vi

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 2xy + z^2 \\ f'_y(x, y, z) = x^2 - z \\ f'_z(x, y, z) = -y + 2zx. \end{cases}$$

f'_x och f'_y kallas partiella derivator av första ordningen. Om de i sin tur kan deriveras partiellt erhålls partiella derivator av andra ordningen, dessa betecknas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \end{aligned}$$

Observera ordningsföljden i de blandade fallen, exempelvis $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = (f'(f'_x))'_y$.

Partiella derivator av högre ordning definieras analogt, exempelvis:

$$f'''_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z} f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}.$$

Exempel 35. För $f(x, y, z)$ i Exempel 34 erhålls $f'_x = 2xy + z^2$, $f'_y = x^2 - z$, $f'_z = -y + 2zx$. Då är:

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2y, & f''_{xy} = 2x, & f''_{xz} = 2z, \\ f''_{yx} = 2x, & f''_{yy} = 0, & f''_{yz} = -1, \\ f''_{zx} = 2z, & f''_{zy} = -1, & f''_{zz} = 2x. \end{cases}$$

(Observera att $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f''_{xz} = f''_{zx}$, $f''_{yz} = f''_{zy}$.)

Definition 17. Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är r gånger deriverbar i $\bar{a}$, om $f^{(s)}_{k_1 k_2 \dots k_s}(\bar{a})$ existerar för varje $s \leq r$ och varje kombination $k_1 k_2 \dots k_s$ ur $\{x_1, \dots, x_n\}$.

f är r gånger kontinuerligt deriverbar i $\bar{a}$ om $f^{(s)}_{k_1 k_2 \dots k_s}(\bar{x})$ existerar i en omgivning av $\bar{a}$ för alla $s \leq r$ och alla dessa derivator är kontinuerliga i $\bar{a}$.

Definition 18. En partiell differentialekvation (PDE) (i två variabler) av 1:a ordningen är av formen

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

och av 2:a ordningen:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Exempel 36. Låt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Om vi definierar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$z = f(x, y) = g(xy),$$

så är f en lösning till den partiella differential ekvationen

$$x \cdot z'_x - y \cdot z'_y = 0$$

$$\text{ty } \begin{cases} z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}g(xy) = yg'(xy), \\ z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}g(xy) = xg'(xy), \end{cases}$$

ger att

$$x \cdot z'_x - y \cdot z'_y = xyg'(xy) - yxg'(xy) = 0.$$

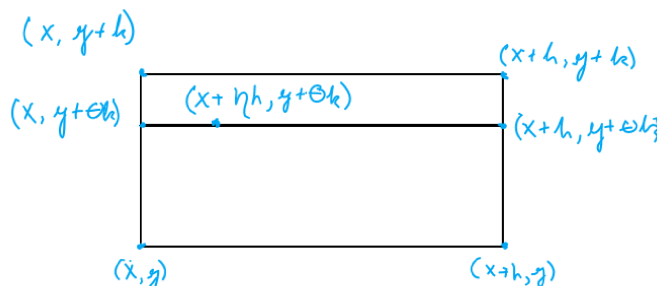
Sats 16. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är 2 gånger kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in D_f$. (Partiella derivatorna av ordning 1 och 2 existerar i en omgivning av $\bar{a}$ och är kontinuerliga i $\bar{a}$). Då gäller:

$$f''_{jk} = f''_{kj}, \quad j, k \in \{1, \dots, n\}$$

Bevis. Påståendet i satsen gäller två variabler i gången, så vi kan anta att $n = 2$, och visa att $f''_{xy} = f''_{yx}$ för $f(x, y)$.

Låt (x, y) vara en fix punkt i D_f och betrakta uttrycket:

$$q(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)$$



Sätt: $\varphi(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$, $\psi(s) = f(s, y + k) - f(s, y)$.

Vi har: $q(h, k) = \varphi(y + k) - \varphi(y)$ och $q(h, k) = \psi(x + h) - \psi(x)$,

samt $\varphi'(t) = f'_y(x + h, t) - f'_y(x, t)$. Medelvärdessatsen ger:

$$\begin{aligned} q(h, k) &= \varphi(y + k) - \varphi(y) = k\varphi'(y + \theta k) \\ &= k(f'_y(x + h, y + \theta k) - f'_y(x, y + \theta k)), 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Medelvärdessatsen en gång till ger att $\exists \eta : 0 < \eta < 1$ och

$$q(h, k) = hk f''_{yx}(x + \eta h, y + \theta k).$$

Kontinuiteten för f''_{yx} i (x, y) ger

$$\frac{q(h, k)}{hk} = f''_{yx}(x + \eta h, y + \theta k) \longrightarrow f''_{yx}(x, y), \text{ då } (h, k) \longrightarrow (0, 0).$$

Genom att analogt behandla $q(h, k) = \psi(x + h) - \psi(x)$ får vi att

$$\frac{q(h, k)}{hk} \longrightarrow f''_{xy}(x, y), \text{ då } (h, k) \longrightarrow (0, 0).$$

Alltså gäller $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

□

Anmärkning. En motsvarande Sats för partiella derivator av högre ordning gäller, förutsatt att de partiella derivatorna är tillräckligt många gånger kontinuerligt deriverbara i $\bar{a}$.

Exempel 37. Definiera

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{och} \quad f(0, 0) = 0.$$

Då är f kontinuerlig i $(0, 0)$ (polära koordinater)-

$$\begin{cases} f'_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \dots = -y, \\ f'_y(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \dots = x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, h) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1 \\ f''_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h, 0) - f'_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 \end{cases}$$

$f''_{xy} \neq f''_{yx}$ i $(0, 0)$. Då $(x, y) \neq (0, 0)$ ges f''_{xy} av

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3},$$

som inte är kontinuerlig i $(0, 0)$.

Exempel 38. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{då } x = 0 \text{ eller } y = 0, \\ 1, & \text{annars} \end{cases}$$

Då är f diskontinuerlig i $(0, 0)$, men

$$\begin{cases} f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \\ f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \end{cases}$$

så partiella derivatorna existerar i $(0, 0)$.

1.4.1 Differentierbarhet

För funktioner $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gäller att deriverbarhet i en punkt medför kontinuitet. Exempel 38 demonstrerar att partiell deriverbarhet inte medför kontinuitet. Vi skall införa ett nytt begrepp, differentierbarhet, som medför kontinuitet.

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i $x = a$ gäller

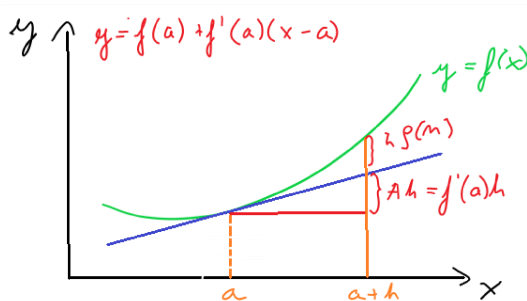
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A (= f'(a)),$$

vilket kan uttryckas med funktionen $\rho(h)$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \rho(h), \quad \rho(h) \rightarrow 0, \text{ då } h \rightarrow 0,$$

eller ekvivalent

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h\rho(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0. \quad (\star)$$



Formulering $(\star)$ av deriverbarhetskravet kan generaliseras till högre dimensioner.

Definition 19. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning av punkten $\bar{a}$. Vi säger att f är differentierbar i punkten $\bar{a}$ om det finns konstanter $A_1, \dots, A_n$ och en funktion $\rho(\bar{h}), \bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$, sådana att

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |\bar{h}| \rho(\bar{h}) \text{ och } \lim_{\bar{h} \rightarrow \bar{0}} \rho(\bar{h}) = 0. \quad (1)$$

Om f är differentierbar i varje punkt $\bar{a} \in D_f$ säger vi att f är differentierbar.

Sats 17. Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $\bar{a}$, så är f kontinuerlig i $\bar{a}$.

Bevis. Ur (1) följer att $f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \rightarrow 0$ då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$, vilket innebär att f är kontinuerlig i $\bar{a}$. $\square$

Sats 18. Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $\bar{a}$, så är f partiellt deriverbar i $\bar{a}$ med

$$f'_{x_j}(\bar{a}) = A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

där $A_1, \dots, A_n$ är talen i (1).

Bevis. Välj i (1) speciellt $\bar{h} = t \cdot \bar{e}_j = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$, $t \neq 0$, efter division med t i (1) erhålls

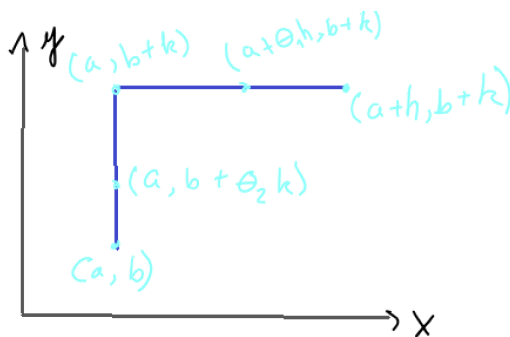
$$\frac{f(\bar{a} + t \cdot \bar{e}_j) - f(\bar{a})}{t} = A_j + \frac{|t|}{t} \rho(t \bar{e}_j) \rightarrow A_j, \text{ då } t \rightarrow 0.$$

Definitionen på partiell derivata ger att $f'_{x_j}(\bar{a}) = A_j$. $\square$

Det är svårt att i praktiken med Definition 19 kontrollera om f är differentierbar i punkten $\bar{a}$. Man kan bestämma de partiella derivatorna i $\bar{a}$, (vanligen lätt att utföra), och om de är kontinuerliga och definierade i en omgivning av $\bar{a}$ har vi följande sats:

Sats 19. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in D_f$. (f'_{x_j} existerar i omgivning av $\bar{a}$ och kontinuerlig i $\bar{a}$). Då är f differentierbar i $\bar{a}$.

Bevis. (För fallet $n = 2$). Låt $\bar{a} = (a, b) \in D_f$ och antag att de partiella derivatorna f'_x, f'_y är kontinuerligt deriverbara i $\bar{a}$. Vi skall enligt (1) i Definition 19 uppskatta differensen $f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = f(a + h, b + k) - f(a, b)$, ($n = 2$).



Med hjälp av punkten $(a, b+k)$ skriver vi

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \underbrace{[f(a+h, b+k) - f(a, b+k)]}_{=\varphi(h) - \varphi(0)} + [f(a, b+k) - f(a, b)],$$

och sätter $\varphi(t) = f(a+t, b+k)$. Medelvärdessatsen ger då:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1 h)h = f'_x(a + \theta_1 h, b+k)h, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Då f'_x är kontinuerlig i (a, b) kan vi skriva

$$f'_x(a + \theta_1 h, b+k) = f'_x(a, b) + \rho_1(h, k), \quad \rho_1(h, k) \longrightarrow 0, \quad \text{då } (h, k) \longrightarrow (0, 0).$$

Analogt får vi

$$f(a, b+k) - f(a, b) = f'_y(a, b + \theta_2 k)k = f'_y(a, b)k + k\rho_2(h, k), \quad \rho_2(h, k) \longrightarrow 0, \quad \text{då } (h, k) \longrightarrow (0, 0).$$

Då får vi för differensen att

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= f'_x(a, b)h + h\rho_1(h, k) + f'_y(a, b)k + k\rho_2(h, k) \\ &= f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k), \end{aligned}$$

där $\rho(h, k) = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \rho_1(h, k) + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \rho_2(h, k)$, och då gäller $\rho(h, k) \rightarrow 0$, då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Därmed är f differentierbar i $\bar{a}$. □

Exempel 39. Funktionen $f(x, y, z) = xy^2z + \sin(xyz^2)$ är differentierbar (i $\mathbb{R}^3$), ty de partiella derivatorna

$$\begin{aligned} f'_x &= y^2z + yz^2 \cos(xyz^2), & f'_y &= 2xyz + xz^2 \cos(xyz^2), \\ f'_x &= xy^2 + 2xyz \cos(xyz^2), \end{aligned}$$

är kontinuerliga (i $\mathbb{R}^3$).

Anmärkning. För att visa att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i en punkt $\bar{a} \in D_f$ räcker det att kontrollera att f 's alla partiella derivator av första ordningen existerar i en omgivning av $\bar{a}$ och är kontinuerliga i $\bar{a}$, då ger Sats 19 att f är differentierbar i $\bar{a}$ och vidare Sats 17 att f är kontinuerlig i punkten $\bar{a}$.

1.4.2 Differential, Tangentplan och Felanalys

Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in D_f$. Då ger teorin i föregående avsnitt att vi kan uttrycka differensen $\Delta f = f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})$ mellan två funktionsvärden:

$$\Delta f = f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \underbrace{f'_{x_1}(\bar{a})h_1 + \dots + f'_{x_n}(\bar{a})h_n}_{=:df} + |\bar{h}|\rho(\bar{h}), \rho(\bar{h}) \rightarrow 0, \text{ då } \bar{h} \rightarrow \bar{0}.$$

Definition 20. Differentialen av f i punkten $\bar{a}$ betecknas df och ges av

$$df = f'_{x_1}(\bar{a})h_1 + \dots + f'_{x_n}(\bar{a})h_n = \sum_{j=1}^n f'_{x_j}(\bar{a}) \cdot h_j.$$

Differentialen kan uppfattas som en linjär funktion av $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$,

$$\bar{h} \leadsto \sum_{j=1}^n f'_{x_j}(\bar{a})h_j$$

Den ger en linjär approximation av Δf i en omgivning av $\bar{a}$.

Ofta betecknas variabelskillnaden h_j med dx_j och man skriver kort (utan att ange $\bar{a}$):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

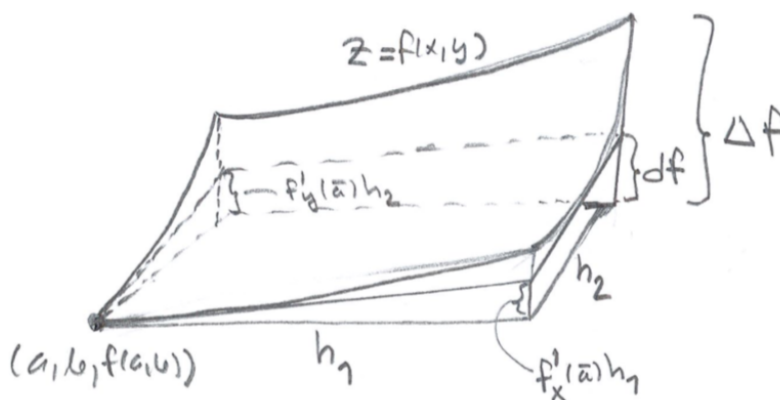
För en geometrisk tolkning av differentialen df för $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ given av $z = f(x, y)$, sätter vi $a + h_1 = x$ och $b + h_2 = y$, $\bar{a} = (a, b)$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$.

$$\Delta f = f(x, y) - f(a, b) = f'_x(\bar{a})(x - a) + f'_y(\bar{a})(y - b) + |\bar{h}|\rho(\bar{h}).$$

Då kan $f(x, y)$ approximeras i en omgivning av punkten (a, b) med

$$g(x, y) = f(a, b) + f'_x(\bar{a})(x - a) + f'_y(\bar{a})(y - b).$$

Ytan $z = g(x, y)$ är ett plan i $\mathbb{R}^3$ som kallas tangentplanet till $y = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.



Exempel 40. Bestämmer tangentplanet i $(1, 0)$ för $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

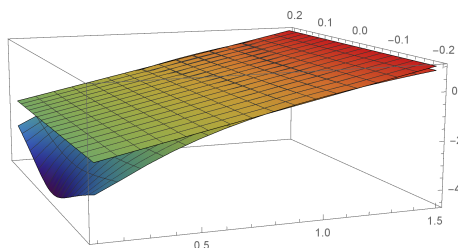
$$f'_x(1, 0) = 2$$

$$z = f(1, 0) + 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0)$$

$$\underline{\therefore z = 2x - 2}$$

$$f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y(1, 0) = 0$$



Antag att vi använder beteckningar $\Delta\bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ istället för $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$. då har vi

$$\Delta f = f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

med felet $|\Delta\bar{x}|\rho(\Delta\bar{x})$, där $\rho(\Delta\bar{x}) \rightarrow 0$, då $\Delta\bar{x} \rightarrow \bar{0}$.

Antag att vi (genom mätningar) känner närmevärden $x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n$ till $x_1, \dots, x_n$.

Då är $f(\bar{x} + \Delta\bar{x})$ ett närmevärde till det exakta värdet $f(\bar{x})$. Triangelolikheten ger den allmänna felfortplanteringsformeln:

$$|\Delta f| \underset{\text{“approximativt mindre än”}}{\lesssim} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |\Delta x_1| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |\Delta x_n|.$$

Exempel 41. Vi har beräknat $y = x_1 x_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_3}}$ för $x_1 = 2, 0 \pm 0, 1$, $x_2 = 3, 0 \pm 0, 2$ och $x_3 = 1, 0 \pm 0, 1$.

$$\therefore |\Delta x_1| \leq 0, 1, \quad |\Delta x_2| \leq 0, 2, \quad |\Delta x_3| \leq 0, 1$$

För felet Δy fås

$$\begin{aligned}
|\Delta y| &\lesssim \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| |\Delta x_2| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right| |\Delta x_3| \\
&\left| x_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_3}} \right| |\Delta x_1| + \left| 2x_1x_2 \frac{1}{x_3} \right| |\Delta x_2| + \left| \frac{x_1x_2^2}{-2x_3^{\frac{3}{2}}} \right| |\Delta x_3| \\
&\leq 9 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0 \cdot 0,1 = 4,2
\end{aligned}$$

Alltså: $y = 18,0 \pm 4,2$, med maximalfeluppskattning.

1.4.3 Derivering av Sammansatta Funktioner

Sats 20. (*Kedjeregeln*). Antag $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ är deriverbar i punkten $t_0 \in \mathbb{R}$. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, och antag att f är kontinuerligt deriverbar i punkten $g(t_0)$. Då är den sammansatta funktionen $f(g(t))$ deriverbar i punkten t_0 och

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) \Big|_{t=t_0} = f'_{x_1}(g(t_0)) \cdot g'_1(t_0) + \dots + f'_{x_n}(g(t_0)) \cdot g'_n(t_0). \quad (2)$$

Om vi sätter $z(t) = f(g(t))$ kan vi kortfattat skriva

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dg}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dg_n}{dt}. \quad (3)$$

Bevis. Vi undersöker differenskvoten

$$\frac{f(g(t_0 + k)) - f(g(t_0))}{k}, \text{ då } k \rightarrow 0.$$

Då f är kontinuerligt deriverbar i $g(t_0)$ är den differentierbar i punkten, Sats 19, och vi skriver:

$$f(g(t_0) + \bar{h}) - f(g(t_0)) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(g(t_0)) h_i + |\bar{h}| \rho(\bar{h}), \quad (*)$$

där $\rho(\bar{h}) \rightarrow 0$, då $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \rightarrow \bar{0}$.

Vi kan speciellt välja $\bar{h} = g(t_0 + k) - g(t_0)$, ty denna differens går mot $\bar{0}$ då $k \rightarrow 0$, då g är kontinuerlig i t_0 . Insättning i (*) och division med k ger uttrycket:

$$\frac{f(g(t_0 + k)) - f(g(t_0))}{k} = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(g(t_0)) \cdot \frac{g_i(t_0 + k) - g_i(t_0)}{k} + \frac{|\bar{h}|}{k} \rho(\bar{h}).$$

summan i högerledet går mot (2) då $k \rightarrow 0$ och

$$\frac{\bar{h}}{k} = \frac{g(t_0 + k) - g(t_0)}{k} \rightarrow (g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0)),$$

så resttermen $\frac{|\bar{h}|}{k} \rho(\bar{h}) \rightarrow 0$, då $k \rightarrow 0$.

Gränsvärdet för differenskvoten existerar, vilket innebär att $f(g(t))$ är deriverbar i t_0 , och dess derivata ges av (2). □

Exempel 42. Låt $f(x, y) = x^2y - y^3$ och $g(t) = (2t^3 - 5t, t^4 + 3t - 7)$. Beräkna $\frac{d}{dt}f(g(t))$ i punkten $t_0 = -2$.

Lösning:

$$g(t_0) = (2(-2)^3 - 5(-2), (-2)^4 + 3 \cdot 2 - 7) = (-6, 3)$$

$$g'(t) = (6t^2 - 5, 4t^3 + 3)$$

$$g'(t_0) = (19, -29) = (g'_1(t_0), g'_2(t_0))$$

$$f'_x(x, y) = 2xy, \quad f'_x(g(t_0)) = f'_x(-6, 3) = -36$$

$$f'_y(x, y) = x^2 - 3y^2, \quad f'_y(g(t_0)) = f'_y(-6, 3) = 9$$

Då ger formel (2) i Sats 20 att

$$\begin{aligned}
\underline{\frac{d}{dt}f(g(t))}\Big|_{t=t_0} &= f'_x(g(t_0)) \cdot g'_1(t_0) + f'_y(g(t_0)) \cdot g'_2(t_0) \\
&= (-36) \cdot 19 + 9 \cdot (-29) \\
&= \underline{-945}.
\end{aligned}$$

Exempel 43. Antag att funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator i området $x > 0, y > 0$ och satisfierar den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$$

Visa att f är konstant på hyperbelgrenarna $xy = c (> 0)$ i första kvadranten.

Lösning: Vi undersöker f på kurvor av formen $y = \frac{c}{x}$, $x > 0$, c konstant. Bildar

$$z(x) = f\left(x, \frac{c}{x}\right), \quad x > 0$$

Kedjeregeln, Sats 20, ger:

$$\begin{aligned}
z'(x) &= f'_x\left(x, \frac{c}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x) + f'_y\left(x, \frac{c}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x}\right) \\
&= f'_x\left(x, \frac{c}{x}\right) \cdot 1 + f'_y\left(x, \frac{c}{x}\right) \cdot \left(-\frac{c}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x} \left(x f'_x\left(x, \frac{c}{x}\right) - \frac{c}{x} f'_y\left(x, \frac{c}{x}\right) \right).
\end{aligned}$$

Då $x f'_x(x, y) - y f'_y(x, y) = 0$ för $x > 0$, $y > 0$, får vi att $z'(x) = 0$ då $x > 0$.

Detta betyder att $z(x) = f\left(x, \frac{c}{x}\right)$ är konstant då $x > 0$.

Vi kan generalisera kedjeregeln, Sats 20, till en sammansatt funktion av formen

$$f(x(\bar{t})) = f(x_1(t_1, \dots, t_q), \dots, x_n(t_1, \dots, t_q)),$$

där alltså $x : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. När vi vill derivera $f(x(\bar{t}))$ med avseende på t_j hålls de övriga t_k :na som fixa konstanter, och då beror ju $x(\bar{t})$ av en variabel t_j och vi kan tillämpa Sats 20 om vi antar att $f(\bar{x})$ och $x_1(\bar{t}), \dots, x_n(\bar{t})$ är kontinuerligt deriverbara i punkterna $x(\bar{t}_0)$ respektive $\bar{t}_0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_j} (f(x(\bar{t}))) \right|_{\bar{t}=\bar{t}_0} = f'_{x_1}(x(\bar{t}_0)) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j}(\bar{t}_0) + \dots + f'_{x_n}(x(\bar{t}_0)) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(\bar{t}_0). \quad (4)$$

Om vi sätter $z(\bar{t}) = f(x(\bar{t}))$ skriver vi kortfattat

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j}. \quad (5)$$

Som en matrisprodukt kan (5) skrivas:

$$(z'_{t_1} \dots z'_{t_q}) = (f'_{x_1} \dots f'_{x_n}) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_q} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Exempel 44. Bestäm vilka kontinuerligt deriverbara funktioner f av två variabler som uppfyller sambandet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

i $\mathbb{R}^2$ genom att introducera de nya variablerna

$$\begin{cases} s = x + y, \\ t = x - y. \end{cases}$$

Lösning: Vi skriver $f = f(s, t) = f(s(x, y), t(x, y))$. Kedjeregeln (5) ger att:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot (-1). \end{cases}$$

Sambandet $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ transformeras till

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \iff \frac{\partial f}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Detta implicerar att f är en deriverbar funktion φ av variabeln s , $f(s, t) = \varphi(s)$. Uttryckt i de ursprungliga variablerna är då de sökta funktionerna f av formen: $f(x, y) = \varphi(x + y)$, där φ är en godtycklig deriverbar funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. **Exempelvis**

$$f(x, y) = \sin(x + y), \quad f(x, y) = e^{(x+y)^2}, \dots$$

Exempel 45. Transformera uttrycket

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

genom övergång till polära koordinater i planet.

Lösning:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{Betraktar } f(x, y) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta \end{cases}$$

Multiplisera första ekvationen med $r \sin \theta$, den andra med $\cos \theta$ och addera:

$$r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = r \frac{\partial f}{\partial y},$$

Vilket ger $\frac{\partial f}{\partial y}$. Insättning i andra ekvationen ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r \sin \theta) + \cos \theta \left(r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(1 - \cos^2 \theta)}_{\sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}. \quad \underline{\text{Alltså:}} \\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases} \end{aligned}$$

Därmed erhålls:

$$\underline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} = \dots = \underline{\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2}$$

1.4.4 Gradient och Riktningsderivata

För en funktion $f : \mathbb{R}^{n \times} \mathbb{R}$ som är kontinuerligt deriverbar i en punkt $\bar{a}$ figurerar alla partiella derivator av första ordningen i begrepp som differentierbarhet och kedjeregeln. De beskriver i samverkan det lokala beteendet hos f . Vi sammanför därför de partiella derivatorna till begreppet gradient.

Definition 21. Antag att $f : \mathbb{R}^{n \times} \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{x}$. Då definieras *gradienten* av f i punkten $\bar{x}$ som

$$\text{grad} f(\bar{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right).$$

Anmärkning 1. $\text{grad} f(\bar{x})$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ och funktionen $\bar{x} \mapsto \text{grad} f(\bar{x})$, betecknad $\text{grad} f$ är ett n -dimensionellt vektorfält, $\text{grad} f : \mathbb{R}^{n \times} \mathbb{R}^n$

Anmärkning 2. Ofta används beteckningen $\nabla f(\bar{x})$ för $\text{grad} f(\bar{x})$, där symbolen ∇ utläses "nabla".

Exempel 46. För polynomet $f(x, y, z) = x^2yz - 2xz^2$ är

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x, y, z) &= (2xyz - 2z^2, x^2z, x^2y - 4xz) \\ &= \nabla f(x, y, z).\end{aligned}$$

Exempel 47. För $f(\bar{x}) = |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, har vi de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_j}{|\bar{x}|}.$$

Gradienten ges av

$$\text{grad } f(\bar{x}) = \left(\frac{x_1}{|\bar{x}|}, \dots, \frac{x_n}{|\bar{x}|} \right) = \frac{1}{|\bar{x}|} \bar{x}.$$

Anmärkning 3. Differentierbarhets kravet uttryckt med gradienten blir:

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) h_j + |\bar{h}| \rho(\bar{h}) \\ &= \text{grad } f(\bar{x}) \cdot \bar{h} + |\bar{h}| \rho(\bar{h})\end{aligned}$$

där $\rho(\bar{h}) \rightarrow 0$, då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$.

Kedjeregeln för derivering av $f(g(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ uttryckt med gradienten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(g(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) g'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) g'_n(t) \\ &= \text{grad} f(g(t)) \cdot g'(t),\end{aligned}\tag{7}$$

där $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t))$.

Vi ser från formlerna i denna anmärkning att $\text{grad } f(\bar{x})$ spelar en roll för funktioner av flera

variabler som är analog med derivatans roll för funktioner av en variabel.

Följande sats ger analogin till att om en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har derivatan $f'(x) = 0$ i ett intervall så är den konstant på intervallet.

Sats 21. *Antag att $D \subset \mathbb{R}^n$ är en öppen och sammanhängande mängd, samt att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator i D . Om $\text{grad} f(\bar{x}) = \bar{0}$ för alla $\bar{x} \in D$, så är f konstant i D .*



Bevis. Välj en fix punkt $\bar{a}$ och en godtycklig punkt $\bar{y}$ i D . Mängden D är sammanhängande, så det finns en kontinuerlig kurva $x(t)$ i D , med $x(\alpha) = \bar{a}$ och $x(\beta) = \bar{y}$, då $\alpha \leq t \leq \beta$. (Definition 9). Då D är öppen kan man välja $x(t)$ så att den har kontinuerlig derivata, dvs. $x_1(t), \dots, x_n(t)$ har kontinuerliga derivator då $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. (Detta visas ej). Kedjeregeln (7) ger:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \text{grad } f(x(t)) \cdot x'(t) = \bar{0} \cdot x'(t) = 0,$$

för alla t med $\alpha < t < \beta$. Då $f(x(t))$ är kontinuerlig i α och β erhålls att $f(x(t)) = c = \text{konstant}$, då $\alpha \leq t \leq \beta$, och speciellt att $f(\bar{y}) = f(\bar{a})$. $\square$

Exempel 48. Är $f(x, y, z) = (y^2 - z, 2xy, 3z^2 - x)$ gradient till någon funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$?

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2 - z \implies F(\bar{x}) = y^2 x - zx + H_1(y, z) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2yx + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 2xy \implies H_1(y, z) = H_2(z) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -x + H_2'(z) = 3z^2 - x \implies H_2'(z) = 3z^2 \implies H_2(z) = z^3 + k \end{aligned}$$

Svar: Ja, $F(\bar{x}) = y^2 x - zx + z^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$

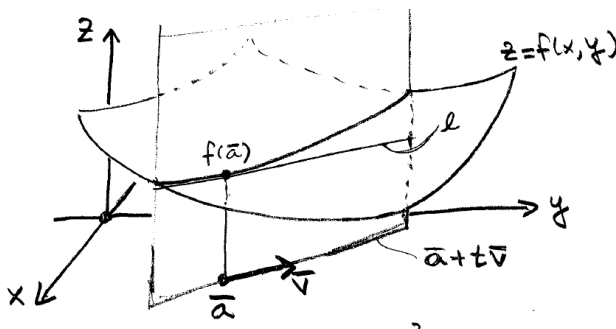
De partiella derivatorna beskriver hur snabbt $f(\bar{x})$ ändras då $\bar{x}$ rör sig parallellt med någon koordinataxel. Nu undersöker vi tillväxten av $f(\bar{x})$ i en punkt $\bar{a}$ längs en given rät linje $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{v}$ genom $\bar{a}$.

Antag att $\bar{v}$ är en normerad riktningsvektor, $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1$. Då mäter parametern t avståndet från $\bar{a}$ längs linjen.

Definition 22. Med riktningsderivatan av $f(\bar{x})$ i punkten $\bar{a}$ svarande mot riktningen $\bar{v}$, $|\bar{v}| = 1$, avses gränsvärdet

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}.$$

Anmärkning. Om $\bar{v} = \bar{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ så är $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = f'_{x_j}(\bar{a})$. Vidare inses lätt att $f'_{-\bar{v}}(\bar{a}) = -f'_{\bar{v}}(\bar{a})$



Geometrisk tolkningen i $\mathbb{R}^2$ av riktningsderivata $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$: riktningskoefficienten till tangenten l .

Vanligen använder man $\text{grad} f(\bar{a})$ för att beräkna riktningsderivator, med stöd av följande sats.

Sats 22. Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a}$ och $\bar{v}$ är en riktningsvektor med $|\bar{v}| = 1$, så existerar $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$ och ges av:

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v}. \quad (8)$$

Bevis. Funktionen $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{v})$ är f 's restriktion till linjen $\bar{a} + t \cdot \bar{v}$. Enligt kedjeregeln (7) är $\varphi'(t) = \text{grad } f(\bar{a} + t\bar{v}) \cdot \bar{v}$, så $\varphi'(0) = \text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v}$.

Men nu är ju

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) = \text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v},$$

och beviset är klart. □

Exempel 49. Bestäm för $f(x, y) = x^2 + y^2$ riktningsderivatan i punkten $\bar{a} = (1, 1)$ längs riktningen $(1, 2)$.

Lösning: Vi har då $\text{grad } f(\bar{x}) = (2x, 2y)$ och $\text{grad } f(\bar{a}) = (2, 2)$. Riktningen $(1, 2)$ måste normeras: $\bar{v} = \frac{(1, 2)}{|(1, 2)|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. Formel (8) ger:

$$\begin{aligned} f'_{\bar{v}}(\bar{a}) &= \text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 2) \cdot (1, 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2 + 4) = \frac{6}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Sats 23. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a}$. Då är $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = 0$ i de riktningar som är vinkelräta mot $\text{grad } f(\bar{a}) \neq \bar{0}$.

Vektorn $\text{grad } f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast och mätetalet på den maximala tillväxthastigheten är $|\text{grad } f(\bar{a})|$.

Bevis. Enligt formel (8) är $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v}$, så $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = 0$ i de riktningar $\text{grad } f(\bar{a}) \perp \bar{v}$.

Med stöd av Sats 1, (Cauchy-Schwarz' olikhet):

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v} \leq |\text{grad } f(\bar{a}) \cdot \bar{v}| \leq |\text{grad } f(\bar{a})| |\bar{v}| = |\text{grad } f(\bar{a})|.$$

Likhet fås då $\text{grad } f(\bar{a})$ och $\bar{v}$ är parallella och likariktade, dvs.

$$\bar{v} = \frac{1}{|\text{grad } f(\bar{a})|} \text{grad } f(\bar{a}).$$

Riktningsderivatan $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$ är maximal i gradientens riktning med det maximala värdet $|\text{grad } f(\bar{a})|$. □

Anmärkning. I riktningen $-\text{grad } f(\bar{a})$ är riktningsderivatan som minst och funktionsvärdet avtar snabbast.

Exempel 50. Låt $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$ beskriva temperaturen i ett område i $\mathbb{R}^3$ innehållande punkten $(1, 1, 1)$. I vilken riktning ökar temperaturen snabbast i denna punkt och hur stor är ökningen / längdenhet?

Lösning: Vi har $\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{-2xz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2z}{x^2+y^2} \right)$ så $\text{grad } f(1, 1, 1) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right)$, vilket enligt sats 23 är den (onormerade) riktningen för maximal temperaturökning. Ökningen / längdenhet ges av

$$|\text{grad } f(1, 1, 1)| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

1.4.5 Nivåkurvor, nivåytor och tangentplan

Definition 23. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Punktmängden $\{(x, y) : f(x, y) = c, c \in \mathbb{R}\}$ kallas (om den är icke-tom) en nivåkurva till f . Punktmängden $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = c, c \in \mathbb{R}\}$ kallas (om den är icke-tom) en nivåyta till g .

På väderlekskartor används nivåkurvor för temperaturen, isotermer, och för lufttrycket, isobarer. På vanliga kartor anger nivåkurvor höjden över havet, höjdlinjer.

Vi skall nu undersöka gradientens geometriska betydelse i samband med nivåytor och nivåkurvor. Antag då att $z = f(x, y)$ är kontinuerligt deriverbar i en punkt $\bar{a} = (a, b)$ på nivåkurvan $f(x, y) = c$. (Då gäller ju $f(\bar{a}) = c$). Låt nivåkurvan ha en parameter framställning

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \end{cases}$$

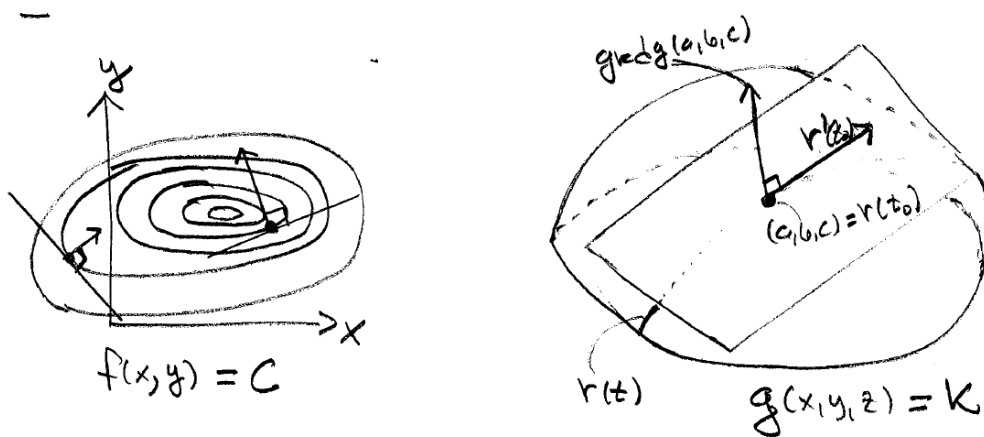
med $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b) = \bar{a}$. På $[\alpha, \beta]$ gäller $f(x(t), y(t)) = c$, så derivatan av f med avseende på t är noll för $t \in [\alpha, \beta]$. Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

och speciellt för $t = t_0$: $\text{grad } f(\bar{a}) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) = 0$. Då $(x'(t_0), y'(t_0))$ ger nivåkurvans tangentriktning i $\bar{a}$ så är $\text{grad } f(\bar{a})$, om den är olika $\bar{0}$, vinkelrät mot kurvans tangent i $\bar{a} = (a, b)$.

För en funktion $g(x, y, z)$ av tre variabler kan man på ett analogt sätt inse att $\text{grad } g(a, b, c)$ är vinkelrät mot tangenten till varje kurva i nivåytan $g(x, y, z) = k$ som går genom punkten (a, b, c) . Alla dessa tangenter bildar nivåytans tangentplan i (a, b, c) och gradienten $\text{grad } g(a, b, c)$ anger nivåytans normalriktning.

Sats 24. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbara i punkten $\bar{a} = (a, b)$ respektive $\bar{a} = (a, b, c)$. Då är $\text{grad } f(a, b)$ normalvektor i punkten (a, b) till den nivåkurva som går genom (a, b) , och $\text{grad } g(a, b, c)$ är normalvektor i punkten (a, b, c) till nivåytan som går genom (a, b, c) .



Sats 24 möjliggör bestämningen av tangenter till nivåkurvor och tangentplan till nivåytor på ett bekvämt sätt. Om kurvan $f(x, y) = c$ parametriserats med $r = r(t)$, $r(t_0) = (a, b)$, så har tangenten ekvationen $(x, y) = r(t_0) + u \cdot r'(t_0)$, alltså $u \cdot r'(t_0) = (x - a, y - b)$ och denna vektor är vinkelrät mot $\text{grad } f(a, b)$, så skalär produkten är noll:

$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) = 0, \quad (9)$$

vilket ger tangentens ekvation.

Analogt får vi tangentplanets ekvation i punkten (a, b, c) på nivåytan $g(x, y, z) = k$ genom att betrakta en kurva $r(t)$ på nivåytan som går igenom $(a, b, c) = r(t_0)$. Tangenten har ekvationen $(x, y, z) = r(t_0) + u \cdot r'(t_0)$ och vektorn $ur'(t_0) = (x - a, y - b, z - c)$ är vinkelrät mot grad $g(a, b, c)$, med skalärprodukt noll:

$$g'_x(a, b, c)(x - a) + g'_y(a, b, c)(y - b) + g'_z(a, b, c)(z - c) = 0, \quad (10)$$

Vilket ger tangentplanets ekvation.

Exempel 51. Bestäm tangenten till ellipsen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ i punkten $(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$.

Lösning: Ellipsen är nivåkurva till $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$. Då är grad $f(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{2y}{9})$ och enligt (9) ges tangentens ekvation av

$$\begin{aligned} f'_x\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)(x - \sqrt{2}) + f'_y\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) &= 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) &= 0 \\ \underline{3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 12 = 0.} \end{aligned}$$

Exempel 52. Bestäm tangentplanet till hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ i punkten $(1, 1, \sqrt{3})$.

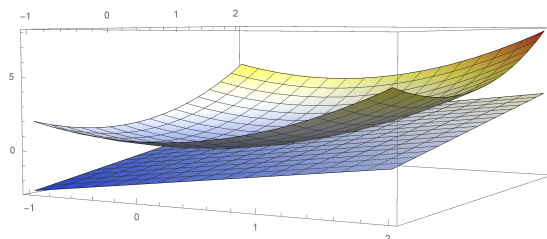
Lösning: Hyperboloiden är nivåyta till $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, grad $g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$,
grad $g(\underbrace{1, 1, \sqrt{3}}_{=a}) = (2, 2, -2\sqrt{3})$.

Tangentplan ges av (10):

$$g'_x(\bar{a})(x-1) + g'_y(\bar{a})(y-1) + g'_z(\bar{a})(z-\sqrt{3}) = 0$$

$$2(x-1) + 2(y-1) - 2\sqrt{3}(z-\sqrt{3}) = 0$$

$$x + y - \sqrt{3}z + 1 = 0.$$



Anmärkning. För en funktionsyta $z = f(x, y)$ i en punkt $(a, b, f(a, b))$ har vi tidigare bestämt tangentplanet genom:

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Funktionsytan kan tolkas som en nivåyta till g :

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0,$$

med grad $g = (f'_x, f'_y, -1)$. Då ger formel (10):

$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + (-1)(z - f(a, b)) = 0$$

för tangentplanet genom $(a, b, f(a, b))$, vilket överrensstämmer med vår tidigare formel.

1.5 Differentialkalkyl för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Linjära avbildningar och funktionalmatriser

Definition 24. Avbildningen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning om

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \quad \text{och} \quad f(c\bar{x}) = cf(\bar{x}),$$

för alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$.

Anmärkning. En linjär avbildning f avbildar räta linjer i $\mathbb{R}^n$ på räta linjer i $\mathbb{R}^m$. En punkt $x = a + tb$ på en linje i $\mathbb{R}^n$ avbildas på

$$f(x) = f(a + tb) = f(a) + tf(b),$$

som är en punkt på linjen $y = f(a) + t \cdot f(b)$ i $\mathbb{R}^m$.

Låt $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ vara den naturliga basen i $\mathbb{R}^n$, $\bar{e}_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{komponent } j}{1}, 0, \dots, 0)$ och $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ den naturliga basen i $\mathbb{R}^m$, $\bar{v}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. $\bar{x} = \sum_{k=1}^n x_k \bar{e}_k \in \mathbb{R}^n$. $f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n x_k f(\bar{e}_k)$, f linjär.

$$f(\bar{e}_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} \bar{v}_i, \quad k = 1, \dots, n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{Matrisen för } f, \text{ med avseende på baserna } (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \text{ och } \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m.$$

Den linjära avbildningen $\bar{y} = f(\bar{x})$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ har då matrisframställningen:

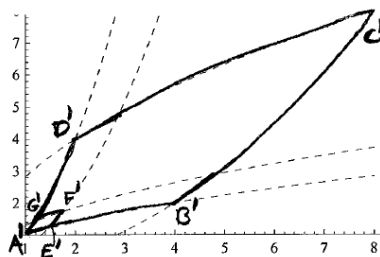
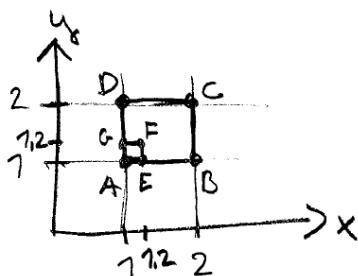
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Följande resultat är bekanta från kursen i Matriser:

1. Om $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjära avbildningar med matriserna A respektive B , och $k \in \mathbb{R}$, så är $kf, f + g, f - g$ linjära avbildningar med matriser $kA, A + B, A - B$.
2. Om $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär med matris A och $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linjär med matris B så är $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär med matris AB .
3. Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är linjär med matris A , så har f en invers om och endast om A är inverterbar. $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är då linjär med matris A^{-1} .

En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) = f(x, y)$, avbildar linjer i xy -planet på linjer i uv -planet och rektanglar på parallelogrammer, (som kan vara rektanglar). En icke-linjär avbildning har inte denna egenskap globalt, men lokalt avbildas "tillräckligt små rektanglar" i xy -planet på en "parallelogramaktig figur" i uv -planet.

Exempel 53. Betrakta avbildningen $(x, y) \mapsto (u, v) = (x^2y, xy^2)$ från xy -planet till uv -planet. Betrakta bilden av en kvadrat och en "liten kvadrat" i xy -planet:



$$\begin{cases} x = 1 \text{ avbildas på } v = u^2, & x = 2 \text{ avbildas på } v = \frac{u^2}{8}, \\ y = 1 \text{ —"— } v = \sqrt{u}, & y = 2 \text{ —"— } v = \sqrt{8u}, \\ x = 1, 2 \text{ —"— } v = \frac{u^2}{(1,2)^3}, & y = 1, 2 \text{ —"— } v = \sqrt{(1,2)^3 u} \end{cases} \quad (\text{Kolla!})$$

Lokalt kan en icke-linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ approximeras med en linjär avbildning. För detta ändamål införs funktionalmatrisen i följande definition.

Definition 24. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en avbildning med komponentfunktionerna $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$.

Antag att partiella derivatorna $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ existerar i punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Då betecknas funktionalmatrisen, (Jacobimatrisen, totala derivatan) med $f'(\bar{a})$ och definieras av:

$$f'(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

Anmärkning. För en avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ blir $f'(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \cdot \dots \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$, vilket kan tolkas som grad $f(\bar{a})$ skriven som en radvektor.

För en vektorvärd funktion av en variabel, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ blir $f'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$, tangentvektorn skriven som en kolonnmatris.

Sats 25. Antag att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har komponentfunktionerna $f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})$, $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, och att varje komponentfunktion f_j är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a}$. Då är f differentierbar i punkten $\bar{a}$, vilket betyder att

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{a})\bar{h} + |\bar{h}|\rho(\bar{h}), \quad (11)$$

med feltermen $\rho(\bar{h}) \rightarrow \bar{0}$, då $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \rightarrow \bar{0}$, och $|\bar{h}|\rho(\bar{h}) = |\bar{h}|(\rho_1(\bar{h}), \dots, \rho_m(\bar{h}))$.

Anmärkning. Funktionen $\bar{h} \mapsto f'(\bar{a})\bar{h}$, där $\bar{h}$ uppfattas som kolonnmatris, är en linjär avbildning som kan kallas lineariseringen av f i punkten $\bar{a}$ eller differentialen av f i punkten $\bar{a}$, betecknad $df(\bar{a})$.

Bevis. (Fallet $n = 2, m = 3$. Analogt bevis för andra fall). Med stöd av Satserna 18, 19 och Definition 19:

$$\begin{cases} \Delta f_1 = f_1(\bar{a} + \bar{h}) - f_1(\bar{a}) = h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) + |\bar{h}| \rho_1(\bar{h}), \\ \Delta f_2 = f_2(\bar{a} + \bar{h}) - f_2(\bar{a}) = h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) + |\bar{h}| \rho_2(\bar{h}), \\ \Delta f_3 = f_3(\bar{a} + \bar{h}) - f_3(\bar{a}) = h_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{a}) + h_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{a}) + |\bar{h}| \rho_3(\bar{h}), \end{cases}$$

där $\rho_i(\bar{h}) \rightarrow 0$, då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$, $i = 1, 2, 3$.

Skrivet i matrisform, med beteckningen $\Delta f = f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})$,

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |\bar{h}| \begin{pmatrix} \rho_1(\bar{h}) \\ \rho_2(\bar{h}) \\ \rho_3(\bar{h}) \end{pmatrix} = f'(\bar{a})\bar{h} + |\bar{h}|\rho(\bar{h}),$$

och $\rho_i(\bar{h}) \rightarrow 0$ då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$ medför att $\rho(\bar{h}) \rightarrow \bar{0}$, då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$. □

Exempel 54. a) Polära koordinater. Avbildningen $(r, \theta) \xrightarrow{f} (x, y) = (\underbrace{r \cos \theta}_{f_1(r, \theta)}, \underbrace{r \sin \theta}_{f_2(r, \theta)})$, har funktionalmatrisen:

$$f'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

b) Sfäriska koordinater. $(r, \theta, \varphi) \xrightarrow{f} (x, y, z) = (\underbrace{r \sin \theta \cos \varphi}_{f_1(r, \theta, \varphi)}, \underbrace{r \sin \theta \sin \varphi}_{f_2(r, \theta, \varphi)}, \underbrace{r \cos \theta}_{f_3(r, \theta, \varphi)})$ har funktionalmatrisen:

$$f'(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5.1 Kedjeregeln i allmän matrisform

Sats 26. Antag att $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, (komponentfunktionerna $g_1, \dots, g_p$ kontinuerligt deriverbara), och att $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $g(\bar{a}) \in \mathbb{R}^p$, (komponentfunktionerna $f_1, \dots, f_m$ kontinuerligt deriverbara). Då är sam-

ansättningen $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentierbar i $\bar{a}$ med funktionalmatris

$$(f \circ g)'(\bar{a}) = f'(g(\bar{a})) g'(\bar{a}). \quad (12)$$

Anmärkning. Produkten i högerled av (12) är en matrisprodukt av formen “ $(m \times p) \times (p \times n) = (m \times n)$ ”. Alla tidigare kedjeregler är specialfall av (12).

Bevis. Den i :te komponentfunktionen i $(f \circ g)(\bar{x})$ ges av

$$f_i(g_1(\bar{x}), \dots, g_p(\bar{x})), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n). \quad (*)$$

Beteckna variablerna för f_i med $y_1, \dots, y_p$, $f_i(y_1, \dots, y_p)$. Vi har då partiella derivatorna $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_p}$. Funktionen $(*)$ har en partiell derivata med avseende på x_k i punkten $\bar{a}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(g(\bar{a})) \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\bar{a}) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_p}(g(\bar{a})) \frac{\partial g_p}{\partial x_k}(\bar{a})$$

Detta är enligt definitionen på matrisprodukt elementet på plats (ik) i matrisen $f'(g(\bar{a}))g'(\bar{a})$, och formel (12) stämmer. För att påvisa differentierbarheten för $f \circ g$ i punkten $\bar{a}$ krävs uppskattningar som involverar matrisnormer, se kursboken. $\square$

Exempel 55. En rymdkurva skär xy -planet under rät vinkel i punkten $(2, 1, 0)$. Bestäm tangentens ekvation i motsvarande punkt för kurvans bild under avbildningen $u = x + y + z$, $v = x^2 - y^2$, $w = xyz$.

Lösning: Kurvan ges av $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $g'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Vidare gäller:
$$\begin{cases} g(t_0) = (2, 1, 0), \\ g'(t_0) = (0, 0, z'(t_0)). \end{cases}$$

Sätt:

$$f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

$$f(g(t)) = (u(g(t)), v(g(t)), w(g(t)))$$

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & -2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$f'(g(t_0)) = f'(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ g)'(t_0) &= f'(g(t_0))g'(t_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z'(t_0) \end{pmatrix} = (z'(t_0), 0, 2z'(t_0))^T = z'(t_0)(1, 0, 2)^T \end{aligned}$$

$\therefore$ Tangentens ekvation:

$$\underline{f(g(t_0)) + r(1, 0, 2), \quad -\infty < r < \infty.}$$

1.5.2 Funktionaldeterminanter

Antag att $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Då är funktionalmatrisen f' en kvadratisk $n \times n$ matris och vi kan beräkna dess determinant, som också är viktig för att studera f :s lokala egenskaper.

Definition 25. Låt $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{y} = f(\bar{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Talet:

$$\det f'(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Kallas funktionaldeterminanten eller Jacobis determinant av funktionen $\bar{y} = f(\bar{x})$ och betecknas:

$$\frac{d(f)}{d(\bar{x})}, \quad \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}, \quad \frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})}, \quad \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}$$

eller ibland $J(\bar{x})$.

Exempel 56. a) Avbildningen $f(r, \theta) = (r \overset{f_1}{\cos \theta}, r \overset{f_2}{\sin \theta})$ har funktionalmatris

$$f'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ och } \underline{\text{funktionaldeterminant:}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta - (-r \sin \theta) \sin \theta \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \underline{\underline{r}}. \end{aligned}$$

b) Avbildningen $f(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ har funktionalmatris:

$$f'(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

och funktionaldeterminant:

$$\begin{aligned} \frac{d(f_1, f_2, f_3)}{d(r, \theta, \varphi)} &= \det f'(r, \theta, \varphi) = (\text{bryt ut } r \text{ ur kolonn 1 och 2, utveckla efter sista raden}) \\ &= r^2 [\cos \theta (\cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) + \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)] \\ &= r^2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) = \underline{\underline{r^2 \sin \theta}} \end{aligned}$$

Funktionaldeterminanterna i a) och b) kommer att användas vid variabelbyten i dubbel- och tripelintegraler.

Sats 27. Antag att $\bar{y} = f(\bar{x})$ och $\bar{x} = g(\bar{t})$, $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Då gäller:

$$\det (f \circ g)' = \det f' \cdot \det g',$$

vilket kan skrivas

$$\frac{d(\bar{y})}{d(\bar{t})} = \frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})} \cdot \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{t})}.$$

Bevis. Enligt Sats 26 är $(f \circ g)' = f'g'$. Då determinanten av en produkt är produkten av determinanterna erhålls:

$$\det(f \circ g)' = \det(f'g') = \det f' \cdot \det g'.$$

□

Antag att $\bar{y} = f(\bar{x})$ är bijektiv med inversen $\bar{x} = g(\bar{y})$. Då är $f \circ g =$ identiska avbildningen, och $(f \circ g)' = I =$ enhetsmatrisen med $\det I = 1$. Då ger Sats 27 att

$$1 = \det f'(\bar{x}) \cdot \det g'(\bar{y}) = \frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})} \cdot \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})}$$

och vi har formeln

$$\frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} = \frac{1}{\frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})}}, \quad (13)$$

Som uttrycker att inversens funktionaldeterminant är lika med det inverterade värdet av funktionens funktionaldeterminant.

Exempel 57. Vid övergång från rätvinkliga till polära koordinater $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, $\begin{cases} r > 0, \\ 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$ har vi enligt Ex. 56 a) att

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = r.$$

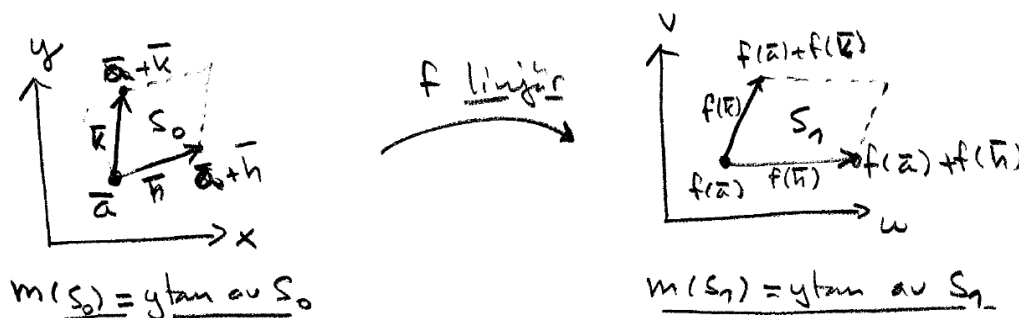
För det inversa koordinatbytet gäller:

$$\frac{d(r, \theta)}{d(x, y)} = \frac{1}{\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vi skall undersöka funktionaldeterminantens geometriska implikationer. Antag först att $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

$$f'(\bar{a}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$



Egenskap 3., på sid. 11, för vektorprodukter ger: $m(s_0) = |\bar{h} \times \bar{k}|$, med tolkningen $\bar{h} = (0, h_1, h_2) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{k} = (0, k_1, k_2) \in \mathbb{R}^3$. Då gäller:

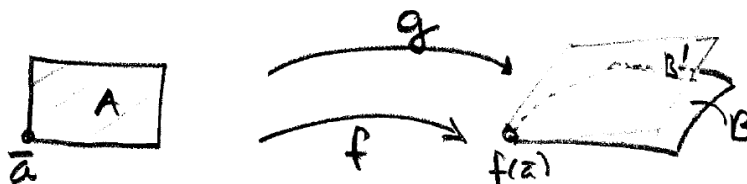
$$\begin{aligned} \underline{m(s_1)} &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ f(\bar{h}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ f(\bar{k}) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ ah_1 + bh_2 \\ ch_1 + dh_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ ak_1 + bk_2 \\ ck_1 + dk_2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & ah_1 + bh_2 & ak_1 + bk_2 \\ e_3 & ch_1 + dh_2 & ck_1 + dk_2 \end{pmatrix} \right| \stackrel{\text{Tolka rätt!}}{=} \left| \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 & ak_1 + bk_2 \\ ch_1 + dh_2 & ck_1 + dk_2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| \underbrace{\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_1 & k_2 \end{vmatrix}}_{= m(s_0)} = \left| \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \right| m(s_0) \\ &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

$$\therefore m(s_1) = \left| \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \right| m(s_0).$$

Låt nu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en icke-linjär funktion $\bar{y} = f(\bar{x})$. Betrakta en ”liten rektangel” $\mathbf{A}$ invid punkten $\bar{a} \in D_f$. Bilden av $\mathbf{A}$ under avbildningen f , $(f(A))$, betecknas $\mathbf{B}$. Den approximerande linjära avbildningen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(\bar{x}) = f(\bar{a}) + f'(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a})$ avbildar $\mathbf{A}$ på en parallelogram $\mathbf{B}'$ med

$$m(B') = \left| \frac{d(g)}{d(\bar{x})} \right| m(A).$$

Men $g(\bar{x}) = f'(\bar{a})\bar{x} + \underbrace{(f(\bar{a}) - f'(\bar{a})\bar{a})}_{\text{konstant}}$, så $\left| \frac{d(g)}{d(\bar{x})} \right| = \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right|$ och $m(B') = \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right| m(A)$.



Men då gäller: $\frac{m(B')}{m(A)} = \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right|$, och då $\mathbf{B}$ approximeras av $\mathbf{B}'$:

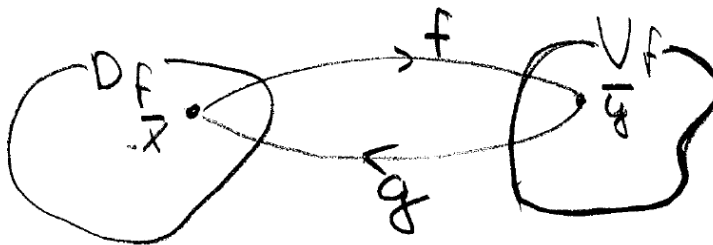
$$\frac{m(B)}{m(A)} \approx \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right|.$$

Den lokala areaförstoringen, ytskalan, under avbildningen $y = f(\bar{x})$ ges av absolutbeloppet av funktionaldeterminanten.

I $\mathbb{R}^3$ ger $\left| \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} \right|$ den lokala volymskalan.

1.6 Inversa avbildningar

En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är omvändbar (1-1 avbildning) om varje punkt $\bar{y} = f(\bar{x})$ i värdemängden V_f är bild av exakt en vektor $\bar{x} \in D_f$.



Avbildningen f har då en invers funktion g med $D_g = V_f$ och $\bar{y} = f(\bar{x}) \iff \bar{x} = g(\bar{y})$.

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning, $\bar{y} = f(\bar{x}) = A\bar{x}$, så är den omvändbar om och endast om $\det A \neq 0$, med $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}) = A^{-1}\bar{y}$.

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\bar{a}$ är den differentierbar i $\bar{a}$ och Sats 25, (formel (11)), garanterar att vi kan approximera f i en omgivning av $\bar{a}$ med en linjär funktion.

$$\bar{y} = f(\bar{x}) \approx f(\bar{a}) + f'(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a}),$$

om $|\bar{x} - \bar{a}|$ är "litet". Om $\det f'(\bar{a}) \neq 0$, har vi efter omskrivningen $\bar{y} - f(\bar{a}) \approx f'(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a})$, att

$$\bar{x} - \bar{a} \approx (f'(\bar{a}))^{-1}(\bar{y} - f(\bar{a})) \quad (+)$$

Det verkar nu troligt att $\bar{y} = f(\bar{x})$ har en invers i en omgivning av $\bar{a}$, låt oss anta detta och sätta $\bar{b} = f(\bar{a}) \implies \bar{a} = f^{-1}(\bar{b})$.

Formel (+) kan skrivas om på följande sätt

$$\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}) \approx f^{-1}(\bar{b}) + [f'(f^{-1}(\bar{b}))]^{-1}(\bar{y} - \bar{b}),$$

så f^{-1} verkar vara differentierbar med funktionalmatris $[f'(f^{-1}(\bar{b}))]^{-1}$. Ett rigoröst bevis kan ge belägg för våra funderingar.

Sats 28. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\bar{a} \in D_f$. Antag att funktionaldeterminanten $\det f'(\bar{a}) \neq 0$ i $\bar{a}$. Då har restriktionen av f till en omgivning U av $\bar{a}$ en invers f^{-1} som har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning V av punkten $\bar{b} = f(\bar{a})$. Inversens funktionalmatris ges av inversen till f 's funktionalmatris:

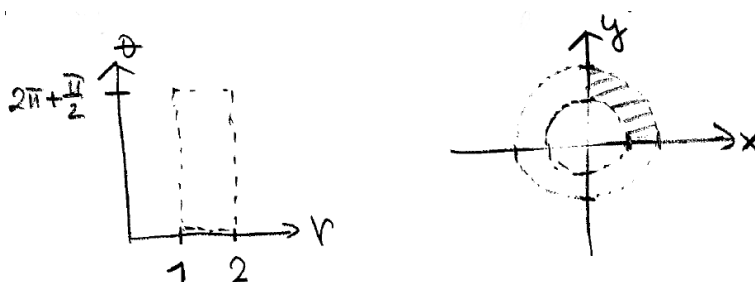
$$(f^{-1})' = (f')^{-1}. \quad (14)$$

Anmärkning. Då $(f^{-1} \circ f)' = (f^{-1})' \cdot f' = I$ får vi för funktionaldeterminanterna sambandet (13):

$$\det (f^{-1})' = \frac{1}{\det f'}.$$

Anmärkning. Sats 28 beskriver det lokala beteendet hos f . En funktion kan ha en differentierbar invers i en omgivning av varje punkt i D_f , utan att vara injektiv, vilket demonstreras av följande exempel.

Exempel 58. $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ avbildar rektangeln $1 < r < 2$, $0 < \theta < 2\pi + \frac{\pi}{2}$ på en cirkelring så att punkterna i det streckade området är bilder av två punkter i rektangeln:



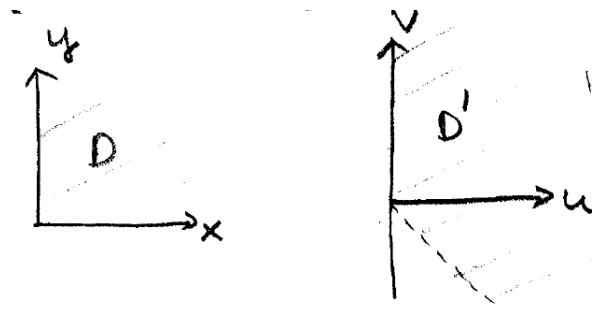
Med andra ord kan inte Sats 28 användas för att undersöka om en avbildning är (globalt) omvändbar.

Exempel 59. Betrakta på $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ avbildningen $(x, y) \mapsto (u, v) = (x^{-1}, y^{-1} - x^{-1})$.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ \frac{1}{y} = v + u \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ y = \frac{1}{u+v} \end{cases}$$

$\therefore D$ avbildas injektivt på $D' = \{(u, v) : u > 0, u + v > 0\}$

$\therefore$ Omvändbar avbildning av D på D' .

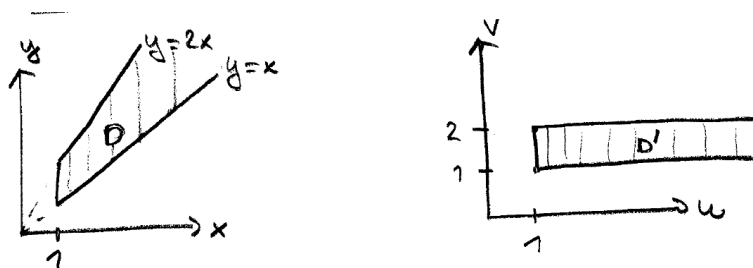


Exempel 60. Visa att $(x, y) \mapsto (u, v) = (x, \frac{y}{x})$ ger en omvändbar avbildning av $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq y \leq 2x\}$ på en mängd D' i uv -planet. Bestäm D' och beräkna $\frac{d(u, v)}{d(x, y)}$ samt $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$.

Lösning: $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = xv = uv \end{cases}$

$\therefore$ Avbildningen från D till D' är omvändbar.

Om $(x, y) \in D$ har vi: $x \geq 1$ och $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$, så $D' = \{(u, v) : u \geq 1 \text{ och } 1 \leq v \leq 2\}$.



$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

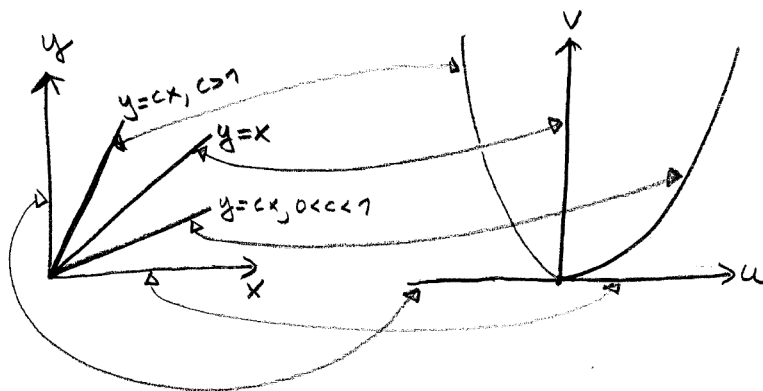
$\therefore$ Partiella derivatorna kontinuerlig i en omgivning av varje punkt i D , och $\frac{d(u, v)}{d(x, y)} \neq 0$, Tillämpar Sats 28:

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \stackrel{(13)}{=} \frac{1}{\frac{d(u, v)}{d(x, y)}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \underline{u}.$$

Exempel 61. Avbildningen $(u, v) = (x^2 - y^2, x^3 y)$ avbildar $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ omvändbart på $D' = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v \geq 0\}$. Beräkna de partiella derivatorna x'_u, x'_v, y'_u, y'_v för den inversa avbildningen $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ från D' till D i punkten $u = 0, v = 1$.

Lösning:
$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = x^3 y \end{cases}, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Strålen } (0, y) \text{ i } D \text{ avbildas på strålen } (-y^2, 0) \text{ i } D' \\ \text{Strålen } (x, 0) \text{ i } D \text{ avbildas på strålen } (x^2, 0) \text{ i } D' \\ \text{Strålen } (x, x) \text{ i } D \text{ avbildas på strålen } (0, x^4) \text{ i } D' \\ \text{Strålen } (x, cx), 0 < c < 1, \text{ i } D \text{ avbildas på parabelbågen } ((1 - c^2)x^2, cx^4) \text{ i första kvadranten.} \\ \text{Strålen } (x, cx), c > 1, \text{ i } D \text{ avbildas på parabelbågen } ((1 - c^2)x^2, cx^4) \text{ i andra kvadranten.} \end{array} \right.$



Har vi en bijektiv avbildning av D på D' ?

Genom varje punkt $(x, y) \in D$, med $x > 0, y > 0$, går exakt en linje av formen $y = cx$, $c > 0$.

Tag godtyckligt en punkt $(u, v) \in D'$ med $u > 0, v > 0$.

Påst: $\exists$ exakt ett $c \in (0, 1)$ och ett $x > 0$: $(u, v) = ((1 - c^2)x^2, cx^4)$.

Bevis:
$$\begin{cases} (1 - c^2)x^4 = u \\ cx^4 = v \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{u}{1 - c^2} \\ x^2 = \sqrt{\frac{v}{c}} \end{cases} \implies \frac{u}{1 - c^2} = \sqrt{\frac{v}{c}}$$

Sätt: $f(c) = \frac{u}{1-c^2} - \sqrt{\frac{v}{c}}, \quad f'(c) = 2u \frac{c}{(1-c^2)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{\sqrt{c^3 v}} > 0$, då $c \in (0, 1)$.

$\therefore f$ strängt växande på $(0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c_0 : f(c_0) < 0 \text{ (} c_0 \text{ "nära" } 0 \text{)} \\ \exists c_1 : f(c_1) > 0 \text{ (} c_1 \text{ "nära" } 1 \text{)} \end{array} \right\} \xRightarrow{f \text{ kont på } [c_0, c_1]} \exists \text{ entydigt } c_\star \in (0, 1) : f(c_\star) = 0.$$

Punkten $\left(\sqrt{\frac{u}{1-c_\star^2}}, c_\star \sqrt{\frac{u}{1-c_\star^2}} \right)$ enda punkt i D som avbildas på (u, v) $\square$.

Analog behandling av fallet $(u, v) \in D'$ med $u < 0, v > 0$.

$\therefore D$ avbildas bijektivt på D'

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 - y^2, x^3 y) & \therefore f(1, 1) &= (0, 1) \\ f'(x, y) &= \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 3x^2 y & x^3 \end{pmatrix} & \therefore f'(1, 1) &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av $(1, 1)$ och $\det f'(1, 1) = 8 \neq 0$. Då ger

Sats 28: f^{-1} har kont. partiella derivator i omgivning av $(u, v) = (0, 1)$ och

$$\begin{aligned} \underline{(f^{-1})'(0, 1)} &\stackrel{(14)}{=} (f'(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

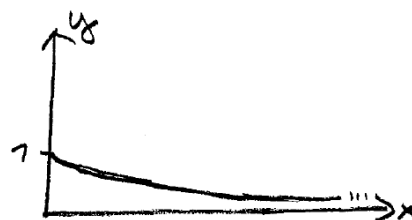
Svar: $x'_u = \frac{1}{8}, x'_v = \frac{1}{4}, y'_u = -\frac{3}{8}, y'_v = \frac{1}{4}$.

1.6.1 Implicita funktioner av en variabel

För $x \geq 0$ definierar ekvationen

$$e^x y = 1$$

en nivåkurva i första kvadranten, som kan uttryckas som en funktion

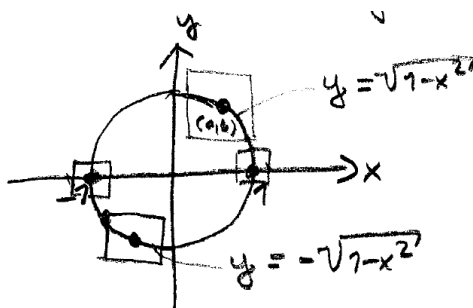


$$y = f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Med andra ord definierar villkoret $e^x y = 1$ y som funktion av x .

Betrakta nu nivåkurvan $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Mot varje $x \in (-1, 1)$ svarar två olika y -värden, så nivåkurvan utgör ingen funktionsgraf.

Men lokalt i en omgivning av varje punkt (a, b) på nivåkurvan med $a \neq \pm 1$ kan ett bågavsnitt av nivåkurvan uttryckas som en funktion:



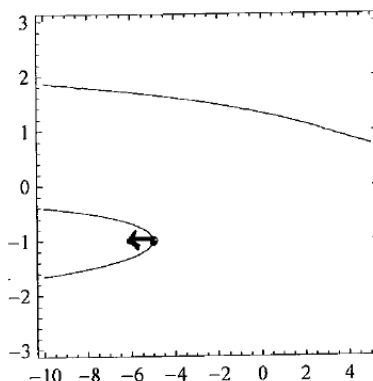
Däremot definierar ingen omgivning av $(-1, 0)$ eller $(1, 0)$ en funktion $y = f(x)$.

Observera att grad $F(x, y) = (2x, 2y)$ är parallell med x -axeln i dessa punkter, $F'_y(\pm 1, 0) = 0$.

Nivåkurvan $F(x, y) = y^5 + xy - 4 = 0$ är för komplicerad för att vi skall kunna explicit lösa ut y som funktion av x i en omgivning av en given punkt (a, b) på kurvan. Då

$$F'_y(x, y) = 5y^4 + x = 0 \iff (x, y) = (-5, -1),$$

verkar det troligt att vi för punkter $(x, y) \neq (-5, -1)$ på kurvan kan hitta en omgivning där nivåkurvan implicit definierar en funktion $y = f(x)$, vilket styrkes av nedanstående bild:



Tillräckliga villkor för att en ekvation, (nivåkurva), $F(x, y) = 0$ lokalt definierar en entydigt bestämd funktion $y(x)$ sådan att $F(x, y(x)) = 0$ ges av existenssatsen för implicita funktioner:

Sats 29. Antag att $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av punkten $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, med $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$.

Då finns en rektangel $D = \{(x, y) : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2\}$, $(a, b) \in D$, så att ekvationen $F(x, y) = 0$ för alla x i $]a_1, a_2[$ har en entydigt bestämd lösning $y(x)$ i $]b_1, b_2[$, så att $y(x)$ är deriverbar i $]a_1, a_2[$ och

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))y'(x) = 0. \quad (15)$$

Anmärkning. Formel (15) kallas formeln för implicit derivering (av $F(x, y) = 0$ med avseende på x).

Bevis. Definiera avbildningen G från xy -planet till uv -planet genom

$$(u, v) = G(x, y) = (x, F(x, y)),$$

$$\text{alltså } \begin{cases} u = x, \\ v = F(x, y). \end{cases}$$

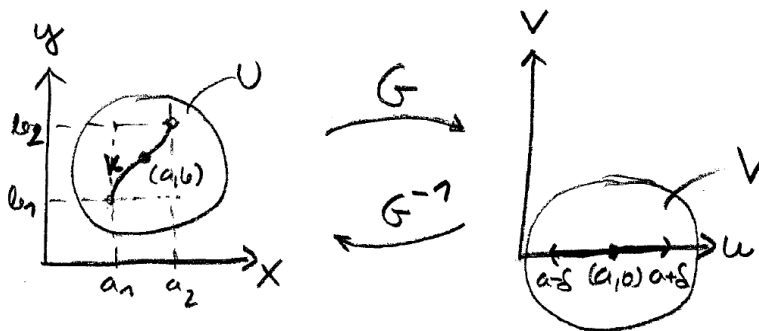
Då gäller: $(a, b) \xrightarrow{G} (a, F(a, b)) = (a, 0)$ och

$$G'(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F'_x(a, b) & F'_y(a, b) \end{pmatrix}, \quad \frac{d(u, v)}{d(x, y)}(a, b) = F'_y(a, b) \neq 0.$$

Sats 28 ger att det existerar en omgivning U av (a, b) och en omgivning V av $(a, 0)$, så att $G^{-1} : V \cap U$ existerar och är kontinuerligt deriverbar i V . Då har G^{-1} formen

$$\begin{cases} x = u \\ y = H(u, v) \end{cases}, \quad H \text{ kontinuerligt deriverbar.} \quad (*)$$

Avbildningen är definierad i V och speciellt i ett öppet intervall $(a - \delta, a + \delta)$ på u -axeln, som avbildas entydigt och omvändbart på en punktmängd K i U , (som är en kurva).



Enligt (*) har kurvan K ekvationen $\begin{cases} x = u \\ y = H(u, 0) \end{cases}, \quad a - \delta < u < a + \delta.$

Sätt: $y(x) := H(x, 0)$, där $a - \delta < x < a + \delta$, som då är kontinuerligt deriverbara.

Nu är $V = F(x, y) = F(u, H(u, v))$ och $0 = F(u, H(u, 0)) = F(x, H(x, 0)) = F(x, y(x))$, så $y(x)$ satisfierar ekvationen $F(x, y) = 0$ på intervallet $]a_1, a_2[$.

Derivering av $\varphi(x) = F(x, y(x)) = 0$ med avseende på x ger

$$0 = \varphi'(x) = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F'_x(x, y(x)) \cdot 1 + F'_y(x, y(x)) \cdot y'(x),$$

vilket ger formel (15). □

Exempel 62. Betrakta igen nivåkurvan

$$F(x, y) = y^5 + xy - 4 = 0.$$

Punkten $(x, y) = (3, 1)$ ligger på kurvan, $F(3, 1) = 0$.

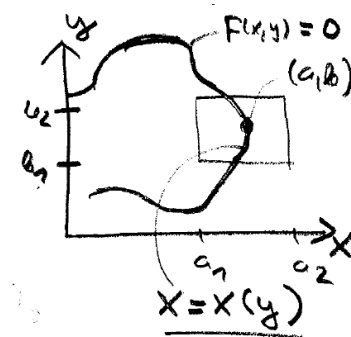
$F(x, y)$ är ett polynom som är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $(3, 1)$ och $F'_y(x, y) = 5y^4 + x \implies F'_y(3, 1) = 5 \cdot 1 + 3 = 8 \neq 0$.

Sats 29 ger att det finns en rektangel $D =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ så att $(3, 1) \in D$ och så att $F(x, y) = 0$ har en entydigt bestämd lösning $y(x)$ i $]b_1, b_2[$ för alla $x \in]a_1, a_2[$. Vidare ger formel (15) att: $(y(3) = 1)$

$$\underline{\underline{y'(3)}} = -\frac{F'_x(3, 1)}{F'_y(3, 1)} = -\frac{1}{\underline{\underline{8}}}. \quad (F'_x(x, y) = y)$$

Anmärkning. till Sats 29.

Om $F'_y(a, b) = 0$, men $F'_x(a, b) \neq 0$ och alla andra antaganden i satsen är uppfyllda, så kan vi hitta en rektangel $D =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$, så att $(a, b) \in D$ och så att $F(x, y) = 0$ för alla $y \in]b_1, b_2[$ har en entydigt bestämd lösning $x(y)$ i $]a_1, a_2[$, så att $x(y)$ är deriverbar i $]b_1, b_2[$ och



$$F'_x(x(y), y) \cdot x'(y) + F'_y(x(y), y) = 0. \quad (15')$$

(Implicit derivering av $F(x, y) = 0$, med avseende på y .)

Exempel 63. Fortfarande betraktas nivåkurvan

$$F(x, y) = y^5 + xy - 4 = 0.$$

Denna gång i punkten $(-5, -1)$, som enligt tidigare är en punkt där $F'_y(x, y) = 0$. $F'_x = y$ och $F'_x(-5, -1) = -1 \neq 0$, så föregående anmärkning garanterar att $F(x, y) = 0$ har en entydigt bestämd deriverbar lösning $x = x(y)$ i ett intervall $]b_1, b_2[$ innehållande $y = -1$. Men denna lösning ges ju explicit av

$$x = x(y) = \frac{1}{y}(4 - y^5).$$

Anmärkning. Observera att Sats 29 enbart ger tillräckliga villkor för att $F(x, y) = 0$ lokalt definierar $y(x)$ entydigt. Exempelvis

$$F(x, y) = x^3 - y^3 = 0, \quad F(0, 0) = 0,$$

är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $(0, 0)$:

$$F'_y = -3y^2, \quad F'_y(0, 0) = 0, \quad (F'_x = 3x^2, \quad F'_x(0, 0) = 0),$$

men $F(x, y) = 0$ definierar

$$y = y(x) = x, \quad (\text{och } x = x(y) = y)$$

Definition 26. Låt $F(x, y) = 0$ definiera en nivåkurva och antag att F är en kontinuerligt deriverbar i en omgivning av en punkt (a, b) med $F(a, b) = 0$. Då är (a, b) en regulär punkt (ordinär punkt) på kurvan om $\nabla F(a, b) \neq \bar{0}$, dvs. $F'_x(a, b) \neq 0$ eller $F'_y(a, b) \neq 0$. Om $\nabla F(a, b) = \bar{0}$ är (a, b) en singulär punkt.

Sats 29 ger inte besked om kurvans utseende i närheten av en singulär punkt. Vi ger några exempel på hur en kurva kan se ut i sådana fall. Föregående anmärkning visade ett exempel där vi kunde bestämma $y = y(x)$ och $x = x(y)$ i en omgivning av $(0, 0)$.

Exempel 64. (Isolerad punkt). Låt $F(x, y) = x^2 + y^2 - x^4 = 0$.

$F(0, 0) = 0 \implies (0, 0)$ punkt på kurvan.

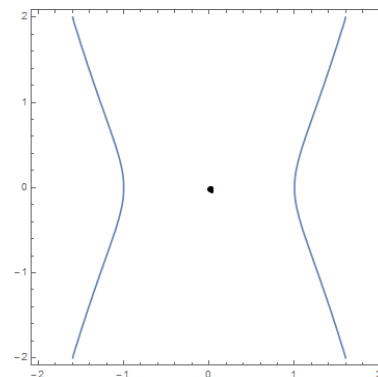
$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 2x - 4x^3, \\ F'_x(0, 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F'_y(x, y) = 2y \\ F'_y(0, 0) = 0 \end{cases} \quad \therefore (0, 0) \text{ singulär punkt}.$$

$$F(x, y) = 0 \iff y^2 = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$$

$$\therefore 0 \leq y^2 = x^2(x^2 - 1)$$

$\therefore$ För $x \in (-1, 1)$ löser endast $x = 0, y = 0$ denna olikhet

$\therefore (0, 0)$ isolerad punkt på kurvan $F(x, y) = 0$.



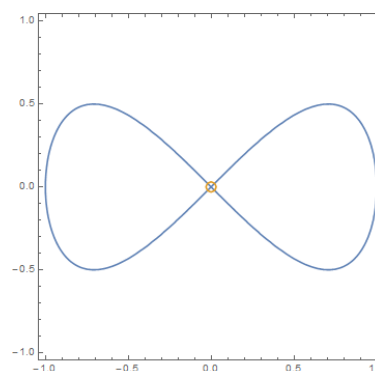
Exempel 65. (*Dubbelpunkt*). Betrakta nivåkurvan $F(x, y) = x^2 - y^2 - x^4 = 0$. $F(0, 0) = 0$.

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 2x - 4x^3, \\ F'_x(0, 0) = 0, \end{cases}, \quad \begin{cases} F'_y(x, y) = -2y, \\ F'_y(0, 0) = 0. \end{cases} \quad (0, 0) \text{ singulär punkt}.$$

$F(x, y) = 0 \iff y^2 = x^2(1 - x^2)$. Kurvan kan delas upp i två grenar

$$\begin{cases} y_1(x) = \sqrt{x^2(1 - x^2)}, & x \in [-1, 1], \\ y_2(x) = -\sqrt{x^2(1 - x^2)}, & x \in [-1, 1], \end{cases}$$

med en dubbelpunkt i origo. $F(x, y_1(x)) = 0$ och $F(x, y_2(x)) = 0$ i en omgivning av origo.



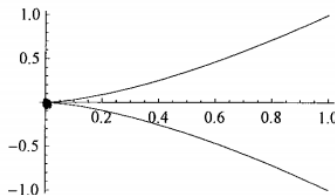
Exempel 66. $F(x, y) = x^3 - y^2 = 0$. $F(0, 0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F'_x(x, y) = 3x^2 \\ F'_y(x, y) = -2y \end{array} \right\} \therefore F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0), \quad (0, 0) \text{ singulär punkt}.$$

$F(x, y) = 0 \iff y^2 = x^3$. Kurvan kan delas upp i två grenar

$$\begin{cases} y_1(x) = x^{\frac{3}{2}}, & x \geq 0, \\ y_2(x) = -x^{\frac{3}{2}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

som bildar en spets i origo.



1.6.2 Implicita funktioner av flera variabler

Antag att sambandet $F(x, y, z) = 0$ definierar en yta sådan att $F(a, b, c) = 0$, och att de partiella derivatorna F'_x , F'_y , F'_z är kontinuerliga i en omgivning av (a, b, c) . Antag vidare att $F'_z(a, b, c) \neq 0$. Då är $z = z(x, y)$ i något rätblock D kring punkten (a, b, c) ,

$$D = \{(x, y, z) : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2, c_1 < z < c_2\}$$

Då gäller

$$F(x, y, z(x, y)) = 0, \quad a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2,$$

och vi kan derivera implicit med avseende på x och y :

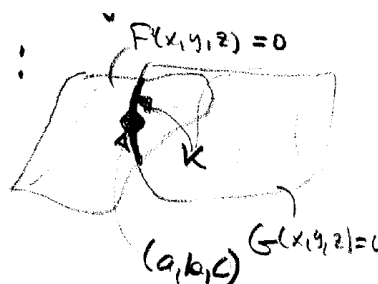
$$\begin{cases} F'_x(x, y, z(x, y)) \cdot 1 + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y, z(x, y)) \cdot 1 + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Nu kan vi, (utan bevis), formulera en motsvarighet till Sats 29 för ett ekvationssystem

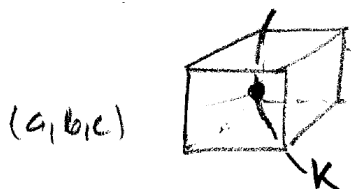
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Vi ger en motiverande geometrisk beskrivning. Antag att $F(a, b, c) = G(a, b, c) = 0$, så att punkten (a, b, c) ligger på skärningskurvan K mellan de två nivåytorna:

Antag att $\frac{d(F, G)}{d(y, z)} \neq 0$.



Då uppfylls för ett rätblock D :



$$\begin{cases} x \in]a_1, a_2[\\ y \in]b_1, b_2[\\ z \in]c_1, c_2[\end{cases}$$

För varje $x \in]a_1, a_2[$ existerar entydig lösning $(x, y(x), z(x))$ till ekvationssystemet $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

Inne i D kan då rymdkurvan K framställas med parameterframställningen:

$$(x, y(x), z(x)), \quad a_1 < x < a_2,$$

och $y = y(x)$, $z = z(x)$ har kontinuerliga derivator och implicit derivering av F och G ger:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z) \cdot 1 + F'_y(x, y, z) \cdot y'(x) + F'_z(x, y, z) \cdot z'(x) = 0 \\ G'_x(x, y, z) \cdot 1 + G'_y(x, y, z) \cdot y'(x) + G'_z(x, y, z) \cdot z'(x) = 0 \end{cases}$$

Vi formulerar nu satsen för ett dylikt ekvationssystem.

Sats 30. Antag att $F(x, y, z)$ och $G(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av (a, b, c) , där $F(a, b, c) = G(a, b, c) = 0$.

Antag att $\frac{d(F, G)}{d(y, z)} \neq 0$. Då finns ett rätblock $D = \{(x, y, z) : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2, c_1 < z < c_2\}$ som innehåller (a, b, c) , så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

för varje $x \in]a_1, a_2[$ har en entydigt bestämd lösning $(x, y(x), z(x))$, $y(x) \in]b_2, b_1[$, $z(x) \in]c_1, c_2[$.

Funktionerna $y(x)$ och $z(x)$ har kontinuerliga derivator som uppfyller:

$$\begin{cases} F'_x(x, y(x), z(x)) + F'_y(x, y(x), z(x))y'(x) + F'_z(x, y(x), z(x))z'(x) = 0, \\ G'_x(x, y(x), z(x)) + G'_y(x, y(x), z(x))y'(x) + G'_z(x, y(x), z(x))z'(x) = 0. \end{cases}$$

Anmärkning. För den allmännaste formuleringen hänvisas till kursboken[1] för en motivering (ett bevis) som följer linjerna, av vårt bevis av Sats 29. Vi nöjer oss med att formulera satsen:

Sats 31. Antag att $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Betrakta ekvationssystemet $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$, ($\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$) utskrivet i komponentform:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Antag att $f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0}$, ($\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$), att $f_j : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $(\bar{a}, \bar{b})$ och att

$\frac{d(f_1, \dots, f_m)}{d(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$ i punkten $(\bar{a}, \bar{b})$.

Då finns i $\mathbb{R}^{n+m}$ en omgivning av punkten $(\bar{a}, \bar{b})$ sådan att lösningarna $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) =$

$(\bar{x}, \bar{y})$ till (16) i omgivningen definierar $\bar{y}$ entydigt som funktion av $\bar{x}$, $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$, dvs.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

Funktionerna $y_1, \dots, y_m$ är definierade i en tillräckligt liten omgivning av $\bar{x}$ och är där kontinuerligt deriverbara. Då gäller i omgivningen $f(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})) = \bar{0}$ och $\bar{y}(\bar{a}) = \bar{b}$. Funktionalmatrisen för $\bar{y}(\bar{x})$ erhålls genom implicit derivering: $\bar{y}'(\bar{x}) = - \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$.

Exempel 67. Visa att $x^5 + y^3 + z^4 - (x^2 + y^2)z = 1$ lokalt kring $(1, 1, 1)$ definierar z som funktion av x och y . Beräkna $z'_x(1, 1)$ och $z'_y(1, 1)$.

Lösning: Sätt $f(x, y, z) = x^5 + y^3 + z^4 - (x^2 + y^2)z - 1$.

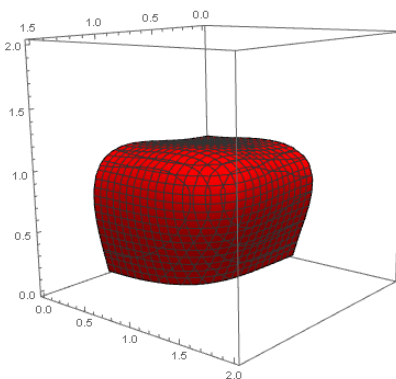
$$\begin{cases} f'_z(x, y, z) = 4z^3 - x^2 - y^2, & \begin{cases} f'_x = 5x^4 - 2xz \\ f'_y = 3y^2 - 2yz \end{cases} \\ f'_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0. \end{cases}$$

$\therefore f'_x, f'_y$ och f'_z kontinuerliga i omgivning av $(1, 1, 1)$ och $f'_z(1, 1, 1) \neq 0$.

Då är, enligt sidan 101, $z = z(x, y)$ i något rätblock D innehållande $(1, 1, 1)$.

Vidare är $z = z(1, 1) = 1$ och formlerna på sida 101 ger:

$$\begin{cases} \underline{z'_x(1, 1)} = -\frac{f'_x(1, 1, 1)}{f'_z(1, 1, 1)} = -\frac{5-2}{2} = -\frac{3}{2}, \\ \underline{z'_y(1, 1)} = -\frac{f'_y(1, 1, 1)}{f'_z(1, 1, 1)} = -\frac{3-2}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



Exempel 68. Visa att sambandet

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \sin(x + y) + \sin(y + z) + z = 0, \\ g(x, y, z) = \cos(x + y) + \cos(y + z) + y - 2 = 0, \end{cases}$$

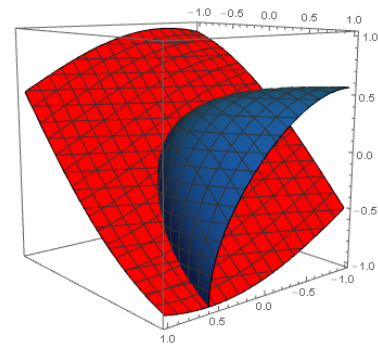
i en omgivning av $(0, 0, 0)$ entydigt definierar (x, y) som en kontinuerligt deriverbar funktion av z , dvs. $x = x(z)$ och $y = y(z)$.

Lösning: Skärningskurvan $K = (x(z), y(z), z)$.

Kollar villkoren i Sats 30:

$$f(0, 0, 0) = 0 = g(0, 0, 0).$$

klart att f'_x, f'_y, f'_z och g'_x, g'_y, g'_z är kontinuerliga i en omgivning av $(0, 0, 0)$.



$$\begin{aligned} \frac{d(f, g)}{d(x, y)}(0, 0, 0) &= \left| \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} \right|_{(x, y, z)=(0, 0, 0)} \\ &= \left| \begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) + \cos(y + z) \\ -\sin(x + y) & -\sin(x + y) - \sin(y + z) + 1 \end{pmatrix} \right|_{(0, 0, 0)} = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ Då ger Sats 30 att skärningskurvan K i en omgivning av $(0, 0, 0)$ entydigt framställs av $(x(z), y(z), z)$, där $x(z)$ och $y(z)$ är kontinuerligt deriverbara för z i en omgivning av $z = 0$.

Vi kan dessutom beräna tangenriktningen i punkten $(0, 0, 0)$ för skärningskurvan K , den ges ju av $(x'(0), y'(0), 1)$. Genom implicit derivering av sambanden $f(x(z), y(z), z) = 0$ och $g(x(z), y(z), z) = 0$ med avseende på z erhålls:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'_x(x(z), y(z), z) \cdot x'(z) + f'_y(x(z), y(z), z) \cdot y'(z) + f'_z(x(z), y(z), z) = 0 \\ g'_x(x(z), y(z), z) \cdot x'(z) + g'_y(x(z), y(z), z) \cdot y'(z) + g'_z(x(z), y(z), z) = 0 \end{cases} \\ \stackrel{(Kolla!)}{\iff} & \begin{cases} \cos(x+y)(x'(z) + y'(z)) + \cos(y+z)(y'(z) + 1) + 1 = 0 \\ -\sin(x+y)(x'(z) + y'(z)) - \sin(y+z)(y'(z) + 1) + y'(z) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Insättning av $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ger:

$$\begin{cases} 1 \cdot (x'(0) + y'(0)) + 1 \cdot (y'(0) + 1) + 1 = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

Vilket ger att $x'(0) = -2$ och $y'(0) = 0$.

Skärningskurvan K har då i punkten $(0, 0, 0)$ tangenriktningen $(-2, 0, 1)$.

1.7 Om Derivering av Integraler

För en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ ger analysens huvudsats att funktionen $S(x)$,

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

har en kontinuerlig derivata $S'(x) = f(x)$ på $[a, b]$, och funktionen

$$T(x) = \int_x^b f(t) dt = - \int_b^x f(t) dt$$

har kontinuerliga derivatan $T'(x) = -f(x)$.

Derivering av S och T är specialfall av problemet att uttrycka derivatan av en funktion $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy,$$

i derivator av funktionerna α, β och f .

Vi betraktar först ett specialfall:

Sats 32. Antag att $f(x, y)$ och $f'_x(x, y)$ är kontinuerliga på rektangeln $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$.

Då gäller:

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy,$$

och derivatan är en kontinuerlig funktion av x .

Bevis. Sätt $L(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy$. Då gäller

$$\begin{aligned} \left| \frac{L(x+h) - L(x)}{h} - \int_{\alpha}^{\beta} f'_x(x, y) dy \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - f'_x(x, y) \right) dy \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)) dy \right|, \quad 0 < \theta < 1, \quad (\text{Medelvärdessatsen}) \end{aligned}$$

Enligt antagandet är f'_x kontinuerlig på den kompakta mängden D , och därmed likformigt kontinuerlig på D , (Sats 12). Men då får vi uppskattningen:

$$|f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)| \leq M(h),$$

där $M(h)$ är oberoende av x och y , och $M(h) \rightarrow 0$, då $h \rightarrow 0$. Alltså:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)) dy \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)| dy \leq M(h)(\beta - \alpha) \rightarrow 0, \quad \text{då } h \rightarrow 0.$$

$\therefore L'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f'_x(x, y) dy$. Att $L'(x)$ är kontinuerlig inses genom att välja $x_0 \in [a, b]$ och betrakta:

$$\begin{aligned}
|L'(x_0 + h) - L'(x_0)| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f'_x(x_0 + h, y) - f'_x(x_0, y)) dy \right| \\
&\leq \int_{\alpha}^{\beta} |f'_x(x_0 + h, y) - f'_x(x_0, y)| dy \leq M_2(h)(\beta - \alpha) \longrightarrow 0, h \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

igen med stöd av f'_x :s likformiga kontinuitet, så $L'(x_0 + h) \longrightarrow L'(x_0)$, då $h \longrightarrow 0$. $\therefore$ L' kontinuerlig.

□

Exempel 69. Bestäm derivatan av funktionen

$$I(x) = \int_1^2 \frac{\sin(xy)}{y} dy.$$

Lösning: $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{y}$ och $f'_x(x, y) = \cos(xy)$ är kontinuerliga på $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 1 \leq y \leq 2\}$. Sats 32 ger att:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I'(x)}} &= \int_1^2 f'_x(x, y) dy = \int_1^2 \cos(xy) dy = \left[\frac{\sin(xy)}{x} \right]_1^2 \\
&= \frac{\sin 2x}{x} - \frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{x} \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}}.
\end{aligned}$$

Betrakta nu det allmänna problemet att derivera

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Vi får följande generalisering av Sats 32:

Sats 33. Antag att $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är deriverbara funktioner med värden i intervallet $c \leq y \leq d$.

Antag att $f(x, y)$ och $f'_x(x, y)$ är kontinuerliga på rektangeln $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Då gäller:

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

Bevis. Definiera funktionen $F : \mathbb{R}^{3 \curvearrowright} \mathbb{R}$ genom:

$$F(x, u, v) = \int_v^u f(x, y) dy.$$

Då gäller: $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = F(x, \beta(x), \alpha(x))$.

Med stöd av Sats 32 är $F'_x = \int_v^u f'_x(x, y) dy$ och $F'_u = f(x, u)$, $F'_v = -f(x, v)$. Kedjeregeln ger:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \\ \begin{bmatrix} u = \beta(x) \\ v = \alpha(x) \end{bmatrix} &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x). \end{aligned}$$

□

Exempel 70. Beräkna för $a > 0$ integralen

$$F(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx.$$

Lösning: Sats 33 ger:

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^a \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{1+ax} dx + \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2} \cdot 1 \\ &\left[\frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+ax} = \frac{1}{1+a^2} \left(\frac{a+x}{1+x^2} - \frac{a}{1+ax} \right) \quad \text{Partialbråksuppdelning (Kolla!)} \right. \\ &\left. \int_0^a \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)} dx = \frac{1}{1+a^2} (a \cdot \arctan(a) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2)) \quad (Kolla!) \right] \end{aligned}$$

Då erhålls: $F'(a) = \frac{a \arctan a}{1+a^2} + \frac{1}{2} \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}$.

Nu är ju $F(a) = F(a) - F(0) = \int_0^a F'(t) dt$.

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{t \cdot \arctan t}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^a \arctan t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &\stackrel{P.I.}{=} \frac{1}{2} \left([\arctan t \cdot \ln(1+t^2)]_0^a - \int_0^a \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt \right)\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{F(a) = \frac{1}{2} \arctan(a) \cdot \ln(1+a^2)}.$$

Exempel 71. Visa att funktionen

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t) \ln(1+t^2) dt$$

är en lösning till differentialekvationen

$$y'' + y = \ln(1+x^2).$$

Lösning: Vi tillämpar Sats 33 två gånger:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \int_0^x \cos(x-t) \ln(1+t^2) dt + \sin(x-x) \ln(1+x^2) \cdot 1 \\ &= \int_0^x \cos(x-t) \ln(1+t^2) dt \\ y''(x) &= \int_0^x -\sin(x-t) \ln(1+t^2) dt + \cos(x-x) \ln(1+x^2) \cdot 1 \\ &= \ln(1+x^2) - \int_0^x \sin(x-t) \ln(1+t^2) dt \\ &= \ln(1+x^2) - y(x)\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{y''(x) + y(x) = \ln(1+x^2)}. \square$$

För att få derivera en generaliserad integral under integraltecknet krävs flera antaganden.

Vi ger utan bevis Satsen:

Sats 34. Antag att D är området

$$D = \{(x, y) : a < x < b, c \leq y \leq d\},$$

där "värdena" $-\infty$ och ∞ är tillåtna för a respektive b . Antag vidare att:

1°) $f(x, y)$ är kontinuerlig på D ,

2°) $\int_a^b f(x, y)dx$ existerar för varje $y \in [c, d]$,

3°) $f'_y(x, y)$ kontinuerlig i D och begränsas av en funktion $\mu(x)$, $|f'_y(x, y)| \leq \mu(x)$, för vilken $\int_a^b \mu(x)dx$ existerar.

Då är $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ deriverbar i $[c, d]$, med

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx.$$

Exempel 72. Beräkna för $y > 0$ integralen $\int_0^\infty (x^2 + y^2)^{-2}dx$ genom derivering av $\int_0^\infty (x^2 + y^2)^{-1}dx$.

Lösning: $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ och $f'_y(x, y) = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$ är kontinuerliga i $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Låt c och d vara godtyckliga tal sådana att $0 < c < d$. För alla $y \in [c, d]$ gäller:

$$|f'_y(x, y)| = \left| \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{2d}{(x^2 + c^2)^2} =: \mu(x),$$

och $\int_0^\infty \mu(x)dx$ är konvergent. Vidare är även $\int_0^\infty (x^2 + y^2)^{-1}dx$ konvergent för $y \in [c, d]$.

Då ger Sats 34 att: $F(y) = \int_0^\infty (x^2 + y^2)^{-1}dx$ är deriverbar med $F'(y) = \int_0^\infty \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}dx$ för alla $y \in [c, d]$.

Men

$$F(y) = \frac{1}{y} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{y}dx}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{y} \left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2y},$$

och därmed $F'(y) = -\frac{\pi}{2y^2}$. Alltså:

$$\int_0^\infty \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{\pi}{2y^2},$$

och därmed gäller:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3}.$$

Flerdimensionell Analys

Del 2

2.1 Taylors Formel

2.1.1 Avbildningar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

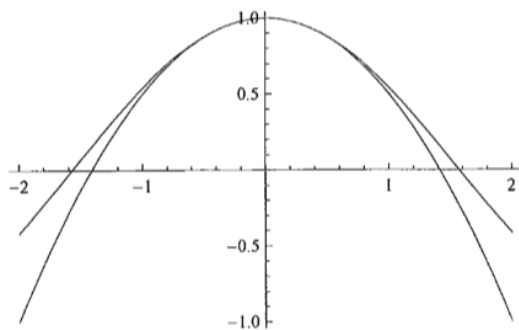
En funktion $f(x)$ som har kontinuerliga derivator upp till ordning $n + 1$ i en omgivning $|x - a| < d$ av punkten a kan enligt Taylors formel uttryckas

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

där Lagranges restterm ges av

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \quad \xi(x) \in [a, x], \quad ([x, a], \text{ om } x < a)$$

Vi har Taylorutvecklat $f(x)$ kring punkten a . Om $a = 0$ utförs en Maclauriutveckling av f kring 0. Exempelvis ges Maclaurinpolynomet av gradtal två, $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$, till $f(x) = \cos x$ av $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, som ger en hyfsad approximation i närheten av $x = 0$ till $\cos x$:



Vi gör en omskrivning av Taylors formel och låter ett fixt x spela rollen av a , då kan Taylors formel skrivas

$$f(x+h) = P_n(h) + R_{n+1}(h),$$

där

$$P_n(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

och

$$R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad x < \xi(h) < x+h.$$

Då är $f(x+h) \approx P_n(h)$ för h "tillräckligt" nära 0.

Denna omformulering av Taylors formel är välanpassad till generalisering till avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som är differentierbara i punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Det gäller ju då att

$$f(\bar{x} + \bar{h}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot \bar{h} + |\bar{h}|R(\bar{h}),$$

där $R(\bar{h}) \rightarrow 0$, då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$ och $f'(\bar{x}) = \text{grad } f(\bar{x})$.

En sådan funktion kan ju approximeras linjärt i en liten omgivning av $\bar{x}$ med

$$f(\bar{x} + \bar{h}) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot \bar{h}.$$

Exempelvis i fallet $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, med $\bar{h} = (h, k)$ fås

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot \bar{h} &= f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= c + Ah + Bk, \end{aligned}$$

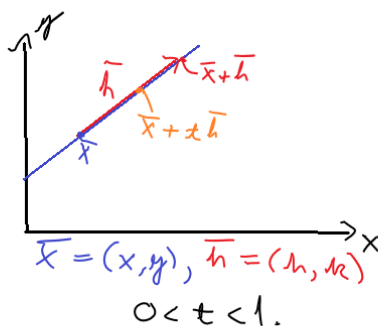
där A, B och C är konstanter. Vi nöjer oss med att generalisera Taylors formel till $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1.2 Taylors formel för avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Sats 35. (Taylors formel). Antag att $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n + 1$ i en omgivning av punkten (x, y) . Då gäller:

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) &= f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x + \tau h, y + \tau k), \quad 0 < \tau < 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Bevis. Låt satsens antaganden gälla för punkten (x, y) och definiera funktionen $\varphi(t)$ genom $\varphi(t) = f(x + th, y + tk)$. Då kan vi derivera φ kontinuerligt upp till ordning $n + 1$, dvs. φ har en Maclaurinutveckling som ges av



$$(\star) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

där $\tau \in (0, 1)$. Nu gäller det att $\varphi(1) = f(x + h, y + k)$, så insättning av $t = 1$ i formel $(\star)$ ger:

$$(\star\star) \quad f(x+h, y+k) = f(x, y) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}, \quad 0 < \tau < 1.$$

Det gäller alltså att beräkna $\varphi^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, n+1$, vilket kan göras med operatorskrivsättet:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt} f(x+th, y+tk) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(\bar{x} + t\bar{h}), \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\bar{x} + t\bar{h}), \\ &\vdots \\ \frac{d^n\varphi}{dt^n} &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} h^m k^{n-m} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(\bar{x} + t\bar{h}). \end{aligned}$$

Om vi sätter $t = 0$ i derivatorna och inför dem i formel $(\star\star)$ erhålls (17). □

Anmärkning. Formel (17) utan operatorbeteckning blir:

$$f(x+h, y+k) = P_n(h, k) + R_{n+1}(h, k), \quad (17')$$

där

$$\begin{aligned} P_n(h, k) &= f(x, y) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} h^m k^{n-m} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}}(x, y) \right) \end{aligned}$$

och

$$R_{n+1}(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} h^m k^{n+1-m} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^m \partial y^{n+1-m}}(x + \tau h, y + \tau k) \right),$$

där $0 < \tau < 1$.

Exempel 73. Bestäm Taylor polynomet av 2:a ordningen i punkten $(2, 3)$ till $f(x, y) = e^{xy}$.

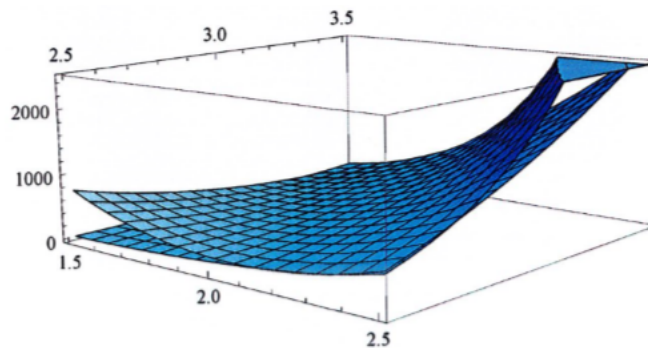
Lösning: Metod I: (Återkommer senare till metod II)

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = ye^{xy}, & f'_x(2, 3) = 3e^6 \\ f'_y(x, y) = xe^{xy}, & f'_y(2, 3) = 2e^6 \\ f''_{xx}(x, y) = y^2e^{xy}, & f''_{xx}(2, 3) = 9e^6 \\ f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = (xy + 1)e^{xy}, & f''_{xy}(2, 3) = 7e^6 \\ f''_{yy}(x, y) = x^2e^{xy}, & f''_{yy}(2, 3) = 4e^6 \\ f(2, 3) = e^6 \end{cases}$$

$$Vi \text{ har } \begin{cases} 2 + h = x \\ 3 + k = y \end{cases} \iff \begin{cases} h = x - 2 \\ k = y - 3 \end{cases}$$

Med stöd av formel (17') erhålls:

$$\begin{aligned} \underline{P_2} &= f(2, 3) + hf'_x(2, 3) + kf'_y(2, 3) + \frac{1}{2} (h^2 f''_{xx}(2, 3) + 2hk f''_{xy}(2, 3) + k^2 f''_{yy}(2, 3)) \\ &= e^6 + 3e^6 h + 2e^6 k + \frac{1}{2} 9e^6 h^2 + 7e^6 hk + 2e^6 k^2 \\ &= e^6 \left(1 + 3(x - 2) + 2(y - 3) + \frac{9}{2}(x - 2)^2 + 7(x - 2)(y - 3) + 2(y - 3)^2 \right) \\ &= e^6 \left(\frac{9}{2}x^2 + 7xy + 2y^2 - 36x - 24y + 67 \right). \end{aligned}$$



I punkten $(x, y) = (0, 0)$ övergår formel (17) i Maclaurins formel:

$$\begin{aligned} f(h, k) &= f(0, 0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(0, 0) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\tau h, \tau k), \quad 0 < \tau < 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Andra ordningens utvecklingar kan ges en matrisframställning. Vi har:

$$h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \bar{h} = f'(\bar{x}) \cdot \bar{h}$$

och

$$\begin{aligned} &h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= (h, k) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \bar{h}^T \cdot H(\bar{x}) \cdot \bar{h}, \end{aligned}$$

där $H(\bar{x})$ kallas Hessematrisen. Vi kan alltså skriva Taylorpolynomet av ordning 2:

$$P_2(h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T H(\bar{x}) \bar{h}. \tag{19}$$

2.2 Ordobegreppet för polynom av två variabler

Ett polynom av två variabler kan skrivas som en summa av termer $a_{ij}h^i k^j$, där a_{ij} är konstant och i, j är naturliga tal, exempelvis:

$$P(h, k) = 5h^2k^1 - kh + 3h - 2k.$$

Definition 27. *Graden av en term $a_{ij}h^i k^j$ i ett polynom är $i + j$ om $a_{ij} \neq 0$, och $-\infty$ om $a_{ij} = 0$. Ett polynom är homogent om alla termer har samma grad. Ett polynom är på standardform, om det inte har två termer med samma i - och j -index. Graden av ett polynom är det högsta gradtalet hos polynomets termer, då polynomet är i standardform.*

Anmärkning. *Då vi definierat grad $0 = -\infty$ gäller det att grad $p \cdot q = \text{grad } p + \text{grad } q$, även om p eller q är konstanten 0.*

Exempel 74. *Polynomet $p(h, k) = 2 + h + 3h^2k - 5hk^2$ har graden 3. Summan $3h^2k - 5hk^2$ är ett homogent polynom av graden 3. Polynomet*

$$p(h, k) = 1 + k + h^2(1 - k)^2 - h^2k^2$$

är av graden 3, vilket framgår ur dess standardform

$$p(h, k) = 1 + k + h^2 - 2h^2k + h^2k^2 - h^2k^2 = 1 + k + h^2 - 2h^2k.$$

Definition 28. *Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och sätt $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Funktionen f sägs vara av stort ord r^n då $r \rightarrow 0$, betecknat $f = O(r^n)$, då $r \rightarrow 0$, om kvoten*

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{r^n}$$

är begränsad i en omgivning U av $(0, 0, \dots, 0)$.

Tolkning: Det finns en omgivning U av $(0, \dots, 0)$ där f kan uttryckas med hjälp av en begränsad funktion $H(x_1, \dots, x_n)$, enligt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r^n \cdot H(x_1, \dots, x_n).$$

2.2.1 Ordo-algebran för avbildningar $f : \mathbb{R}^{2 \curvearrowright} \mathbb{R}$

$$\text{Antag att } \begin{cases} f(x, y) = O(r^4) \\ g(x, y) = O(r^3) \end{cases}, \quad \text{då } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

Då finns $F(x, y)$, $G(x, y)$ begränsade i någon omgivning U av $(0,0)$, så att $\forall (x, y) \in U$ gäller:

$$f(x, y) = r^4 F(x, y),$$

$$g(x, y) = r^3 G(x, y).$$

För alla $(x, y) \in U$ gäller då:

$$f(x, y) \pm g(x, y) = r^3 [rF(x, y) \pm G(x, y)],$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y) = r^7 [rF(x, y) \cdot G(x, y)],$$

där uttrycken innanför klamrarna är begränsade i U , med andra ord:

$$\begin{cases} f \pm g = O(r^3) \\ f \cdot g = O(r^7) \end{cases}, \quad \text{då } r \rightarrow 0.$$

Allmänt gäller följande formler:

$$O(r^p) \pm O(r^q) = O(r^p), \text{ om } p \leq q,$$

$$O(r^p) \cdot O(r^q) = O(r^{p+q}),$$

$$(O(r^p))^n = O(r^{np}),$$

då $r \rightarrow 0$, vid ordo-kalkyler.

Sats 36. Antag att $p(h, k)$ är ett homogent polynom av graden $n > -\infty$. Då gäller:

$$p(h, k) = O(r^n) \text{ och } p(h, k) \neq O(r^\alpha)$$

för alla $\alpha > n$, då $r = |(h, k)| = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$.

Bevis. Då $|h|$ och $|k|$ är $\leq \sqrt{h^2 + k^2} = r$ för alla h och k får vi för en term av graden n att

$$|a_{ij}h^ik^j| \leq |a_{ij}|r^ir^j = |a_{ij}|r^{i+j} = |a_{ij}|r^n,$$

så $a_{ij}h^ik^j = O(r^n)$, då $r \rightarrow 0$. Då alla termer i p är av graden n ger ordo-kalkylen för summor att $p = O(r^n)$, då $r \rightarrow 0$.

Antites: $p = O(r^\alpha)$, då $r \rightarrow 0$, med $\alpha > n$. Då finns en omgivning U av $(0, 0)$ och en begränsad funktion $H(x, y)$, med $|H(x, y)| \leq c$ i U så att

$$(\star) \quad |p(h, k)| = r^\alpha \cdot |H(h, k)| \leq cr^\alpha = c(\sqrt{h^2 + k^2})^\alpha.$$

Då $p \not\equiv 0$ finns i U en punkt $(h_0, k_0) : p(h_0, k_0) \neq 0$. Dessutom gäller $p(th_0, tk_0) = t^n p(h_0, k_0)$, då p är ett homogent polynom av graden n .

För $t < 1$ har vi att $(th_0, tk_0) \in U$, och då ger formel $(\star)$ att:

$$|t|^n |p(h_0, k_0)| = |p(th_0, tk_0)| \leq c \left(\sqrt{(th_0)^2 + (tk_0)^2} \right)^\alpha = c|t|^\alpha \left(\sqrt{h_0^2 + k_0^2} \right)^\alpha,$$

vilket ger att

$$|p(h_0, k_0)| \leq c|t|^{\overbrace{\alpha - n}^{>0}} \cdot \left(\sqrt{h_0^2 + k_0^2} \right)^\alpha \rightarrow 0, \text{ då } 0.$$

Men detta ger en motsägelse, så antitesen är falsk och $p \neq O(r^\alpha)$ för alla $\alpha > n$, då $r \rightarrow 0$. $\square$

Om ett polynom p inte är homogent, så kan det skrivas som en summa av homogena polynom $p = p_1 + \dots + p_k$, och enligt ordokalkylens summaformel är det då det lägsta gradtalet av polynomen $p_1, \dots, p_k$ som bestämmer ordningen för p . Då gäller, (delvis med stöd av Sats 36), följande resultat:

Sats 37. *Om polynomet $p \not\equiv 0$ och n är det lägsta gradtalet hos polynomets termer på standardformen, så är*

$$p = O(r^n) \text{ och } p \neq O(r^{n+1}),$$

då $r \rightarrow 0$.

2.2.2 Taylors formel med ordorestterm

Antag nu att $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordningen $n + 1$ i en omgivning av punkten (x, y) . I en sluten omgivning av (x, y) begränsas de till beloppet av en konstant c . För tillräckligt små h och k i resttermen R_{n+1} i Taylors formel får vi då uppskattningen: ($0 < \tau < 1$)

$$\begin{aligned} |R_{n+1}| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} h^m k^{n+1-m} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^m \partial y^{n+1-m}}(x + \tau h, y + \tau k) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} |h|^m \cdot |k|^{n+1-m} \cdot c \\ &= \frac{1}{(n+1)!} q(|h|, |k|), \end{aligned}$$

där q är ett homogent polynom av grad $n + 1$. Därmed gäller, med stöd av Sats 36, att $R_{n+1} = O(r^{n+1})$, då $r \rightarrow 0$.

Sats 38. *(Taylors formel med ordorestterm). Om $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n + 1$ i en omgivning av (x, y) så är*

$$f(x + h, y + k) = P_n(h, k) + O(r^{n+1}), \quad \text{då } r = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0,$$

där

$$\begin{aligned}
 P_n(h, k) &= f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} h^m k^{n-m} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right) f(x, y).
 \end{aligned}$$

Sats 39. (Taylorutvecklingens entydighet). Om $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n + 1$ i en omgivning av punkten (x, y) och om

$$f(x + h, y + k) = p(h, k) + O(r^{n+1}), \quad \text{då } r = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0,$$

där $p(h, k)$ är ett polynom av gradtal $\leq n$, så är $p(h, k) \equiv p_n(h, k)$, där $P_n(h, k)$ är Taylorpolynomet av gradtal $\leq n$ i Sats 38.

Bevis. Låt $p(h, k)$ vara polynomet i antagandena till Sats 39. Enligt Sats 38 kan f Taylorutvecklas i (x, y) enligt:

$$f(x + h, y + k) = p_n(h, k) + O(r^{n+1}), \quad \text{då } r = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0.$$

Då har vi:

$$p_n(h, k) + O(r^{n+1}) = f(x + h, y + k) = p(h, k) + O(r^{n+1}),$$

vilket ger att

$$p_n(h, k) - p(h, k) = O(r^{n+1}), \text{ då } r \longrightarrow 0.$$

Men $p_n - p$ är ett polynom av gradtal $\leq n$, så Sats 37 ger att $p_n - p \equiv 0$, vilket ger att $p(h, k) \equiv p_n(h, k)$. $\square$

Anmärkning. Entydighetssatsen gör det möjligt att bestämma Taylorutvecklingar ur kända utvecklingar av elementära funktioner, användande ordokalkyl och undvikande partiella deriveringar.

Exempel 75. (Metod II). Bestäm Taylorpolynomet av 2:a ordningen till $f(x, y) = e^{xy}$ i punkten $(2, 3)$.

Lösning: Sätt $\begin{cases} x = 2 + h \\ y = 3 + k. \end{cases}$ Från envariabelanalysen vet vi att $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + O(t^3)$. Vidare får vi:

$$\begin{aligned} e^{xy} &= e^{(2+h)(3+k)} = e^6 \cdot e^{hk+3h+2k} \\ &= e^6 \left(1 + hk + 3h + 2k + \frac{1}{2}(hk + 3h + 2k)^2 + O(r^3) \right) \\ &= e^6 \left(1 + hk + 3h + 2k + \frac{1}{2}(h^2k^2 + 9h^2 + 4k^2 + 6h^2k + 4hk^2 + 12hk) \right) + O(r^3) \\ &= e^6 \left(1 + 3h + 2k + \frac{9}{2}h^2 + 7hk + 2k^2 \right) + O(r^3) \end{aligned}$$

Sats 39 ger: $P_2(h, k) = e^6(1 + 3h + 2k + \frac{9}{2}h^2 + 7hk + 2k^2)$.

Exempel 76. Maclaurinutveckla till och med ordning 2 funktionen $f(x, y) = (1 + \sin(x + y)) \ln(1 + 2x + y) - 2x - y$.

Lösning: Sätt: $\begin{cases} x = h, \\ y = k. \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(t) = t + O(t^3), \\ \ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3). \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\therefore \underline{f(h, k)} &= (1 + h + k + O(r^3)) \left(2h + k - \frac{(2h + k)^2}{2} + O(r^3) \right) - 2h - k \\
&= 2h^2 + 3hk + k^2 - 2h^2 - 2hk - \frac{k^2}{2} + O(r^3) \\
&= \underline{hk + \frac{k^2}{2} + O(r^3)}.
\end{aligned}$$

$$P_2(h, k) = hk + \frac{k^2}{2} = xy + \frac{y^2}{2}$$

Exempel 77. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{3 - \cos x - \cos y - \cos z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Lösning: $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$.

Vi har att $x, y, z = O(r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\begin{aligned}
3 - \cos x - \cos y - \cos z &= 3 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}y^2 + O(y^4) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4) \right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + O(r^4) \\
&= \frac{1}{2}r^2 + O(r^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \underline{\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{3 - \cos x - \cos y - \cos z}{x^2 + y^2 + z^2}} &= [(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \iff r \rightarrow 0] \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}r^2 + O(r^4)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + O(r^2) \right) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

2.3 Extremvärdesproblem

2.3.1 Inledande Exempel

Vi betraktar problemet att för en avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kallad målfunktionen, bestämma lokala eller globala extremvärdespunkter, där f antar ett minimivärde eller maximivärde lokalt eller globalt.

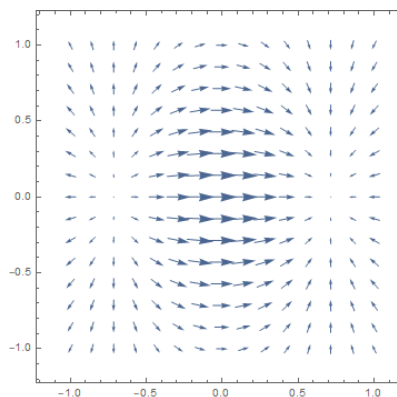
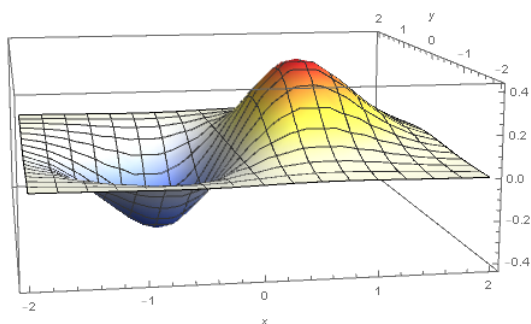
Målfunktionen f kan undersökas på hela sin definitionsmängd (utan bivillkor) eller på en delmängd av D_f specificerad med bivillkor i form av likheter eller olikheter.

Exempel 78. Funktionen $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ antar

$$\underline{\text{globalt maximum}} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e} \approx 0,43,$$

$$\underline{\text{globalt minimum}} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e} \approx -0,43.$$

$$\nabla f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \vec{0}, \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ stationära punkter.}$$



Gradientfältet $\nabla f(x, y)$

Exempel 79. För att bestämma de punkter (x, y) på kurvan $y = x^2$ som ligger närmast punkten $(0, 2)$ kan vi bilda den kvadrerade avståndsfunktionen $f(x, y) = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2$, och sedan bestämma minimum av $f(x, y)$ under bivillkoret $y = x^2$.

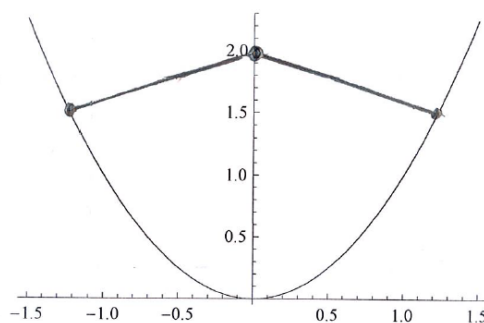
$$g(x) = f(x, x^2) = x^2 + (x^2 - 2)^2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$g\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{7}{2}.$$

Avståndet minimalt = $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,32$

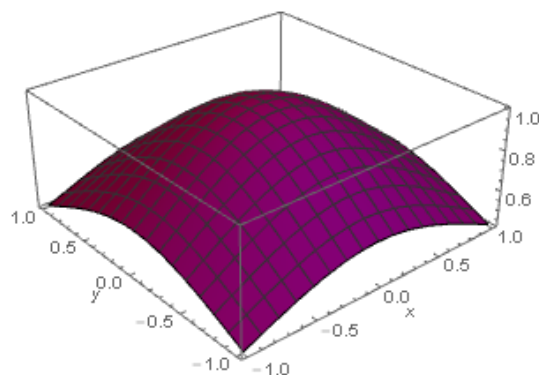
i punkterna $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$.



Exempel 80. Funktionen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ är kontinuerlig på den kompakta mängden $M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ och antar sitt största värde 1 i $(0, 0)$ och sitt minsta värde $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^2})$ i hörnpunkterna $(\pm 1, \pm 1)$ av M .

Mängden M utgör bivillkor i form av olikheter för f .

På sin definitionsmängd $\mathbb{R}^2$ antar f varken lokalt eller globalt minimum.



2.3.2 Lokala maxima och minima

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och antag att $\bar{p} \in D_f$ är en icke-isolerad punkt, dvs. $\forall \varepsilon > 0 : (O_\varepsilon(\bar{p}) \setminus \{\bar{p}\}) \cap D_f \neq \emptyset$. Godtyckligt nära $\bar{p}$ finns andra punkter i D_f .

Definition 29. $f(\bar{p})$ är ett lokalt maximum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f) \implies f(\bar{x}) \leq f(\bar{p})$.

$f(\bar{p})$ är ett strängt lokalt maximum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f \setminus \{\bar{p}\}) \implies f(\bar{x}) < f(\bar{p})$.

$f(\bar{p})$ är ett lokalt minimum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f) \implies f(\bar{x}) \geq f(\bar{p})$.

$f(\bar{p})$ är ett strängt lokalt minimum för f om $\exists \varepsilon > 0 : (\bar{x} \in O_\varepsilon(\bar{p}) \wedge \bar{x} \in D_f \setminus \{\bar{p}\}) \implies f(\bar{x}) > f(\bar{p})$.

Om $f'_{x_1}(\bar{p}) = \dots = f'_{x_n}(\bar{p}) = 0$, eller ekvivalent om $\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}$, kallas

$\bar{p}$ en stationär punkt (kritisk punkt) för f .

Sats 40. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och antag att $\bar{p} \in D_f$ är en inre punkt i D_f . Antag att f har partiella derivator av första ordningen i punkten $\bar{p}$ och att $f(\bar{p})$ är ett lokalt extremvärde.

Då är $\bar{p}$ en stationär punkt för f , dvs. $\text{grad } f(\bar{p}) = \bar{0}$ ($\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}$).

Bevis. Antag att f är definierad i en omgivning av punkten $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$ och att de partiella derivatorna av första ordning existerar i $\bar{p}$. Om f har ett lokalt extremvärde i $\bar{p}$ så är $f'_{x_1}(\bar{p}) = \dots = f'_{x_n}(\bar{p}) = 0$, ty avbildningarna $\varphi_j(x) = f(p_1, \dots, p_{j-1}, x, p_{j+1}, \dots, p_n)$, $\varphi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, har lokala extremvärden i $x = p_j$ och är deriverbara där, så enligt envariabelanalysen gäller: $\varphi'_j(p_j) = 0$, vilket ger att $\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}$. $\square$

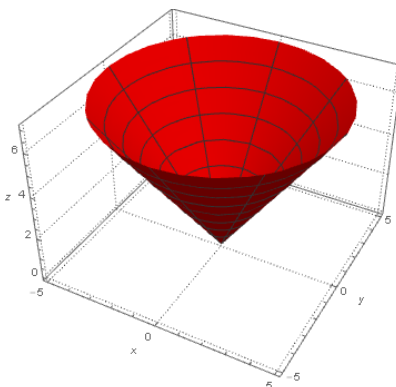
Anmärkning. 1°) Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\bar{p} = (x_0, y_0)$ är punkten i Sats 40, så är tangentplanet till $z = f(x, y)$ i (x_0, y_0) givet av

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

som då är horisontellt, (parallellt med xy -planet)

2°) Om den tillåtna mängden M där vi söker extrempunkter inte är öppen och en extrempunkt (x_0, y_0) ligger på randen av M så behöver inte $\nabla f(x_0, y_0)$ vara $\bar{0}$ och därmed inte heller tangentplanet horisontellt, jämför hörnpunkterna $(\pm 1, \pm 1)$ för M i Exempel 80, som ger lokala minimipunkter för f i mängden M .

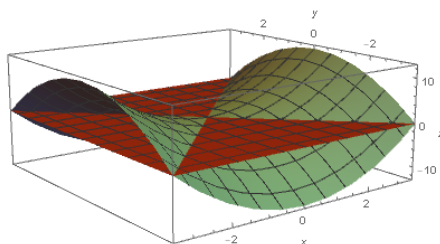
Observera att lokalt extremvärde kan förekomma i punkter där f inte är partiellt deriverbar, exempelvis har $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ lokalt och globalt minimum i origo:



Villkoret $\nabla f(\bar{p}) = \bar{0}$ är inte tillräckligt för att $f(\bar{p})$ skall vara ett lokalt extremvärde.

Om t.ex. $f(x, y) = x^2 - y^2$, så är $\nabla f(0, 0) = \bar{0}$, men $f(x, 0) = x^2$ har minimum i $x = 0$ medan $f(0, y) = -y^2$ har maximum i $y = 0$. Vi har då att $(0, 0)$ är en sadelpunkt till ytan $z = x^2 - y^2$.

(En stationär punkt (a, b) till $z = f(x, y)$ är en sadelpunkt om $z = f(x, y)$ skär sitt tangentplan $z = f(a, b)$ längs en kurva med två grenar genom $(a, b, f(a, b))$.)



2.3.3 Lokala extremvärden för avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

En funktions $f(x, y)$ beteende i en omgivning av en stationär punkt $\bar{a} = (a, b)$, ($\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$), kan studeras med hjälp av Taylorutvecklingen:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{a}) + \underbrace{\nabla f(\bar{a})}_{=\bar{0}} \cdot (\bar{x} - \bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^T H_f(\bar{x} - \bar{a}) + O(|\bar{x} - \bar{a}|^3) \\ &= f(\bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^T H_f(\bar{x} - \bar{a}) + O(|\bar{x} - \bar{a}|^3), \end{aligned}$$

där Hessematrisen $H_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ och andradifferentialen $d^2 f(\bar{a})$ ges då av $\left(\bar{x} - \bar{a} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right)$:

$$\begin{aligned} d^2 f(\bar{a}) &= (\bar{x} - \bar{a})^T H_f (\bar{x} - \bar{a}) \\ &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b), \end{aligned}$$

som är ett homogent polynom av graden ≤ 2 med andra derivatorna till f i punkten $\bar{a}$ som koefficienter. Detta är en kvadratisk form.

Funktionen $f(x, y)$ approximeras lokalt i en omgivning av punkten (a, b) av polynomet:

$$q(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2}p(h, k), \quad (h, k) = (x - a, y - b),$$

och

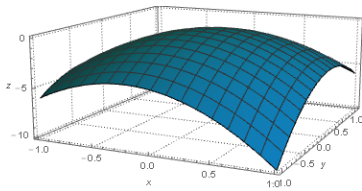
$$\begin{aligned} p(h, k) &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \\ &:= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2, \end{aligned}$$

där vi infört:
$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b). \end{cases}$$

För $p(h, k)$ gäller i punkten $(h, k) = (0, 0)$ att om $AC - B^2 > 0$ så har vi en elliptisk paraboloid med strängt lokalt maximum om $A < 0$ och strängt lokalt minimum om $A > 0$.

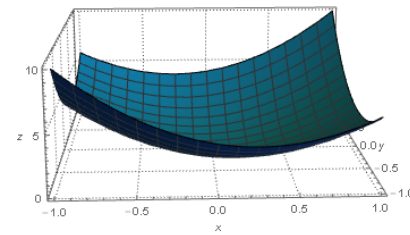
Om för $p(h, k)$ i punkten $(h, k) = (0, 0)$ gäller att $AC - B^2 < 0$ så har vi en hyperbolisk paraboloid, en sadelpunkt, och $p(h, k)$ saknar extremvärde i punkten $(h, k) = (0, 0)$.

Det lokala beteendet hos $p(h, k)$ i en omgivning av $(0, 0)$ utsäger funktionens lokala beteende i en omgivning av (a, b) :



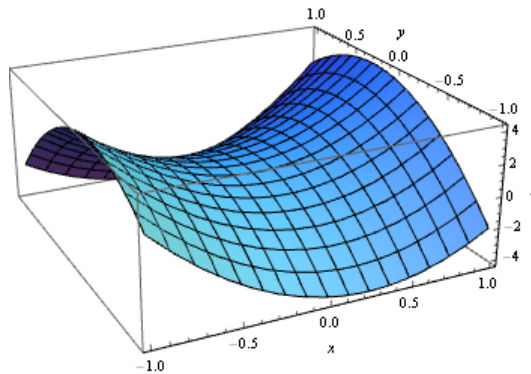
$$P(h, k) = -4h^2 + 2hk - 4k^2$$

$$(AC - B^2 > 0, A < 0)$$



$$p(h, k) = 4h^2 + 2hk + 4k^2$$

$$(AC - B^2 > 0, A > 0)$$



$$p(h, k) = 4h^2 + 2hk - 4k^2$$

$$(AC - B^2 < 0)$$

Sats 41. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning 3 i en omgivning av punkten $\bar{a} = (a, b)$, som är en stationär punkt till f , $(\nabla f(\bar{a}) = \bar{0})$. Om det för andra differentialen

$$d^2 f(\bar{a}) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 (= p(h, k))$$

gäller:

1. $AC - B^2 > 0$: Då är (a, b) en sträng lokal maximipunkt om $A < 0$ och en sträng lokal minimipunkt om $A > 0$.
2. $AC - B^2 < 0$: Då är (a, b) inte en extrempunkt.

Bevis. Bevisar senare en allmänare sats.

□

Anmärkning. Sats 41 ger tillräckliga villkor för lokala extrempunkter. Satsen säger inget om fallet $AC - B^2 = 0$.

Exempel 81. För $f(x, y) = x^4 + y^4$ är alla partiella derivator av ordning två noll i origo, $AC - B^2 = 0$.

Tydligen är $(0, 0)$ en lokal och global minimipunkt för f .

Exempel 82. Betrakta funktionen $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ från Exempel 78. Vi bestämmer de stationära punkterna i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xye^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\therefore (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ stationära punkter

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2-y^2}, & f''_{yy}(x, y) = 2x(2y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}, \\ f''_{xy}(x, y) = 2y(2x^2 - 1)e^{-x^2-y^2}. \end{cases}$$

$$1. \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) : \begin{cases} A = f''_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 2\sqrt{\frac{2}{e}}, & B = f''_{xy}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0, \\ C = \sqrt{\frac{2}{e}} = f''_{yy}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \end{cases}$$

$\therefore AC - B^2 = \frac{4}{e} > 0, A > 0$. Sats 41:

$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ strängt lokalt minimum.

$$2. \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) : \begin{cases} A = f''_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -2\sqrt{\frac{2}{e}}, & B = f''_{xy}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0, \\ C = f''_{yy}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\sqrt{\frac{2}{e}}. \end{cases}$$

$\therefore AC - B^2 = \frac{4}{e} > 0, A < 0$. Sats 41:

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ strängt lokalt maximum.

Exempel 83. Undersök vilka lokala extremvärden funktionen $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$ har.

Lösning: De stationära punkterna är lösningar till:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x - y) - 4x^3 = 0 \\ -2(x - y) - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Addition av ekvationerna ger:

$$0 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x - y)^2 + xy).$$

Den sista parentesen är noll enbart för $x = y = 0$, vilket ger att $y = -x$ löser ekvationen. Insättning av detta i den första ekvationen ger:

$$x - x^3 = 0 \iff (x = 0 \text{ eller } x = \pm 1).$$

Stationära punkter: $(0, 0)$, $(1, -1)$ och $(-1, 1)$.

$$f''_{xx}(x, y) = 2 - 12x^2, \quad f''_{xy}(x, y) = -2, \quad f''_{yy}(x, y) = 2 - 12y^2.$$

$$1. \text{ (1, -1): } AC - B^2 = (-10)(-10) - 4 = 96, \quad A < 0$$

$\therefore f(1, -1) = 2$ är ett lokalt maximum.

$$2. \text{ (-1, 1): } AC - B^2 = (-10)(-10) - 4 = 96, \quad A < 0$$

$\therefore f(-1, 1) = 2$ är ett lokalt maximum.

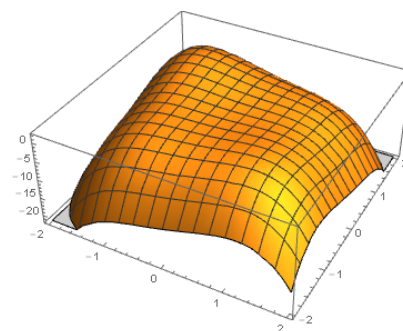
$$3. \text{ (0, 0): } AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0. \text{ Sats 41 säger inget.}$$

$f(x, 0) = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2)$ lokalt minimum för $x = 0$.

$f(0, y) = y^2 - y^4$ lokalt minimum för $y = 0$.

$$f(x, x) \begin{cases} < 0, & \text{för } x \neq 0 \\ = 0, & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

$\therefore (0, 0)$ ingen lokal extrempunkt.



2.3.4 Lokala extremvärden för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning ≥ 3 i en omgivning av punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, så har vi ett lokalt extremvärde i $\bar{a}$ endast om $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$. Taylorutvecklingar kring $\bar{a}$ blir

då

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}p(\bar{h}) + O(|\bar{h}|^3), \quad \bar{h} = \bar{x} - \bar{a},$$

där

$$p(\bar{h}) = d^2 f(\bar{a}) = \bar{h}^T H_f \bar{h}, \quad H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) \right)_{i,j=1}^n,$$

som är en kvadratisk form i n variabler $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ och koefficienterna givna av elementen i Hessematrisen H_f .

Då $O(|\bar{h}|^3) \approx 0$ i en "liten" omgivning av $\bar{a}$ kan $p(\bar{h})$ utnyttjas för att undersöka om f har ett strängt lokalt extremvärde i punkten $\bar{a}$.

Definition 30. En form $p(h)$ av graden k sägs vara:

1. Positivt definit, om $p(\bar{h}) \geq 0$ med likhet endast om $\bar{h} = \bar{0}$, dvs. p har ett strängt minimum för $\bar{h} = \bar{0}$.
2. Negativt definit, om $p(\bar{h}) \leq 0$ med likhet endast om $\bar{h} = \bar{0}$, dvs. p har ett strängt maximum för $\bar{h} = \bar{0}$.
3. Positivt semidefinit, om $p(\bar{h}) \geq 0$ med likhet även för vissa $\bar{h} \neq \bar{0}$, dvs. p har ett osträngt minimum för $\bar{h} = \bar{0}$.
4. Negativt semidefinit, om $p(\bar{h}) \leq 0$ med likhet även för vissa $\bar{h} \neq \bar{0}$, dvs. p har ett osträngt maximum för $\bar{h} = \bar{0}$.
5. Indefinit, Om $p(\bar{h}) > 0$ för vissa $\bar{h}$ och $p(\bar{h}) < 0$ för andra $\bar{h}$, dvs. p har ingen extrempunkt för $\bar{h} = \bar{0}$.

Exempel 84. Funktionen

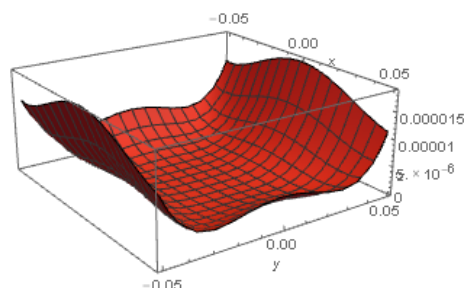
$$f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 2y^4 - 3x^5 = p_4(x, y) + O(r^5), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

där

$$p_4(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 2y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + 3y^4,$$

är en form av graden 4. Tydligen är $p_4 \geq 0$ och $p_4 = 0 \iff y = 0 \wedge x^2 - y^2 = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$.

Då är p_4 positivt definit med origo som sträng minimipunkt. Detta gäller även $f(x, y)$:



Exempel 85. Låt

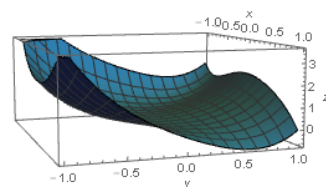
$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 - y)^2 + y^4 - x^5 \\ &= p_4(x, y) + O(r^5), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Här är $p_4(x, y) = (x^2 - y)^2 + y^4 = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4$, ett polynom av graden 4 men inte en form av graden 4.

Igen är $p_4 \geq 0$ med $p_4 = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$, så origo är en sträng minimipunkt för p_4 , men inte för $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, x^2), \quad \text{då } y = x^2, \\ &= x^5(x^3 - 1) \begin{cases} < 0, & 0 < x < 1 \\ > 0, & -1 < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\therefore f(x, y)$ antar positiva och negativa värden i varje omgivning av $(0, 0)$.



Lemma. Om $p_k(\bar{h})$ är en form av graden k , så är funktionen

$$g(\bar{h}) = \frac{p_k(\bar{h})}{|\bar{h}|^k}$$

konstant på strålarna $t\bar{h}, t > 0$, utgående från origo.

Om p_k är positivt definit, så har funktionen g ett minsta värde $c > 0$.

Bevis. För alla $t > 0$ gäller:

$$g(t\bar{h}) = \frac{p_k(t\bar{h})}{|t\bar{h}|^k} = \frac{t^k p_k(\bar{h})}{t^k |\bar{h}|^k} = g(\bar{h}).$$

Då är g konstant på strålen $t\bar{h}, t > 0$.

Därmed antas alla värden för g på "enhetssfären" $|\bar{h}| = 1$, som är en sluten och begränsad mängd, dvs. kompakt. Då g är kontinuerlig på denna kompakta mängd antar den ett minsta värde c .

Om p_k är positivt definit, så måste $c > 0$, ty $p_k \geq 0$, med $p_k = 0$ endast för $\bar{h} = \bar{0}$, som inte ligger på sfären. □

Med hjälp av lemmat kan vi bevisa att tillräckligt villkor för extremvärden i följande sats, som behandlar former av graden k , (kvadratiske formerna med $k = 2$ blir ett specialfall).

Sats 42. *Om*

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + p_k(\bar{h}) + O(|\bar{h}|^{k+1}), \quad \bar{h} = \bar{x} - \bar{a},$$

där $p_k(\bar{h})$ är en form av graden k , så har $f(\bar{x})$ i punkten $\bar{x} = \bar{a}$:

1. Ett strängt lokalt minimum, om $p_k(\bar{h})$ är positivt definit.
2. Ett strängt lokalt maximum, om $p_k(\bar{h})$ är negativt definit.
3. Inget extremvärde, om $p_k(\bar{h})$ är indefinit.

Bevis. 1°) Antag att $p_k(\bar{h})$ är positivt definit (analogt bevis för det negativt definita fallet). För $\bar{h} \neq 0$ kan vi forma om uttrycket för $f(\bar{x})$:

$$\frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})}{|\bar{h}|^k} = \frac{p_k(\bar{h})}{|\bar{h}|^k} + O(|\bar{h}|).$$

Vårt lemma ger, då p_k är positivt definit, att

$$g(\bar{h}) = \frac{p_k(\bar{h})}{|\bar{h}|^k} \geq c > 0, \text{ för } \bar{h} \neq 0.$$

Då $\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} O(\bar{h}) = 0$, så är $O(|\bar{h}|) \geq -\frac{c}{2}$ i någon omgivning av $\bar{h} = \bar{0}$. I denna omgivning gäller:

$$\frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})}{|\bar{h}|^k} = g(\bar{h}) + O(|\bar{h}|) \geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} > 0,$$

vilket innebär att $f(\bar{a} + \bar{h}) > f(\bar{a})$ för alla $\bar{h} \neq \bar{0}$ i en omgivning av $\bar{h} = \bar{0}$, så $\bar{a}$ är en sträng lokal minimipunkt.

2°) Antag nu att $p_k(\bar{h})$ är indefinit. Då existerar två vektorer $\bar{h}_+$ respektive $\bar{h}_-$, sådana att

$$p_k(\bar{h}_+) > 0 > p_k(\bar{h}_-).$$

I analogi med beviset i fall 1°) får vi

$$\begin{cases} \frac{f(\bar{a} + t\bar{h}_+) - f(\bar{a})}{|t\bar{h}_+|^k} = g(t\bar{h}_+) + O(|t\bar{h}_+|) = g(\bar{h}_+) + O(|t|) \geq \frac{g(\bar{h}_+)}{2} > 0, \\ \frac{f(\bar{a} + t\bar{h}_-) - f(\bar{a})}{|t\bar{h}_-|^k} = g(t\bar{h}_-) + O(|t\bar{h}_-|) = g(\bar{h}_-) + O(|t|) \leq \frac{g(\bar{h}_-)}{2} < 0, \end{cases}$$

för tillräckligt små t -värden, dvs. $f(\bar{a} + t\bar{h}_+) > f(\bar{a})$ och $f(\bar{a}) > f(\bar{a} + t\bar{h}_-)$ för dessa t -värden, vilket ger att $\bar{a}$ inte är någon extrempunkt.

□

För att bevisa Sats 41 med hjälp av Sats 42 behöver vi speciellt studera kvadratiska former i följande avsnitt.

2.3.5 Kvadratkomplettering av kvadratiska former

Tillämpning av Sats 42 förutsätter att man kan bedömma om en form av graden k är definit, (positivt eller negativt), eller indefinit.

För våra tillämpningar är de kvadratiska formerna ($k = 2$) viktigaste. Låt oss titta på fallet med två variabler.

Om $A \neq 0$ kan vi kvadratkomplettera enligt:

$$p(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = A \left[\left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2 \right].$$

Följande observationer kan göras:

- Om $AC - B^2 > 0$, så är uttrycket inom klammern ≥ 0 för alla (h, k) och $p = 0$ endast om $(h, k) = (0, 0)$.

Formen är definit, positivt om $A > 0$, negativt om $A < 0$.

- Om $AC - B^2 < 0$, så är uttrycket inom klammern > 0 för alla punkter $(h, 0)$, $h \neq 0$, och < 0 för alla punkter på linjen $(Bh, -Ah)$ genom origo, ty uttrycket är då $= (AC - B^2)h^2 < 0$.

Formen är då indefinit.

- Om $AC - B^2 = 0$, så är uttrycket inom klammern $\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 \geq 0$ för alla (h, k) och $p = 0$ på alla punkter på linjen $(Bh, -Ah)$. Då är formen semidefinit, positivt om $A > 0$ och negativt om $A < 0$.

Om $A = 0$ har formen utseendet

$$p(h, k) = 2Bhk + Ck^2 = k(2Bh + ck).$$

- Om $B \neq 0$, så växlar uttrycket tecken då k växlar tecken, (och h är fixt), så uttrycket är indefinit.

$AC - B^2 = -B^2 < 0$ i detta fall.

- Om $B = 0$, så är $p(h, k) = ck^2$ som är semidefinit, $p(h, 0) = 0$, och $AC - B^2 = 0$.

Vi sammanfattar utredningarna i en sats:

Sats 43. *Den kvadratiska formen*

$$p(h, k) = A^2 + 2Bhk + Ck^2$$

är

1°) Positivt definit, om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$.

2°) Negativt definit, om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$.

3°) Indefinit, om $AC - B^2 < 0$.

4°) Positivt semidefinit, om $AC - B^2 = 0$ och $A > 0$.

5°) Negativt semidefinit, om $AC - B^2 = 0$ och $A < 0$.

Sats 42 och Sats 43 ger nu tillsammans att Sats 41 gäller.

Att undersöka om en kvadratisk form av fler än två variabler är definit eller indefinit kan göras genom att skriva om formen till en linjär kombination av jämna kvadrater medelst kvadratkomplettering. Förfarandet beskrivs med två exempel.

Exempel 86. *Betrakta kvadratiska formen av h, k och l :*

$$p(h, k, l) = 2h^2 + 5(k - l)^2 + al^2 + 4hk - 4hl,$$

där a är en konstant. Vi gör följande omskrivningar:

$$\begin{aligned}
p(h, k, l) &\stackrel{1.}{=} 2h^2 + 5k^2 - 10kl + (5 + 1)l^2 + 4hk - 4hl \\
&\stackrel{2.}{=} 2\underline{h}^2 + 5k^2 - 10kl + (5 + a)l^2 + 4\underline{h}k - 4\underline{h}l \\
&\stackrel{3.}{=} 2[\underbrace{(h + k - l)^2 - (k - l)^2}_{2h^2 + 4hk - 4hl}] + 5k^2 - 10kl + (5 + a)l^2 \\
&= 2(h + k - l)^2 - 2k^2 + 4kl - 2l^2 + 5k^2 - 10kl + (5 + a)l^2 \\
&= 2(h + k - l)^2 + 3\underline{k}^2 - 6\underline{k}l + (3 + a)l^2 \\
&= 2(h + k - l)^2 + 3[\underbrace{(k - l)^2 - l^2}_{3k^2 - 6kl}] + (3 + a)l^2 \\
&= \underline{\underline{2(h + k - l)^2 + 3(k - l)^2 + al^2}}
\end{aligned}$$

1. Utveckla till linjärkombination av olika monom. ($ch^\alpha k^\beta l^\delta = \text{monom}$).
2. Finn variabel vars kvadrat är en av termerna.
3. Samla alla termer med variabeln i en jämn kvadrat.
4. Upprepa förfarandet med de övriga variablerna.

1. Om $a > 0$ så är $p \geq 0$ med likhet om:

$$\begin{cases} h + k - l = 0 \\ k - l = 0 \\ l = 0 \end{cases} \iff (h, k, l) = (0, 0, 0).$$

Formen är då positivt definit.

$$p(h, k, l) = 2(h + k - l)^2 + 3(k - l)^2 + al^2.$$

2. Om $a < 0$ har vi för $k = l = 0$ att

$$p = 2h^2 > 0, \text{ då } h \neq 0$$

på linjen $(0, k, k)$ är $p = ak^2 < 0$, då $k \neq 0$.

Formen är därmed indefinit.

3. Om $a = 0$ är $p = 2(h+k-l)^2 + 3(k-l)^2 \geq 0$, med likhet då $\begin{cases} h+k-l=0 \\ k-l=0 \end{cases} \iff \begin{cases} h=0 \\ k=l \end{cases}$,
dvs. på linjen $(0, k, k)$. Formen är då positivt semidefinit

I sådana fall där man vid tillämpning av ovanbeskrivna algoritm inte hittar någon term med en kvadrerad variabel bland de kvarvarande variablerna är formen alltid indefinit.

Exempel 87. Betrakta p given av

$$\begin{aligned} p(h, k, l) &= 2\underline{h}^2 + 2k^2 + 2l^2 + 4\underline{h}k - 4\underline{h}l - 7kl \\ &= 2[(h+k-l)^2 - (k-l)^2] + 2k^2 + 2l^2 - 7kl \\ &= 2(h+k-l)^2 - 3kl. \end{aligned}$$

Här avslutas algoritmen. Väljer man (h, k, l) så att $h+k-l=0$ så är $p = -3kl$, så $p > 0$ om $k = -l$ och $p < 0$ om $k = l$. Formen är indefinit.

Uttolkningen av algoritmens slutresultat ges i följande sats.

Sats 44. Om $p(h)$ är en kvadratisk form i n variabler och om algoritmen beskriven i Ex. 86 leder till en linjär kombination av:

- 1° n jämna kvadrater med positiva koefficienter, så är p positivt definit.
- 2° n jämna kvadrater med negativa koefficienter, så är p negativt definit.
- 3° $< n$ jämna kvadrater med positiva koefficienter så är p positivt semidefinit.
- 4° $< n$ jämna kvadrater med negativa koefficienter, så är p negativt semidefinit.
- 5° $\leq n$ jämna kvadrater där någon koefficient > 0 och någon koefficient < 0 , så är p indefinit.

Om algoritmen inte ger en linjär kombination av jämna kvadrater, (som i Ex. 87), så är p indefinit.

Exempel 88. Avgör om $f(x, y, z) = 4\cos(x+y+z) + 7(xy+yz+zx)$ har ett lokalt extremvärde i origo.

Lösning: Maclaurinutveckling av f ger:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 4 \left(1 - \frac{(x + y + z)^2}{2} + O(|x + y + z|^4) \right) + 7(xy + yz + zx) \\ &= 4 - (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xy - 3yz - 3zx) + O(r^4), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

$$\nabla f(0, 0, 0) \underset{\text{förstegradstermer saknas}}{=} \bar{0}, \quad \text{origo stationär punkt!}$$

Vi undersöker andragsformen:

$$p(h, k, l) = -2\underline{h}^2 - 2k^2 - 2l^2 + 3\underline{h}k + 3kl + 3lh$$

kvadratkomplettering ger:

$$\begin{aligned} -\frac{p(h, k, l)}{2} &= \left(h - \frac{3}{4}k - \frac{3}{4}l \right)^2 - \frac{9}{16}(k + l)^2 + k^2 + l^2 - \frac{3}{2}kl \\ &= \left(h - \frac{3}{4}k - \frac{3}{4}l \right)^2 + \frac{7}{16}(\underline{k}^2 + l^2 - 6\underline{k}l) \\ &= \left(h - \frac{3}{4}k - \frac{3}{4}l \right)^2 + \frac{7}{16}(k - 3l)^2 - \frac{7}{16} \cdot 8l^2 \end{aligned}$$

Kvadraterna har koefficienter av olika tecken.

Då ger Sats 44 punkt 5° att p är indefinit och funktionen har enligt Sats 42 punkt 3° inget extremvärde i origo.

Anmärkning. För kvadratiska former av två variabler är det oftast enklare att använda Sats 41 istället för Sats 44.

2.3.6 Extremvärdesproblem med ett bivillkor

I praktiska tillämpningar av extremvärdesteorin för avbildningar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kan de ingående variablerna vara beroende av varandra. Detta kan uttryckas med hjälp av ett eller flera bivillkor uttryckta med hjälp av avbildningarna $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ enligt:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Definition 31. Att $f(\bar{p})$ är ett lokalt minimum (maximum) till $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ under bivillkoren $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, innebär att :

1. $\bar{p}$ uppfyller bivillkoren ($g_i(\bar{p}) = 0$, $i = 1, \dots, m$)
2. Det finns en omgivning U av $\bar{p}$, så att $f(\bar{p}) \leq f(\bar{x})$, ($f(\bar{p}) \geq f(\bar{x})$), då $\bar{x} \in U \setminus \{\bar{p}\}$ och $\bar{x} \in D_f \cap D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_m}$ och $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

$f(\bar{p})$ är ett strängt lokalt minimum (maximum) om vi har stränga olikheter i 2°.

Vi studerar först fallet med ett bivillkor $g(\bar{x}) = 0$.

Exempel 89. Bestäm det kortaste avståndet från origo till punkterna på kurvan $xy = 1$, då $x > 0, y > 0$.

Lösning: Det kvadrerade avståndet från en punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ till origo ges av $f(x, y) = x^2 + y^2$, som då kan användas som målfunktion.

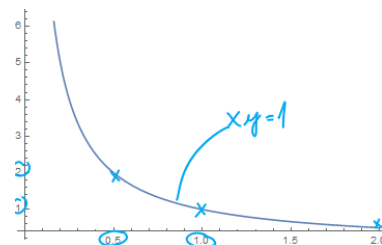
Vi har bivillkoret $xy = 1$, $x > 0, y > 0$.

Detta kan skrivas:

$$y = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Vi kan reducera problemet till att beräkna minsta värdet av

$$\varphi(x) = f(x, \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$



Existerar ett sådant? För $x \in (0, \frac{1}{2})$ och $x > 2$ är $\varphi(x) > 4$. Intervallet $I = [\frac{1}{2}, 2]$ är en kompakt mängd och φ är kontinuerlig och deriverbar på I .

Då antar φ ett minsta värde på I antingen i en stationär punkt i $(\frac{1}{2}, 2)$ eller i en intervalländpunkt.

Då

$$\varphi'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \frac{x^4 - 1}{x^3},$$

erhålls teckenschemat

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\frac{17}{4}$	2	$\frac{17}{4}$

Alltså har φ det minsta värdet 2 för $x = 1$, då $x > 0$.

Därmed är det kortaste avståndet till origo på kurvan $xy = 1, x > 0, y > 0$, givet av $\sqrt{2}$ och antas i punkten $(1, 1)$ på kurvan.

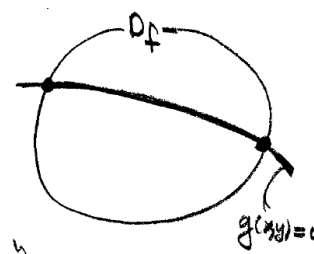
Oftast är det omöjligt att explicit lösa ut en variabel ur bivillkoret $g(\bar{x}) = 0$.

Betrakta problemet att hitta lokala extrempunkter till $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$.

Existensen av globala extrempunkter kan vara en svår fråga som måste lösas från fall till fall.

Den enklaste situationen är när snittet av D_f och kurvan $g(x, y) = 0$ utgör en kompakt mängd som f är kontinuerlig på.

Även randpunkterna till D_f . Som ingår i snittet bör särbehandlas.



Antag att vi har en lokal extrempunkt i en inre punkt (a, b) i D_f och i D_g . Antag vidare att f och g har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av (a, b) och att $\text{grad}g(a, b) \neq \bar{0}$.

Antag t.ex. att $g'_y(a, b) \neq 0$. Då ger Sats 29, (existenssatsen för implicita funktioner), att kurvan $g(x, y) = 0$ definierar implicit $y = y(x)$ i en omgivning av (a, b) . I en omgivning av (a, b) kan då

$$g(x, y) = 0 \text{ ges av parametrisering } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Då har $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ ett lokat extremvärde i punkten t_0 , för vilken $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$.

Då gäller med stöd av kedjeregeln att

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot y'(t_0) \\ &= \underline{\underline{\text{grad}f(a, b) \cdot (x'(t_0), y'(t_0))}}. \end{aligned}$$

Detta betyder att $\text{grad}f(a, b)$ är vinkelrät mot tangenten till kurvan $g(x, y) = 0$ i punkten (a, b) , men detta gäller ju även för $\text{grad}g(a, b)$. Vi har därmed satsen:

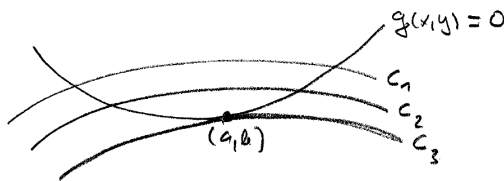
Sats 45. Antag att punkten (a, b) är en lokal extrempunkt till $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$.

Antag vidare att (a, b) är en inre punkt i D_f och D_g . Då gäller det att

$$\text{grad}f(a, b) \text{ och } \text{grad}g(a, b) \text{ är } \underline{\text{parallella}}. \quad (20)$$

Anmärkning. I härledningen av (20) antogs att $\text{grad}g(a, b) \neq \bar{0}$. Om $\text{grad}g(a, b) = \bar{0}$ gäller fortfarande (20), ty varje vektor är parallell med nollvektorn.

Villkoret (20) innebär att den nivåkurva $f(x, y) = c$ som går igenom (a, b) har gemensam tangent med nivåkurvan $g(x, y) = 0$ i (a, b) .



Nivåkurvorna $f(x, y) = c_i$, $i = 1, 2, 3$
 $c_1 < c_2 < c_3 \implies (a, b)$ lokal maximipunkt

Vid praktiska räkningar måste villkoret (20) omformas till ekvationer, vilket kan göras på två sätt:

1° Skriv om (20) med en determinant och beakta bivillkoret $g(x, y) = 0$. Vi får ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

för bestämning av (a, b) .

2° Kräver att $\text{grad } g(a, b) \neq \bar{0}$. Då är (20) ekvivalent med att det existerar ett tal λ sådant att $\text{grad } f(a, b) = \lambda \text{ grad } g(a, b)$. I komponentform med bivillkoret $g(x, y) = 0$ erhålls ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

med tre ekvationer och tre obekanta x, y och λ . Detta är Lagranges multiplikatormetod med den införde hjälpvariabeln, multiplikatorn, λ .

Vi formulerar en sats för Lagranges multiplikatormetod för $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sats 46. (Lagranges multiplikatormetod, ett bivillkor)

Om $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ är en lokal extrempunkt till problemet:

Maximera/minimera $f(\bar{x})$ under bivillkoret $g(\bar{x}) = 0$, där $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator,

Så uppfyller $\bar{x}_0$ för någon konstant λ , (multiplikatorn),

Villkoren:

$$(A) \quad \begin{cases} \text{grad } f(\bar{x}_0) = \lambda \text{ grad } g(\bar{x}_0), \\ g(\bar{x}_0) = 0, \end{cases}$$

eller

$$(B) \quad \begin{cases} \text{grad } g(\bar{x}_0) = \bar{0}, \\ g(\bar{x}_0) = 0. \end{cases}$$

Anmärkning. 1. Villkoret (A) utskrivet i koordinat form ger ett ekvationssystem med $n + 1$ ekvationer och $n + 1$ obekanta $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$.

2. Villkoret (A) kan omskrivas med Lagrangefunktionen

$$F(\bar{x}, \lambda) := f(\bar{x}) - \lambda g(\bar{x})$$

som $\text{grad } F(\bar{x}, \lambda) = \bar{0}$, eftersom

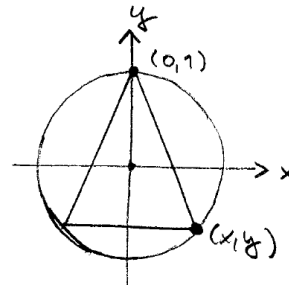
$$\text{grad } F(\bar{x}, \lambda) = (f'_{x_1} - \lambda g'_{x_1}, \dots, f'_{x_n} - \lambda g'_{x_n}, -g).$$

Exempel 90. Bestäm arean av den största likbenta triangel som kan skrivas in i enhetscirkeln.

Lösning: Betrakta likbenta trianglar med y -axeln som symmetriaxel. Vi maximerar triangelarean

$$f(x, y) = x(1 - y), \quad x \geq 0,$$

under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Definitionsmängden för f är $D_f = \{(x, y) : x \geq 0\}$. Bivillkoret definierar en sluten halvcirkelbåge i D_f , som då är kompakt, så f 's kontinuitet garanterar existensen av ett maximum. Maximerande punkten (x, y) är antingen en punkt på randen av D_f , alltså $(0, 1)$ eller $(0, -1)$, vilka ger $f = 0$ så de utesluts, eller så kan (x, y) bestämmas med Sats 46.

Eftersom $\text{grad}g(x, y) = (2x, 2y) \neq \bar{0}$ på enhetscirkeln kommer inte fallet (B) ifråga. Ställer upp ekvationerna (A): (med tillägget $x > 0$)

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \\ g(x, y) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - y = \lambda 2x \\ -x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger λ uttryckt i x och y :

$$\lambda = \frac{1 - y}{2x}$$

Insättning i den andra ekvationen reducerar systemet:

$$(\star) \begin{cases} -x^2 + y^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Möjliga maximivärden: $f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $(f(0, \pm 1) = 0)$

Triangeln blir liksidig med sidan $\sqrt{3}$.

Alternativt kunde man ställa upp ekvationerna (21):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - y & -x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - 2y^2 + 2x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff (\star).$$

Betrakta problemet att bestämma lokala extrempunkter till $f(\bar{x}) = f(x, y, z)$ under bivillkoret

$g(\bar{x}) = g(x, y, z) = 0$. Bivillkoret bestämmer en nivåyta i $\mathbb{R}^3$. Antag att (a, b, c) är en punkt på $g(\bar{x}) = 0$ som ger en lokal extrempunkt för f . Antag vidare att $\text{grad}g(a, b, c) \neq \bar{0}$, säg att $g'_x(a, b, c) \neq 0$. Då är $z = z(x, y)$ i en omgivning av (a, b, c) en beskrivning av nivåytan. I en omgivning av (a, b, c) kan ytan parametreras med två parametrar $s, t : \bar{x}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, där $\bar{x}(s_0, t_0) = (a, b, c)$. För $f(\bar{x}(s, t))$ erhålls med kedjeregeln:

$$\begin{cases} f'_s(\bar{x}(s_0, t_0)) = f'_x \cdot x'_s(s_0, t_0) + f'_y \cdot y'_s(s_0, t_0) + f'_z \cdot z'_s(s_0, t_0) \\ f'_t(\bar{x}(s_0, t_0)) = f'_x \cdot x'_t(s_0, t_0) + f'_y \cdot y'_t(s_0, t_0) + f'_z \cdot z'_t(s_0, t_0) \end{cases}$$

Vilket kan skrivas: $\begin{cases} \nabla f(a, b, c) \cdot \bar{x}'_s(s_0, t_0) = 0, \\ \nabla f(a, b, c) \cdot \bar{x}'_t(s_0, t_0) = 0. \end{cases}$

Då är $\text{grad}f(a, b, c)$ vinkelrät mot tangentplanet till ytan $g(\bar{x}) = 0$ i (a, b, c) . Men då är $\text{grad}f(a, b, c)$ parallell med $\text{grad}g(a, b, c)$.

Resonemanget kan utvidgas till $n > 3$ och vi får följande generalisering av Sats 45:

Sats 47. *Antag att punkten $(a_1, \dots, a_n)$ är en lokal extrempunkt till $f(x_1, \dots, x_n)$ under bivillkoret $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Antag vidare att $(a_1, \dots, a_n)$ är en inre punkt i D_f och D_g . Då gäller det att:*

$$\text{grad } f(a_1, \dots, a_n) \text{ och } \text{grad } g(a_1, \dots, a_n) \text{ är } \underline{\text{parallella}}. \quad (23)$$

Anmärkning. För $n \geq 3$ kan inte determinantvillkoret (21) längre användas för praktiska beräkningar. Däremot kan vi ju använda Lagranges multiplikator metod, Sats 46, vilket görs i följande exempel.

Exempel 91. *Bestäm det största värdet av*

$$f(x, y, z) = x + y^2 + z$$

på enhetssfären.

Lösning: Vi har bivillkoret

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

vilket utgör en kompakt mängd, så vår kontinuerliga målfunktion antar ett största värde på enhetssfären. Vi använder Sats 46:

$$\text{grad } g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$$

på enhetssfären, så villkor (B) i Sats 46 gäller ej.

Vi ställer upp ekvationssystemet (A):

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Ekvation 2 ger att $y = 0$ eller $\lambda = 1$.

1. $\lambda = 1 : x = \frac{1}{2} \wedge z = \frac{1}{2} \wedge y^2 = \frac{1}{2} \iff \underline{(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})}$
2. $y = 0 : x = z \wedge x^2 = \frac{1}{2} \iff \underline{\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})}$

I fall 1° fås funktionsvärdet $\frac{3}{2}$ och i 2° $\pm \sqrt{2}$.

Därmed erhålls det största värdet i två punkter:

$$\underline{f(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}}.$$

2.3.7 Extremvärdesproblem med flera bivillkor

Betrakta problemet att bestämma extrempunkter till en funktion $f(\bar{x}) = f(x, y, z)$ under bivillkoren

$$\begin{cases} g_1(\bar{x}) = 0, \\ g_2(\bar{x}) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Låt $\bar{a} = (a, b, c)$ vara en lokal extrempunkt till f under (24). Antag $\bar{a}$ är en inre punkt i D_f, D_{g_1} och D_{g_2} . Då gäller $g_1(\bar{a}) = g_2(\bar{a}) = 0$. Antag att g_1 och g_2 har kontinuerliga derivator i en omgivning av $\bar{a}$ och att t.ex. $\frac{d(g_1, g_2)}{d(y, z)} \neq 0$ i punkten $\bar{a}$.

Då ger Sats 30 att skärningskurvan mellan nivåytorna (24) kan parametreras i en omgivning av $\bar{a} : \bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, med $\bar{x}(t_0) = \bar{a}$.

Då gäller:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\bar{x}(t)) \right|_{t=t_0} &= f'_x \cdot x'(t_0) + f'_y \cdot y'(t_0) + f'_z z'(t_0) \\ &= \text{grad} f(\bar{a}) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0. \end{aligned}$$

Då är $\text{grad} f(\bar{a})$ vinkelrät mot skärningskurvans tangent i $\bar{a}$. Men detta gäller även för $\text{grad} g_1(\bar{a})$ och $\text{grad} g_2(\bar{a})$, eftersom skärningskurvan ligger i båda nivåytorna (24). Därmed ligger $\text{grad} f(\bar{a})$, $\text{grad} g_1(\bar{a})$ och $\text{grad} g_2(\bar{a})$ i samma plan med normal vektor $\bar{x}'(t_0)$. De tre gradientvektorerna är då linjärt beroende.

Genom att utnyttja Sats 31 kan ett liknande resonemang göras för det allmänna fallet $f : \mathbb{R}^{n \curvearrowright} \mathbb{R}$ och $g_1, \dots, g_p : \mathbb{R}^{n \curvearrowright} \mathbb{R}$, $p < n$.

Sats 48. Antag att punkten $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ är en lokal extrempunkt till $f(x_1, \dots, x_n)$ under bivillkoren $g_1(\bar{x}) = \dots = g_p(\bar{x}) = 0$. Antag vidare att $\bar{a}$ är en inre punkt i $D_f, D_{g_1}, \dots, D_{g_p}$.

Då gäller det att

$$\text{grad} f(\bar{a}), \text{grad} g_1(\bar{a}), \dots, \text{grad} g_p(\bar{a}) \text{ är linjärt beroende} \quad (25)$$

Anmärkning. Antagandet $p < n$ behövs ej i Sats 48, ty om $p \geq n$ har vi $\geq n + 1$ vektorer i (25) som då säkert är linjärt beroende i $\mathbb{R}^n$.

Om $p = n - 1$ ger (25) ett determinantvillkor för att med bivillkoren räkna ut kandidater till lokala (inre) extrempunkter:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \operatorname{grad} f(\bar{x}) \\ \operatorname{grad} g_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_{n-1}(\bar{x}) \end{vmatrix} = 0 \\ g_1(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_{n-1}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

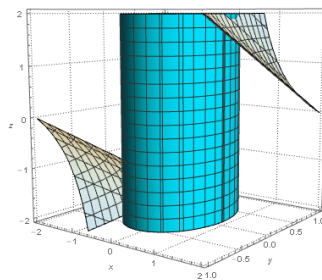
Exempel 92. Bestäm det minsta avståndet till origo från skärningskurvan K definierad av

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \\ g_2(x, y, z) = xy + xz - 2 = 0. \end{cases}$$

Lösning: Som målfunktion väljs det kvadrerade avståndet till origo:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Minimum existerar, ty K är en sluten mängd och vi kan betrakta minimeringsproblemet för punkter



$(x, y, z) \in D = K \cap \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r\}$ för tillräckligt stort r . D är en sluten och begränsad mängd, dvs. kompakt, och f är kontinuerlig på D , så ett minimum antas av f .

Vi beräknar determinanten i (26):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \nabla f(\bar{x}) \\ \nabla g_1(\bar{x}) \\ \nabla g_2(\bar{x}) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 4y & 0 \\ y+z & x & x \end{vmatrix} = 2z(2x^2 - 4y(y+z)) + x(8xy - 4xy) \\ &= 4(y+z)(x^2 - 2yz) \end{aligned}$$

Ekvationssystemet (26) blir då:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 4(y+z)(x^2 - 2yz) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \stackrel{(y+z \neq 0)}{\iff} \begin{cases} x^2 = 2yz \\ 2yz + 2y^2 = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2yz \\ 2y(z+y) = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} x^2 = 2yz \\ 2y = \frac{x}{2} \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ y = \frac{x}{4} \\ x(y+z) = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ins.}} \underline{x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}}
\end{aligned}$$

Systemet löses av: $\pm \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{4\sqrt{2}}{3} \right)$. Minsta avståndet är $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ i båda punkterna.

Lagranges multiplikatormetod kan utvidgas till att behandla problem med flera bivillkor:

$$(L_m) \begin{cases} \text{Sök (lokala eller globala) extrempunkter till } f : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}} \\ \text{då den tillåtna mängden ges av bivillkoren:} \\ \Gamma = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\bar{x}) = 0, \dots, g_m(\bar{x}) = 0 \}, \\ \text{där } g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}}. \end{cases}$$

Bivillkoren kan sammanfattas i vektorform:

$$\begin{pmatrix} g_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ g_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = g(\bar{x}) = \bar{0},$$

där $g : \mathbb{R}^{n \times \mathbb{R}^m}$.

Sats 49. (Lagrange multiplikatormetod). Om $\bar{x}_0$ är en lokal extrempunkt till problemet (L_m) , så uppfyller $\bar{x}_0$ för någon konstant vektor $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ villkoren:

$$(A) \begin{cases} \text{grad } f(\bar{x}_0) = L^T g'(\bar{x}_0) \\ g(\bar{x}_0) = \bar{0}, \end{cases}$$

eller

$$(B) \begin{cases} L^T g'(\bar{x}_0) = \bar{0}, L \neq \bar{0}, \\ g(\bar{x}_0) = \bar{0}, \end{cases}$$

där $g'(\bar{x}_0)$ är funktionalmatrisen (Jacobimatrisen) i $\bar{x}_0$.

Exempel 93. Bestäm det största och det minsta värdet $f(x, y, z) = xyz$ kan anta på skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $x + y + z = 2$.

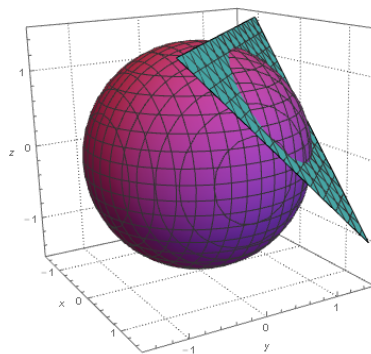
Lösning: Vi har bivillkoren $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ och $g_2(x, y, z) = x + y + z - 2 = 0$.

Skärningskurvan är en kompakt cirkulär ring i $\mathbb{R}^3$ och f är kontinuerlig på den, så ett största och minsta värde antas. Vi tillämpar Sats 49:

$$g(\bar{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\bar{x}) \\ g_2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ x + y + z - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} f(\bar{x}) = (yz, xz, xy), \quad g'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$L \in \mathbb{R}^2$, $L^T = (\lambda, \mu)$ Lagrange multiplikatorer.



Betrakta först villkoret (B):

$$L^T g'(\bar{x}) = (0, 0, 0), (\lambda, \mu) \neq (0, 0), \quad g(\bar{x}) = \bar{0}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda x + \mu & = 0 \\ 2\lambda y + \mu & = 0 \\ 2\lambda z + \mu & = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 2 \\ x + y + z & = 2 \\ (\lambda, \mu) & \neq (0, 0) \end{cases}$$

1. Första ekv. ger $\lambda \neq 0$, ty annars $(\lambda, \mu) = \bar{0}$.

2. $x = y = z$ erhålls ur de tre första ekv.

3. Då blir ekv. 4 och 5 $\begin{cases} 3x^2 = 2 \\ 3x = 2 \end{cases}$

Saknar lösning.

Alltså ger villkoret (B) inga kandidatpunkter till maximum eller minimum för f .

Betrakta villkoret (A):

$$\text{grad}f(\bar{x}) = L^T g'(\bar{x}), \quad g(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} yz & = 2\lambda x + \mu & (1) \\ zx & = 2\lambda y + \mu & (2) \\ xy & = 2\lambda z + \mu & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 2 & (4) \\ x + y + z & = 2 & (5) \end{cases}$$

1. Eliminerar λ och μ : (1) – (2) och (2) – (3) ger $\begin{cases} z(y-x) = 2\lambda(x-y) & (6) \\ x(z-y) = 2\lambda(y-z) & (7) \end{cases}$
 $(y-z) \times (6) - (x-y) \times (7)$ ger: $(y-x)(y-z)(z-x) = 0$.

$\therefore$ Minst två av variablerna måste vara lika.

2. Fallet $x = y$: Ekv. (4) och (5) ger

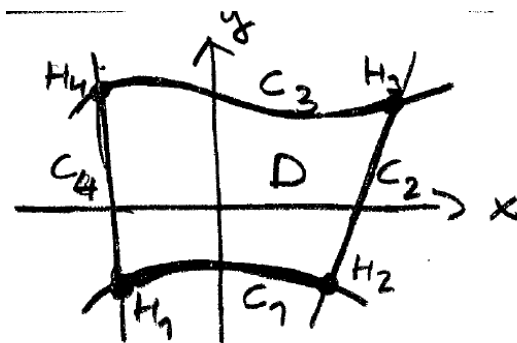
$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x^2 + z^2 & = 2 \\ 2x + z & = 2 \end{cases} & \iff \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 & = 0 \\ z & = 2(1-x) \end{cases} \\ & \implies (x, y, z) = (1, 1, 0) \text{ eller } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Av symmetriskäl är även $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ och $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ lösningar till (A).

Funktionen f antar sitt minsta värde 0 i punkterna $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ och $(1, 1, 0)$, samt sitt största värde $\frac{4}{27}$ i punkterna $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ och $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2.3.8 Största och minsta värden på kompakta mängder

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på en kompakt mängd D , så antar f ett största (minsta) värde $f(\bar{p})$ på D . Antag att $n = 2$ och att D begränsas av kurvorna $c_1, \dots, c_n$ vars skärningspunkter bildar hörnen H_k .



Det föreligger fyra möjligheter för $\bar{p}$:

1°. $\bar{p}$ inre punkt i D , f har partiella derivator i $\bar{p}$:

$\bar{p}$ lokal extrempunkt och $\text{grad } f(\bar{p}) = \vec{0}$

2°. $\bar{p}$ inre punkt i D , f saknar partiella derivator i $\bar{p}$.

3°. $\bar{p}$ ligger på randkurvan c_k , men är ej en hörnpunkt:

$\bar{p}$ behöver inte vara stationär punkt för f ,

men är en lokal extrempunkt under bivillkoret $(x, y) \in c_k$.

4°. $\bar{p}$ är en hörnpunkt H_k :

$\bar{p}$ behöver inte vara lokal extrempunkt för f under bivillkoret $(x, y) \in c'_k$,

där $c'_k = c_k \cup \{\text{förlängningen av } c_k \text{ förbi hörnet } H_k\}$,

ty f kan anta värden större än (mindre än) $f(\bar{p})$ godtyckligt nära $\bar{p}$ på c_k :s förlängning.

Exempel 94. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = x + x^2 + y^2$ på den kompakta cirkelskivan

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lösning: Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{Inre punkt i } D}$$

För att undersöka ∂D övergår vi till polära koordinater.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Definiera $\varphi(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 1 + \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} \varphi(0) = 2 = \varphi(2\pi), & \text{största värde på } [0, 2\pi] \\ \varphi(\pi) = 0, & \text{minsta värde på } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Funktionen f 's största och minsta värde söks bland:

$$f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}, \quad f(\underbrace{1, 0}_{t=0, 2\pi}) = 2, \quad f(\underbrace{-1, 0}_{t=\pi}) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \text{Största värdet är } f(1, 0) = 2. \\ \text{Minsta värdet är } f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

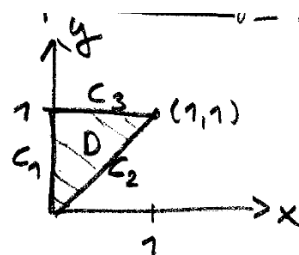
Exempel 95. Bestäm det största värdet av funktionen $f(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$, $0 \leq x \leq y \leq 1$.

Lösning: Definitionsmängden är en kompakt triangel.

Ett största värde existerar.

De stationära punkterna ges av:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (\frac{1}{2}, 0) \notin D$$



Ingen stationär punkt i D° , det största värdet antas på ∂D .

1°) Sträckan c_1 :

$$\varphi_1(y) = f(0, y) = 3 - y^2, \quad y \in [0, 1].$$

$$\text{Maximum antas för } y = 0, \quad f(0, 0) = 3.$$

2°) Sträckan c_2 : $\varphi_2(x) = f(x, x) = 3 + x - 2x^2$, $x \in [0, 1]$

$$\varphi_2'(x) = 1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}.$$

Största värde antas antingen i $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ eller i någon av hörnpunkterna $(0, 0)$ och $(1, 1)$.

3°) Sträckan c_3 : $\varphi_3(x) = f(x, 1) = 2 + x - x^2$, $x \in [0, 1]$.

$$\varphi'_3(x) = 1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Bör beakta: $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ och $(1, 1)$ på c_3 .

$\therefore$ Möjliga punkter för maximum av f är:

$$(0, 1), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), (0, 0), (1, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

med funktionsvärdena: $2, \frac{25}{8}, 3, 2, \frac{9}{4}$

Svar: $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{25}{8}$ är det största värdet på D .

2.3.9 Största och minsta värden på icke-kompakta mängder

På icke-kompakta mängder är existensen av största och minsta värde inte garanterad.

Ofta försöker man göra en lämplig kompakt avskärning av definitionsmängden, och visar (ofta med uppskattningar), att värdena utför avskärningen inte påverkar resultatet.

Exempel 96. Bestäm största och minsta värde, (om de existerar), av $f(x, y) = e^{x+y}(4 - x^2 - y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

Lösning: $f(x, y) < 0$ utanför cirkeln $x^2 + y^2 = 4$. Sätt $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, kompakt mängd.
 f antar ett största värde på D .

Stationära punkter:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}(4 - x^2 - y^2 - 2x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}(4 - x^2 - y^2 - 2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - 2x^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = (1, 1) \in D \\ \text{eller} \\ (x, y) = (-2, -2) \notin D \end{cases}$$

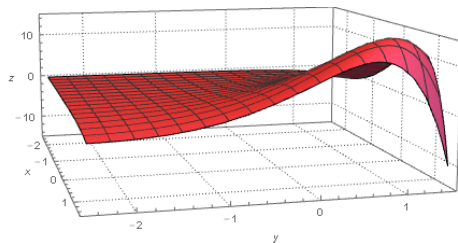
$f(1, 1) = 2e^2 (\approx 14, 78)$ och $f(x, y) = 0$ på ∂D .

$\therefore$ Största värdet på $\mathbb{R}^2$ är: $f(1, 1) = 2e^2$.

Minsta värde? Betrakta $f(x, y)$ på linjen $y = x$:

$$f(x, y) = e^{x+x}(4 - x^2 - x^2) = e^{2x}(4 - 2x^2) \rightarrow -\infty, \text{ då } x \rightarrow \infty$$

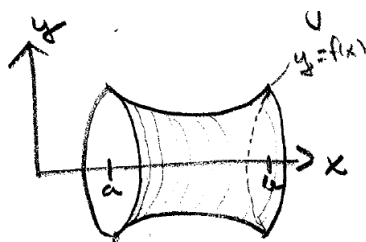
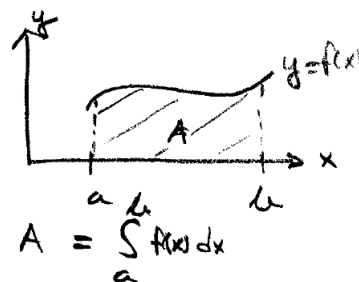
$\therefore$ Minsta värde saknas.



2.4 Dubbelintegraler

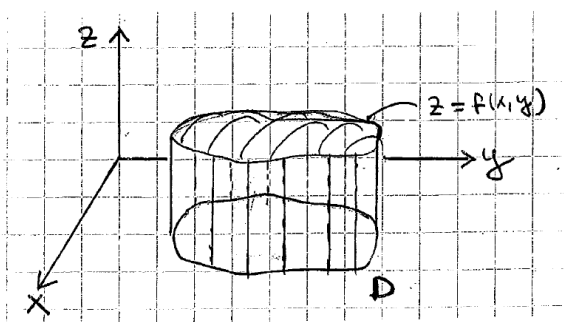
För en avbildning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är kontinuerlig och icke-negativ på intervallet $[a, b]$, kan vi använda (enkel)integralen $\int_a^b f(x) dx$

som ett mått på ytan mellan grafen av f och x -axeln.
Volymer av rotationssymmetriska kroppar och
rotationsytor kan även beräknas med enkelintegraler.



$$\begin{cases} V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx, \\ A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \end{cases}$$

Med dubbelintegralen kan vi beräkna volymer av kroppar som inte är rotationssymmetriska. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är sådan att $f(x, y) \geq 0$ och f är kontinuerlig på en kompakt mätbar mängd $D \in \mathbb{R}^2$. Då kan vi med $I_D(f) = \iint_D f(x, y) dx dy$ beteckna volumen av kroppen $k = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.



Vi vill definiera dubbelintegralen av f över D , då $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $D \subseteq D_f$. Följande egenskaper är önskvärda hos dubbelintegralen $I_D(f)$:

1. $I_D(f + g) = I_D(f) + I_D(g)$,
2. $I_D(\lambda f) = \lambda I_D(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $I_{D_1 \cup D_2}(f) = I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$, då $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,
4. $f(x, y) \leq g(x, y)$ i $D \implies I_D(f) \leq I_D(g)$.

Definition 32. Indikatorfunktionen $\chi_D(x, y)$ på mängden D definieras genom

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{om } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{om } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Mängden $D \in \mathbb{R}^2$ är mätbar, om den har en ändlig area, vars mått betecknas $m(D)$. (Detaljerat i anmärkning.) Låt D_k , $k = 1, \dots, n$ vara mätbara parvis disjunkta mängder i $\mathbb{R}^2$, ($D_i \cap D_j = \emptyset$, då $i \neq j$), och sätt $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$. Funktionen $f(x, y)$, som är konstant a_k på D_k , kallas den mätbara trappfunktionen,

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{D_k}(x, y).$$

Dubbelintegralen av trappfunktionen f över D definieras som talet

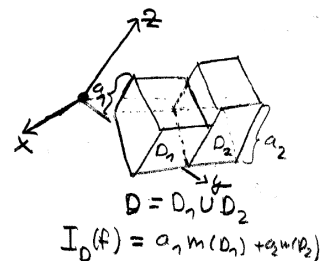
$$I_D(f) := \sum_{k=1}^n a_k \cdot m(D_k).$$

Anmärkning. Man kan lätt visa att $I_D(f)$ uppfyller egenskaperna 1.-4. ovan.

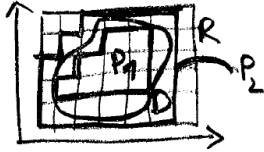
Anmärkning. Geometriskt är $a_k m(D_k)$, $a_k > 0$, volymen av en ”cylinder” med basarean $m(D_k)$ och höjden a_k . Vi utnyttjar i fortsättningen följande egenskap för mätbara mängder:

$$m(D) = m\left(\bigcup_{k=1}^n D_k\right) = \sum_{k=1}^n m(D_k), \quad \text{då } D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j,$$

och $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$.



Anmärkning. (Om ytmåttet $m(D)$). Betrakta mängden $D \subset \mathbb{R}^2$ och en rektangel R som omfattar D , ($D \subset R$).



R indelas i små rektanglar. Låt P_1 vara en mängd bestående av små rektanglar så att $P_1 \subseteq D$ och likaledes P_2 så att $D \subseteq P_2$.

Arean av P_1 och P_2 kan beräknas som summan av de ingående rektanglarnas areor. Nu kan de ingående rektanglarna göras godtyckligt små och vi sätter:

$$\begin{cases} m^*(D) = \inf_{D \subseteq P_2} m(P_2) = \text{yttre måttet av } D, \\ m_*(D) = \sup_{P_1 \subseteq D} m(P_1) = \text{inre måttet av } D. \end{cases}$$

Om $m^*(D) = m_*(D)$ så är D mätbar med måttet $m(D) = m^*(D)$.

Antag nu att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är begränsad på en mängd $D \subseteq D_f$, som är mätbar och begränsad. Då kan vi jämföra f med mätbara trappfunktioner, för vilka egenskap 4., (sida 160), gäller och försöka definiera ett tal $I_D(f)$.

Då f är begränsad uppåt på D , $f(x, y) \leq S \forall (x, y) \in D$, finns det mätbara trappfunktioner ψ så att

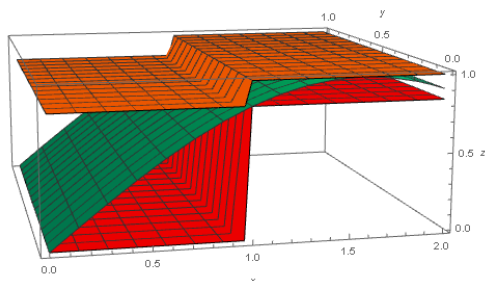
$$\psi(x, y) \geq f(x, y) \text{ i } D,$$

exempelvis $\psi(x, y) \equiv S$ i D . För varje övre trappfunktion vill vi att 4. gäller.

$$I_D(f) \leq I_D(\psi).$$

Analogt finns mätbara undre trappfunktioner $\varphi(x, y) \leq f(x, y)$ i D . (Exempelvis $\varphi(x, y) \equiv s \leq f(x, y)$ i D). För varje undre trappfunktion vill vi att 4. gäller:

$$I_D(\varphi) \leq I_D(f).$$



$f(x, y) = \sin x$ på $([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 1])$ med övre och undre trappfunktion

Definition 33. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$.

Överintegralen $I_D^+(f)$ av f över D definieras som

$$I_D^+(f) := \inf I_D(\psi), \text{ då } f \leq \psi \text{ på } D \text{ och } \psi \text{ mätbar trappfunktion.}$$

Underintegralen $I_D^-(f)$ av f över D definieras som

$$I_D^-(f) := \sup I_D(\varphi), \varphi \leq f \text{ på } D \text{ och } \varphi \text{ mätbar trappfunktion}$$

Anmärkning. $I_D^-(f) \leq I_D^+(f)$, ty $\varphi \leq f \leq \psi \forall (x, y) \in D$ ger att $\sup_{\varphi \leq f} I_D(\varphi) \leq I_D(\psi)$ för varje ψ , så

$$I_D^-(f) = \sup_{\varphi \leq f} I_D(\varphi) \leq \inf_{\psi \geq f} I_D(\psi) = I_D^+(f).$$

Definition 34. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$. Om $I_D^-(f) = I_D^+(f)$, så är f integrerbar över D och det gemensamma värdet $I_D(f) := I_D^-(f) = I_D^+(f)$ kallas dubbelintegralen av f över D och betecknas

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy := I_D(f).$$

Sats 50. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad och likformigt kontinuerlig på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$. Då är f integrerbar över D .

Bevis. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. f likformigt kont. ger:

$$\exists \delta > 0 : |(x, y) - (x', y')| < \delta, (x, y), (x', y') \in D \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Dela in $\mathbb{R}^2$ i kvadrater med sidlängd $< \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. D delas in i mätbara parvis disjunkta delar D_k , $k = 1, \dots, n$. Då gäller

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon \text{ för } (x, y), (x', y') \in D_k, k = 1, \dots, n,$$

eftersom $|(x, y) - (x', y')| < \delta$.

Då f är begränsad på varje D_k existerar för $k = 1, \dots, n$

$$S_k := \sup_{(x, y) \in D_k} f(x, y) \quad \text{och} \quad s_k := \inf_{(x, y) \in D_k} f(x, y).$$

Nu gäller

$$I_D^+(f) - I_D^-(f) \leq \sum_{k=1}^n S_k m(D_k) - \sum_{k=1}^n s_k m(D_k) = \sum_{k=1}^n (S_k - s_k) m(D_k).$$

Tag godtyckligt $\varepsilon' > 0$. Egenskaperna för sup och inf ger:

$$\begin{cases} S_k \leq f(x, y) + \varepsilon', & \text{för något } (x, y) \in D_k, \\ s_k \geq f(x', y') - \varepsilon', & \text{för något } (x', y') \in D_k. \end{cases}$$

Då gäller det för alla $\varepsilon' > 0$ att

$$S_k - s_k \leq f(x, y) - f(x', y') + 2\varepsilon' < \varepsilon + 2\varepsilon'.$$

Men detta innebär att $S_k - s_k \leq \varepsilon$. Därmed har vi för alla $\varepsilon > 0$ att

$$I_D^+(f) - I_D^-(f) \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon \cdot m(D_k) = \varepsilon \cdot m(D),$$

vilket innebär att $I_D^+(f) = I_D^-(f)$ och att f är integrerbar över D . $\square$

Anmärkning. Om mängden D i Sats 50 är kompakt (sluten och begränsad), så räcker det med att kräva att f är kontinuerlig på D , ty då är ju f även begränsad (Sats 9) och likformigt kontinuerlig (Sats 12).

På basen av beviset av Sats 50 kan vi formulera:

Sats 51. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad och likformigt kontinuerlig på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$. Då kan $I_D(f) = \iint_D f(x, y) \, dx dy$ approximeras godtyckligt noga med en översumma eller undersumma svarande mot en indelning av D i tillräckligt små mätbara delmängder D_k , dvs. diametern

$$\text{diam}(D_k) := \sup\{|(x, y) - (x', y')|\} \quad \begin{cases} (x, y) \in D_k \\ (x', y') \in D_k \end{cases}$$

skall vara tillräckligt liten för varje k .

Med sammaindelning som i beviset av Sats 50 låter vi $(x_k, y_k) \in D_k$ vara en godtycklig punkt i D_k . Då gäller $s_k \leq f(x_k, y_k) \leq S_k$ och

$$I_D(f) - \varepsilon' \leq \sum_{k=1}^n s_k m(D_k) \leq \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) m(D_k) \leq \sum_{k=1}^n S_k m(D_k) \leq I_D(f) + \varepsilon',$$

där $\varepsilon' = \varepsilon \cdot m(D)$. Alltså gäller:

Sats 52. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad och likformigt kontinuerlig på en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq D_f$.

Då approximerar Riemannsumman $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) m(D_k)$ dubbelintegralen $I_D(f)$ godtyckligt noggrannt, om $\max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(D_k)$ är tillräckligt litet.

2.4.1 Viktiga egenskaper hos dubbelintegralen

Följande sats visar att vår definition av $I_D(f)$ uppfyller egenskap 4.

Sats 53. Låt $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsade och integrerbara funktioner över den mätbara och begränsade mängden $D \subseteq D_f \cap D_g$, och antag att $f(x, y) \leq g(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$. Då gäller

$$I_D(f) = \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy = I_D(g). \quad (27)$$

Bevis. Låt φ vara mätbar trappfunktion sådan att $\varphi \leq f$ i D . Detta implicerar att $\varphi \leq g$ i D .

$$I_D(f) = I_D^-(f) = \sup_{\varphi \leq f} I_D(\varphi) \leq \sup_{\varphi \leq g} I_D(\varphi) = I_D^-(g) = I_D(g).$$

□

I det följande verifieras egenskap 3. för $I_D(f)$:

Sats 54. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är begränsad och integrerbar över de mätbara och begränsade mängderna D_1 och D_2 , $D = D_1 \cup D_2 \subseteq D_f$ och $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Då är f integrerbar över D och $I_D(f) = I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (28)$$

Bevis. Visar att $I_{D_1 \cup D_2}^-(f) \geq I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$. Analogt visas $I_{D_1 \cup D_2}^+(f) \leq I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$, och därmed gäller (28).

Tag $\varepsilon > 0$. Då $\exists \varphi_1$ mätbar trappfunktion på D_1 , $\varphi_1 \leq f$ på D_1 , så att $I_{D_1}(\varphi_1) \geq I_{D_1}(f) - \varepsilon$.

Vidare $\exists \varphi_2$ mätbar trappfunktion på D_2 , $\varphi_2 \leq f$ på D_2 , så att $I_{D_2}(\varphi_2) \geq I_{D_2}(f) - \varepsilon$. Definiera:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x, y), & \text{om } (x, y) \in D_1, \\ \varphi_2(x, y), & \text{om } (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

φ mätbar trappfunktion på $D = D_1 \cup D_2$ med $\varphi \leq f$ på D .

Då gäller för varje $\varepsilon > 0$:

$$I_{D_1 \cup D_2}^-(f) = \sup_{\varphi \leq f} I_{D_1 \cup D_2}(\varphi) \geq I_{D_1 \cup D_2}(\varphi) = I_{D_1}(\varphi_1) + I_{D_2}(\varphi_2) \geq I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f) - 2\varepsilon.$$

Alltså gäller det att $I_{D_1 \cup D_2}^-(f) \geq I_{D_1}(f) + I_{D_2}(f)$. □

Anmärkning. Genom upprepad användning av Sats 54 kan D delas upp i ett ändligt antal mätbara parvis disjunkta delmängder $D_1, \dots, D_n$ och $I_D(f) = I_{D_1}(f) + \dots + I_{D_n}(f)$.

Nästa sats etablerar egenskaperna 1. och 2., dvs. att avbildningen $f \mapsto I_D(f)$ är linjär (I_D linjär operator).

Sats 55. Låt $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara integrerbara funktioner på den mätbara och begränsade mängden $D \subseteq D_f \cap D_g$. Då gäller för $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ att $\lambda f + \mu g$ är integrerbar på D och $I_D(\lambda f + \mu g) = \lambda I_D(f) + \mu I_D(g)$,

$$\iint_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) \, dx dy = \lambda \cdot \iint_D f(x, y) \, dx dy + \mu \cdot \iint_D g(x, y) \, dx dy. \quad (29)$$

Bevis. a) Nu gäller: $\left. \begin{array}{l} \varphi_1 \leq f, \varphi_1 \text{ trappfunktion} \\ \varphi_2 \leq g, \varphi_2 \text{ trappfunktion} \end{array} \right\} \implies \underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}_{\text{mätbar trappfunktion}} \leq f + g.$

$$\begin{aligned} \text{Alltså: } I_D^-(f + g) &= \sup_{\substack{\varphi \leq f+g \\ \varphi \text{ mätbar trappfunkt.}}} I_D(\varphi) \geq \sup_{\substack{\varphi_1 \leq f \\ \varphi_2 \leq g}} I_D(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &= \sup_{\substack{\varphi_1 \leq f \\ \varphi_2 \leq g}} (I_D(\varphi_1) + I_D(\varphi_2)) = \sup_{\varphi_1 \leq f} I_D(\varphi_1) + \sup_{\varphi_2 \leq g} I_D(\varphi_2) \\ &= I_D(f) + I_D(g). \end{aligned}$$

$$\therefore I_D^-(f + g) \geq I_D(f) + I_D(g).$$

Analogt: $I_D^+(f + g) \leq I_D(f) + I_D(g)$, vilket ger att $f + g$ integrerbar, $I_D(f + g) = I_D(f) + I_D(g)$.

b) Antag att $\lambda \geq 0$: ($\varphi_1 \leq f \implies \lambda \varphi_1 \leq \lambda f$)

$$I_D^-(\lambda f) = \sup_{\left\{ \begin{array}{l} \varphi \leq \lambda f \\ \varphi \text{ mätbar trappfunkt.} \end{array} \right\}} I_D(\varphi) \geq \sup_{\varphi_1 \leq f} I_D(\lambda \varphi_1) = \lambda \sup_{\varphi_1 \leq f} I_D(\varphi_1) = \lambda I_D(f).$$

$\therefore I_D^-(\lambda f) \geq \lambda I_D(f)$, analogt: $I_D^+(\lambda f) \leq \lambda I_D(f)$, så $I_D(\lambda f) = \lambda I_D(f)$ då $\lambda \geq 0$. För $\lambda < 0$ visas analogt att λf integrerbar, med beaktande av att $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$ om $\lambda < 0$.

$$(I_D^+(\lambda f) \underset{(\lambda < 0)}{=} \lambda I_D^-(\lambda f))$$

□

Sats 56. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på den kompakta mätbara mängden $D \subseteq D_f$. Då är $|f|$ integrerbar över D och $|I_D(f)| \leq I_D(|f|)$,

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy. \quad (30)$$

Bevis. f kontinuerlig på $D \implies |f|$ kontinuerlig på D (Ex 26)

$\implies |f|$ likformigt kontinuerlig och begränsad på D (Satserna 9, 12)

$\implies |f|$ integrerbar över D (Sats 50). Nu gäller:

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Satserna 53 och 55 ger

$$-I_D(|f|) = I_D(-|f|) \leq I_D(f) \leq I_D(|f|),$$

alltså gäller $|I_D(f)| \leq I_D(|f|)$ och (30). □

Sats 57. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är begränsad på en begränsad mätbar nollmängd D , $m(D) = 0$. Då är f integrerbar och $I_D(f) = 0$.

Bevis. För $\begin{cases} \varphi \leq f, \varphi \text{ mätbar trappfunktion,} \\ \psi \geq f, \psi \text{ mätbar trappfunktion,} \end{cases}$ gäller $I_D(\varphi) = 0$,
gäller $I_D(\psi) = 0$.

$$\therefore I_D^-(f) = \sup_{\varphi \leq f} I_D(\varphi) = 0, \quad I_D^+(f) = \inf_{\psi \geq f} I_D(\psi) = 0.$$

Då är $I_D^-(f) = I_D^+(f) = 0$, så f integrerbar och $I_D(f) = 0$. $\square$

Sats 58. (Medelvärdessatsen för dubbelintegraler). Om $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga på en kompakt, mätbar och sammanhängande mängd D , och om $g(x, y)$ inte byter tecken på D , så är

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) \, dx dy = f(a, b) \iint_D g(x, y) \, dx dy \quad (31)$$

för någon punkt (a, b) i D .

Bevis. Antag att $g(x, y) \geq 0$ på D . Då gäller:

$$m = \inf_D f(x, y) \leq f(x, y) \leq \sup_D f(x, y) = M, \quad \forall (x, y) \in D,$$

vilket ger ($g \geq 0$) att

$$(\star) \quad mg(x, y) \leq g(x, y)f(x, y) \leq M g(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

f, g kontinuerlig på kompakta $D \implies f \cdot g$ kontinuerlig på D och dessutom likformigt kontinuerlig och begränsad, så satserna 50, 53 och 55 ger för $(\star)$:

$$mI_D(g) \leq I_D(f \cdot g) \leq MI_D(g).$$

Därmed $\exists c \in [m, M]$ så att $I_D(f \cdot g) = c \cdot I_D(g)$, Sats 11 ger att $f(D) = [m, M]$, (D kompakt och sammanhängande).

Då $\exists (a, b) \in D$ med $f(a, b) = c$. $\square$

Korollarium. (till sats 58). Om f är kontinuerlig på en kompakt, mätbar och sammanhängande mängd D , så är $I_D(f) = f(a, b) \cdot m(D)$ för någon punkt $(a, b) \in D$,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = f(a, b) \cdot m(D). \quad (32)$$

Bevis. Välj $g(x, y) \equiv 1$ på D . (g mätbar trappfunktion.) Då gäller:

$$I_D(f) = I_D(f \cdot g) = f(a, b)I_D(g) = f(a, b)(1 \cdot m(D)) = f(a, b)m(D),$$

för någon punkt $(a, b) \in D$. □

2.4.2 Upprepad Integration

Beräkning av dubbelintegraler kan ofta reduceras till två endimensionella integrationer:

Sats 59. Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på en mängd D av formen

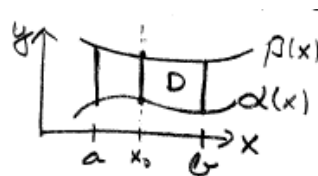
$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga på $[a, b]$ och $\alpha(x) \leq \beta(x)$, så gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right] dx. \quad (33)$$

Anmärkning. 1. Ett område av formen D i Sats 59

kallas enkelt i y-led: Beräkningsmetoden i (33)

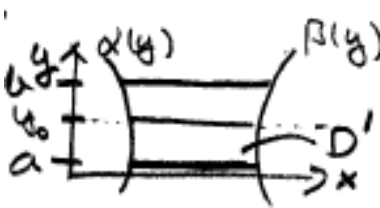


Först integrerar man för varje enskilt x -värde i $[a, b]$ $f(x, y)$ med avseende på y över intervallet $[\alpha(x), \beta(x)]$ och betraktar denna integral som en funktion av x , som sedan integreras med avseende på x över intervallet $[a, b]$.

2. Om $f(x, y)$ kontinuerlig på $D' = \{(x, y) : a \leq y \leq b, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$ där $\alpha(y), \beta(y)$ kontinuerliga på $[a, b]$ och $\alpha(y) \leq \beta(y)$ så gäller:

$$\iint_{D'} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \right] dy. \quad (34)$$

D' är då enkelt i x -led:

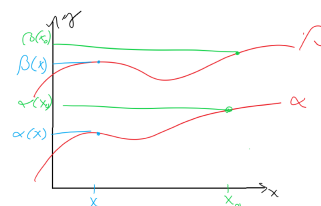


Bevis. Först visar vi att den inre integralen i högerled av (33) är kontinuerlig på $[a, b]$, definiera därför

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Tag $x_0 \in [a, b]$. Undersöker skillnaden:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy - \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0, y) \, dy$$



$$\begin{aligned} &= \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(x, y) \, dy + \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy - \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} f(x_0, y) \, dy - \int_{\beta(x)}^{\beta(x_0)} f(x_0, y) \, dy \\ &= \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} [f(x, y) - f(x_0, y)] \, dy + \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(x, y) \, dy - \int_{\beta(x)}^{\beta(x_0)} f(x_0, y) \, dy = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

$(f \text{ kontinuerlig} \wedge D \text{ kompakt}) \implies \exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in D.$

$(\alpha(x), \beta(x) \text{ kontinuerlig på } [a, b]) \implies \exists M' > 0 : |\alpha(x)| \leq M', |\beta(x)| \leq M', x \in [a, b].$

Tag godtycklig. $\varepsilon > 0$. f kontinuerlig på kompakt $D \implies f$ likformigt kontinuerlig på D .

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : (|(x, y) - (x', y')| < \delta, (x, y), (x', y') \in D) \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon. \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ kontinuerlig i } x_0 \implies \exists \delta' > 0 : |x - x_0| < \delta' \implies |\alpha(x) - \alpha(x_0)| < \varepsilon, \\ \beta \text{ kontinuerlig i } x_0 \implies \exists \delta'' > 0 : |x - x_0| < \delta'' \implies |\beta(x) - \beta(x_0)| < \varepsilon. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |I_1| = \left| \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x)} [f(x, y) - f(x_0, y)] dy \right| \leq \varepsilon |\beta(x) - \alpha(x_0)|, & \text{om } |x - x_0| < \delta, \\ |I_2| = \left| \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} f(x, y) dy \right| \leq M |\alpha(x_0) - \alpha(x)| < M \cdot \varepsilon, & \text{om } |x - x_0| < \delta', \\ |I_3| = \left| \int_{\beta(x)}^{\beta(x_0)} f(x_0, y) dy \right| \leq M |\beta(x_0) - \beta(x)| < M \cdot \varepsilon, & \text{om } |x - x_0| < \delta''. \end{cases}$$

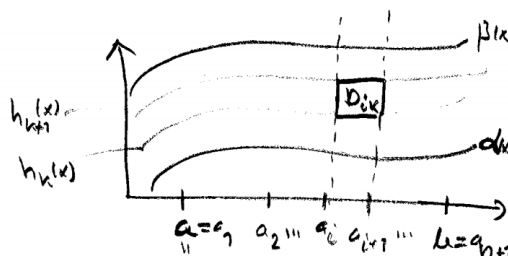
$$\therefore |x - x_0| < \min(\delta, \delta', \delta'') \implies |F(x) - F(x_0)| \leq 2\varepsilon \cdot M' + 2M\varepsilon = 2(M' + M) \cdot \varepsilon$$

$\therefore \underline{F(x) \text{ är kontinuerlig i } x_0.}$

Definiera $h_k(x) = \alpha(x) + \frac{k-1}{m}(\beta(x) - \alpha(x))$, $k = 1, \dots, m+1$.

Välj D_{ik} som i figuren:

Betrakta:



$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right] dx = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\sum_{k=1}^m \int_{h_k(x)}^{h_{k+1}(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\int_{h_k(x)}^{h_{k+1}(x)} f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

$$\text{Sätt: } \begin{cases} S_{ik} = \sup_{(x,y) \in D_{ik}} f(x, y), \\ s_{ik} = \inf_{(x,y) \in D_{ik}} f(x, y). \end{cases}$$

Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då gäller

$$\begin{aligned}
I &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m S_{ik} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (h_{k+1}(x) - h_k(x)) \, dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m S_{ik} \cdot m(D_{ik}) \\
&\leq I_D(f) + \varepsilon, \text{ om indelningen tillräckligt fin.}
\end{aligned}$$

Analogt: $I \geq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m s_{ik} m(D_{ik}) \geq I_D(f) - \varepsilon$, indelningen tillräckligt fin.

$\therefore -\varepsilon \leq I - I_D(f) \leq \varepsilon$ för alla $\varepsilon > 0$, $\implies I_D(f) = I$, formel (33) gäller. $\square$

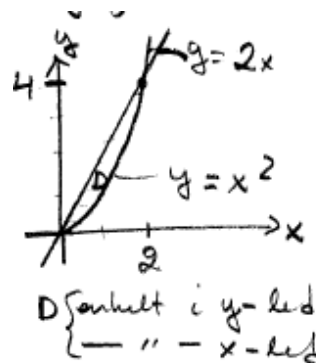
Exempel 97. Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$,

där $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2x\}$

alt 1.: D enkelt i y -led, tillämpar Sats 59 med

$a = 0, b = 2, \alpha(x) = x^2, \beta(x) = 2x$

Då ger (33) att:



$$\begin{aligned}
\underline{\iint_D (x^2 + y^2) dx dy} &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(\frac{14}{3} x^2 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\
&= \left[\frac{7}{6} x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^2 = \frac{216}{35} (\approx 6,17)
\end{aligned}$$

alt 2.: D enkelt i x -led, tillämpar formel (34) med $a = 0, b = 4, \alpha(y) = \frac{y}{2}$ och $\beta(y) = \sqrt{y}$

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} dy \\
 &= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13}{24} y^3 \right) dy = \left[\frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{13}{96} y^4 \right]_0^4 \\
 &= \frac{216}{35}.
 \end{aligned}$$

Vi ger följande sats för beräkningar av volymer utan bevis:

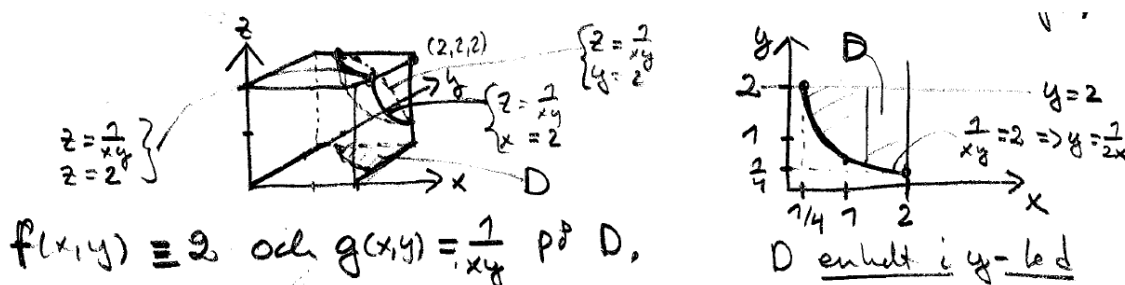
Sats 60. Om $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är begränsade och integrerbara över en mätbar begränsad mängd D och $f(x, y) \geq g(x, y)$ i D , så gäller

$$\iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = V(A) \quad (35)$$

där $V(A)$ är volymen av mängden $A = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$

Exempel 98. En kub K har hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ och $(2, 2, 2)$. Kuben delas i två bitar av ytan $z = \frac{1}{xy}$. Beräkna volymen av den bit som inte innehåller origo.

Lösning:



Formel (35): (A den bit som inte innehåller origo)

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{V(A)}} &= \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] \, dx dy \stackrel{(33)}{=} \int_{\frac{1}{4}}^2 \left[\int_{1/2x}^2 \left(2 - \frac{1}{xy}\right) dy \right] dx \\
&= \int_{1/4}^2 \left[2y - \frac{1}{x} \ln y \right]_{1/2x}^2 dx = \int_{1/4}^2 \left(4 - \frac{1}{x}(1 + \ln 4) - \frac{1}{x} \ln x \right) dx \\
&= \left[4x - (1 + \ln 4) \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{1/4}^2 \\
&= \underline{\underline{7 - 3 \ln 2 - \frac{9}{2}(\ln 2)^2 (\approx 2,8)}}
\end{aligned}$$

2.4.3 Variabelsubstitution i dubbelintegraler

Ibland kan beräkningen av en dubbelintegral $\iint_D f(x, y) dx dy$ underlättas genom övergång till nya integrationsvariabler u och v genom en substitution

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

varvid området D' i uv -planet avbildas på området D i xy -planet. Orsaken till variabelbytet kan vara ett "krångligt" område D eller en besvärlig integrand.

Substitutionsformeln för enkelintegraler, $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) x'(t) dt$, ($x = x(t)$), har då motsvarigheten

$$(\star) \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv,$$

där absoluta beloppet av funktionaldeterminanten spelar samma roll som $x'(t)$ för enkelintegraler.

Dubbelintegralerna över D och D' definieras med hjälp av areor i xy -respektive uv -planen och den lokala ytskalan vid avbildningen $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ är $\left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right|$ så för "små områden" D och D' gäller

$$m(D) \approx \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| m(D').$$

Formel $(\star)$ kan nu motiveras på följande vis:

Dubbelintegralen kan approximeras godtyckligt noga med en Riemannsumma: (D_k "små")

$$(\star\star) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) m(D_k), \quad (x_k, y_k) \in D_k, D = \bigcup_{k=1}^n D_k.$$

Låt D_k vara bild av D'_k i uv -planet och (x_k, y_k) bild av $(u_k, v_k) \in D'_k$. Då kan $(\star\star)$ skrivas i formen

$$(\star\star\star) \quad \sum_{k=1}^n f(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k)) \frac{m(D_k)}{m(D'_k)} m(D'_k)$$

Om även D'_k är "små" borde $\frac{m(D_k)}{m(D'_k)} \approx \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right|_{|(u_k, v_k)}}$, och $(\star\star\star)$ är då en god approximation till högerledet i $(\star)$ om indelning av D' i D'_k :n är fin.

Vi har, utan bevis, motiverat följande sats:

Sats 61. Formeln för variabelsubstitution:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| \cdot du dv \quad (36)$$

gäller under förutsättningarna 1° – 3°:

1. f begränsad och integrerbar över mätbar, begränsad mängd D ,
2. $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ ger omvändbar avbildning av en mätbar och begränsad mängd D' på D .
3. Funktionerna $x(u, v)$ och $y(u, v)$ har kontinuerliga partiella derivator på D' och $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ på D' .

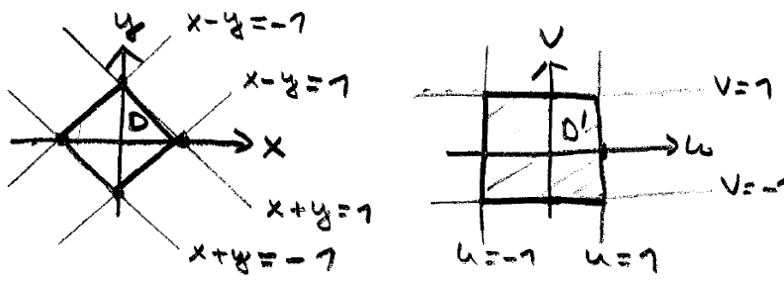
2.4.4 Linjära transformationer

Ett område D i xy -planet som begränsas av linjestycken kan ofta transformeras över till ett område D' i uv -planet som är enkelt i y -led eller x -led med en substitution

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \iff \begin{cases} x = x(u, v) = \frac{1}{ad-bc}(du - bv) \\ y = y(u, v) = \frac{1}{ad-bc}(-cu + av), \end{cases}$$

Om $0 \neq ad - bc = \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \frac{1}{\frac{d(x, y)}{d(u, v)}}$. Då blir den linjära avbildningen mellan D och D' omvändbar.

Exempel 99. Beräkna $\iint_D (x+y)^2 dx dy$ över området $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.



Lösning: Inför variablerna u och v genom:

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}$$

Då är $D' = \{(u, v) : -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$:

$$\left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}.$$

Formel (36) ger:

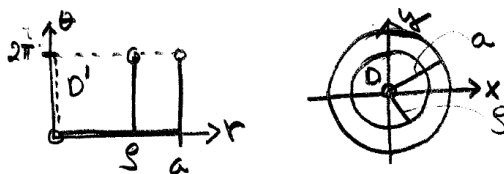
$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| \cdot du dv \\
 &= \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 \left(\int_{-1}^1 1 \cdot dv \right) du = \int_{-1}^1 u^2 du \\
 \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 &= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.
 \end{aligned}$$

2.4.5 Övergång till polära koordinater

Om området D är en cirkelskiva, en sektor eller en del av en sektor kan det vara fördelaktigt att införa polära koordinater, ifall cirkeln är origocentrerad:

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \\ y = y(r, \theta) = r \sin \theta, \end{cases} \quad \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \underline{\underline{r}}$$

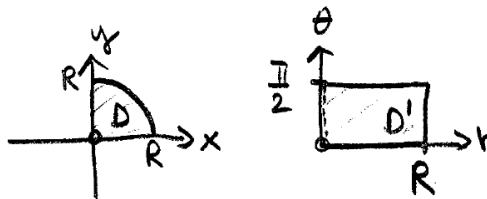
Området $D' = \{(r, \theta) : 0 < r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ avbildas bijektivt på $D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$.



Exempel 100. Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ över området $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Lösning: Inför polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 < r \leq R, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



Formel (36):

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \left| \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} \right| dr d\theta = \iint_{D'} r^2 \cdot r dr d\theta \\
 &= \int_0^R r^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot d\theta \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^R r^3 dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{8} \cdot R^4.
 \end{aligned}$$

Om D är en cirkelskiva med radie R och medelpunkt (x_0, y_0) kan man prova med substitutionen:

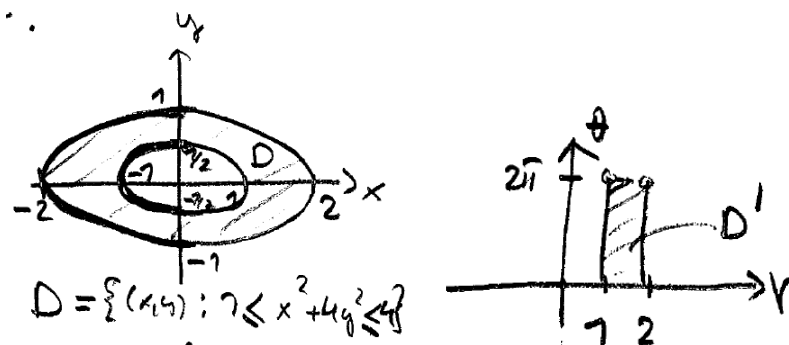
$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = x_0 + r \cos \theta, \\ y = y(r, \theta) = y_0 + r \sin \theta, \end{cases} \quad \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = r.$$

Om D är en origocentrerad ellipsskiva $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$ med halvaxlarna a och b kan man prova:

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = ar \cos \theta, \\ y = y(r, \theta) = br \sin \theta, \end{cases} \quad \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr.$$

Exempel 101. Beräkna $\iint_{1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4} x^2 dx dy$.

Lösning:



$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 \leq 4 & \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + 4y^2 \geq 1 & \iff x^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \cdot r \cdot \cos \theta, & 1 \leq r \leq 2, \\ y = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sin \theta, & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

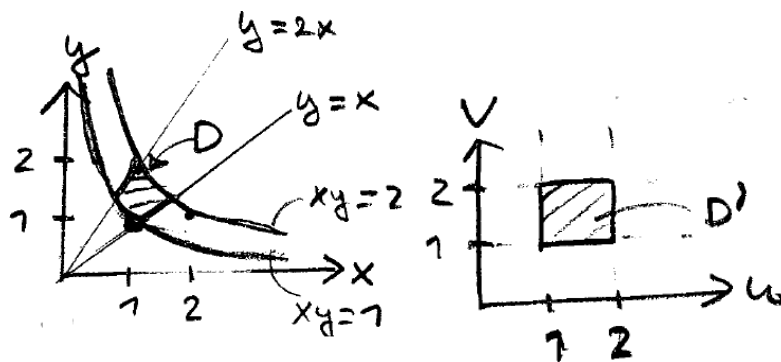
$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \frac{1}{2} r \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{r}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{D'} r^2 \cos^2 \theta \frac{r}{2} dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left(\int_1^2 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 d\theta = \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{15}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{15}{16} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{15}{8} \pi. \end{aligned}$$

Om man inte kan utföra en "standardsubstitution" måste man kolla att villkoren i Sats 61 är uppfyllda, bl.a. att D' avbildas bijektivt på D och att funktionaldeterminanten är $\neq 0$ i D' .

Exempel 102. Bestäm $I = \iint_D \frac{ye^{\frac{y}{x}}}{x(1+xy)^2} dx dy$ över området $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 2x, x > 0, y > 0\}$.

Lösning:



$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \left| \begin{array}{cc} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{y}{x} - \left(-\frac{y}{x} \right) = 2 \cdot \frac{y}{x} = 2v$$

$$\frac{d(x, y)}{\frac{d(u, v)}{d(x, y)}} = \frac{1}{\frac{d(u, v)}{d(x, y)}} = \frac{1}{2v} \neq 0 \text{ i } D'$$

Tag godt. $(x, y) \in D$. Antag $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D'$ avbildas på (x, y) :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = \sqrt{\frac{u_2}{v_2}} \\ \sqrt{u_1 v_1} = \sqrt{u_2 v_2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \\ u_1 v_1 = u_2 v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} u_1 = \frac{v_1 u_2}{v_2} \\ \frac{v_1^2 u_2}{v_2} = u_2 v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} u_1 = \frac{v_1 u_2}{v_2} \\ v_1^2 = v_2^2 \end{cases} \xrightarrow{(v_1, v_2 > 0)} \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2. \end{cases}$$

Omvändbar avbildning. Tillämpar Sats 61:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{=}{=} \iint_{D'} v \cdot \frac{e^v}{(1+u)^2} \cdot \left| \frac{1}{2v} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{e^v}{(1+u)^2} dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{e^v}{(1+u)^2} \right]_1^2 du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{e^2 - e}{(1+u)^2} du = \frac{1}{2} \left[-\frac{e^2 - e}{1+u} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - e) \underbrace{\left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)}_{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{e^2 - e}{12}. \end{aligned}$$

2.4.6 Generaliserade dubbelintegraler

Hittills har vi studerat begränsade funktioner på begränsade mätbara mängder i D . Vi skall nu undersöka två typer av generaliseringar:

1° f begränsad på obegränsad mängd D ,

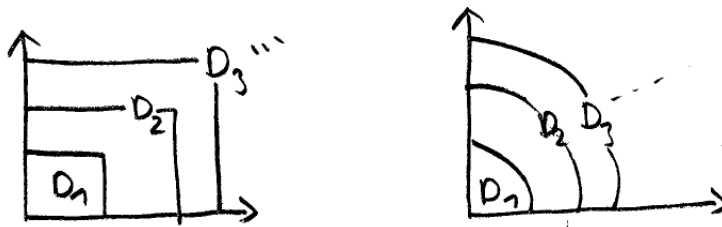
2° f obegränsad på begränsad mängd D .

Vi börjar med typ 1. och antar att $D \subseteq D_f$ är en obegränsad mängd, samt inför begreppet uttömmande följd för D :

Definition 35. Mängdföljden $(D_n)_{n=1}^\infty$ är en uttömmande följd för den obegränsade mängden D , om

- (i) $D_n \subseteq D_{n+1} \subset D$ för alla n ,
- (ii) D_n är mätbar och begränsad för alla n ,
- (iii) $(D' \subset D \text{ och } D' \text{ mätbar, begränsad}) \implies \exists N : D' \subseteq D_n \text{ då } n \geq N$.

Exempel på uttömmande följder för $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$



Exempel 103. Vi undersöker om $f(x, y) = y$ kan dubbelintegreras över halvbandet

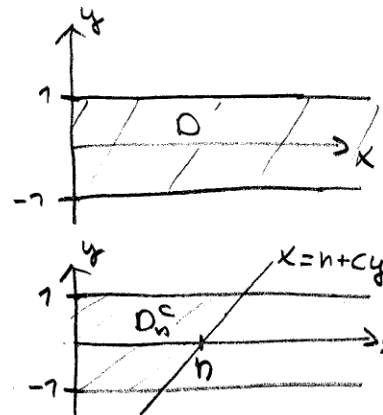
$$D = \{(x, y) : x \geq 0, |y| \leq 1\}.$$

D är obegränsad och f begränsad på D

Bildar en uttömmade följd

$$D_n^c = \{(x, y) : |y| \leq 1, 0 \leq x \leq n + cy\}$$

. För $n > |c|$:



$$\iint_{D_n^{(c)}} y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 y \left(\int_0^{n+cy} 1 \cdot dx \right) dy = \int_{-1}^1 y(n + cy) dy = \int_{-1}^1 cy^2 dy = \frac{2}{3}c.$$

Gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n^{(c)}} y \, dx \, dy$ beror på valet av c , Vilket gör att vi inte kan definiera $\iint_D y \, dx \, dy$.

Definition 36. Den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ är konvergent om

- (i) f är integrerbar över varje begränsad mätbar delmängd av D ,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{D_n}(f)$ existerar och är lika med I för varje uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^\infty$ för D .

Då definieras:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy := I.$$

I annat fall är dubbelintegralen divergent.

Kravet att kolla gränsvärdet i punkt (ii) i Definition 36 för varje uttömmande följd är ju i praktiken omöjligt. Om funktionen f inte byter teckan på D , ($f \geq 0$ eller $f \leq 0$), har vi följande användbara resultat som ger att det räcker att kolla en uttömmande följd:

Sats 62. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad på den obegränsade mängden D . Då är dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) dx dy$ konvergent, om och endast om gränsvärdet

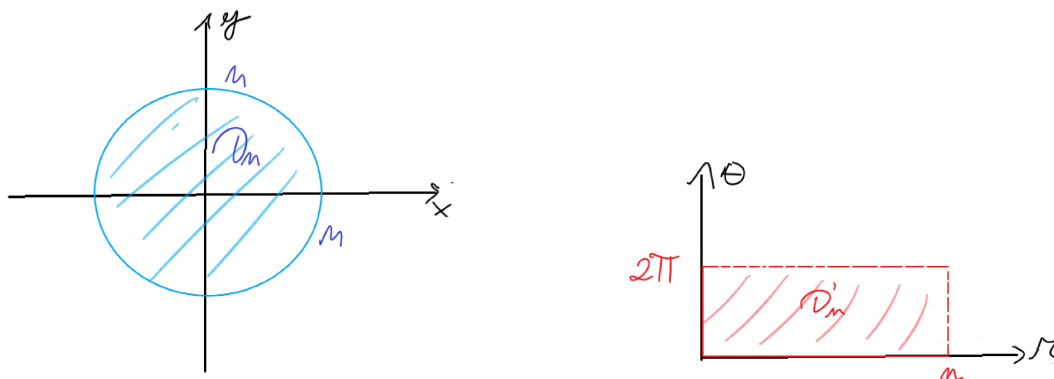
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} |f(x, y)| \, dx dy$$

existerar för någon uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^\infty$ för D .

Exempel 104. Undersök om $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ existerar.

Lösning: $D = \mathbb{R}^2$ obegränsad, $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ begränsad på D . $D_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}$ uttömmande följd för D .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = r.$$



$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{I_n}} &= \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_{D'_n} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n e^{-r^2} \cdot r \, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n d\theta \\
 &= \frac{1}{2} (1 - e^{-n^2}) \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = \underline{\underline{\pi(1 - e^{-n^2}) \rightarrow \pi, \text{ då } n \rightarrow \infty.}}
 \end{aligned}$$

Då $f(x, y) \geq 0$ på $D = \mathbb{R}^2$ ger Sats 62 att

$$\underline{\underline{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{x^2-y^2} dx dy = \pi.}}$$

Vi övergår till att behandla generaliseringar av typ 2° :

Definition 37. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara obegränsad på en begränsad och mätbar mängd D . Då är $(D_n)_{n=1}^\infty$ en uttömmande följd för f i D , om

- (i) $D_n \subseteq D$ och $D_n \subseteq D_{n+1}$ för alla n ,
- (ii) D_n är mätbar och begränsad för alla n ,
- (iii) $m(D \setminus D_n) \rightarrow 0$, då $n \rightarrow \infty$,
- (iv) f är begränsad på D_n för alla n .

Dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) dx dy$ är konvergent med värdet I , om

- (i) f är integrerbar över varje D_n ,
 (ii) $I_{D_n}(f) \rightarrow I$, då $n \rightarrow \infty$, för varje uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^\infty$ för f i D .

I annat fall är dubbelintegralen divergent.

Igen är det omöjligt att kontrollera varje uttömmande följd. Vi har en sats som är analog med Sats 62 och gör det möjligt att kontrollera en uttömmande följd ifall f inte byter tecken på D . Satsen ges utan bevis.

Sats 63. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara obegränsad på en mätbar begränsad mängd D . Då är dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ konvergent om och endast om gränsvärdet

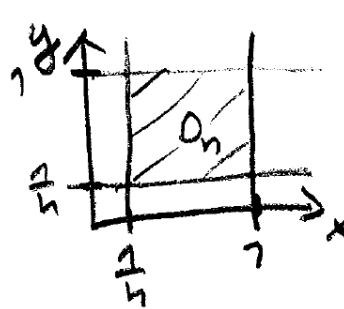
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} |f(x, y)| \, dx dy \quad \text{existerar}$$

för någon uttömmande följd $(D_n)_{n=1}^\infty$ för f i D .

Exempel 105. undersök om $\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}} \, dx dy$ är konvergent över $D = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$.

Sätt: $D_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1\}$ $(D_n)_{n=1}^\infty$ uttömmande följd för f i D .

$f(x, y)$ obegränsad i D , kontinuerlig på de kompakta mängderna D_n , dvs. integrerbar på D_n .



$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}} \, dx dy &= \int_{1/n}^1 \left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}} \, dy \right) dx = \left(\int_{1/n}^1 x^{-1/3} dx \right) \left(\int_{1/n}^1 y^{-2/3} dy \right) \\ &= \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{1/n}^1 \cdot \left[3y^{1/3} \right]_{1/n}^1 \\ &= \frac{9}{2} (1 - n^{-2/3})(1 - n^{-1/3}) \rightarrow \frac{9}{2}, \text{ då } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Då $f(x, y) > 0$ på D ger Sats 63 att

$$\underline{\underline{\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy^2}} \, dx dy = \frac{9}{2}}}$$

2.4.7 Generaliserade dubbelintegraler och upprepad integration utnyttjandes Fubinis Sats

Under vissa antaganden kan en generaliserad dubbelintegral beräknas genom upprepad integration. Betrakta exemplet där integrationsområdet är ett obegränsat halvband

$$D = \{(x, y) : x \geq a, c \leq y \leq d\},$$

och $f(x, y)$ är kontinuerlig på D . Om $I_D(f)$ är konvergent, är den enligt Definition 36 lika med $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$, där $D_n = \{(x, y) : a \leq x \leq n, c \leq y \leq d\}$.

Med stöd av Sats 59 gäller:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

en motsvarighet till formel (33), under förutsättningen att $I_D(f)$ är konvergent.

Nu är det inte klart att man får integrera först med avseende på x , dvs.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

behöver inte gälla. Frågan när vi får kasta om integrationsordningen besvaras av Fubinis Sats:

Sats 64. (Fubinis sats). Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och inte växlar tecken på en mängd

$$D = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\},$$

där "värdena" $-\infty$ och ∞ är tillåtna för a och c respektive b och d . (D kan vara en rektangelyta, ett halvband eller hela planet). Då gäller att om någon av de tre integralerna

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \iint_D f(x, y) \, dx dy, \\ I_2(f) &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \text{ och} \\ I_3(f) &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

är konvergent, så är alla tre konvergenta med samma värde.

Anmärkning. Antagandet att f inte växlar tecken är viktigt. I exempel 103 har vi exempelvis att

$$I_2(f) = \int_0^\infty \left(\int_{-1}^1 y \, dy \right) dy = \int_0^\infty 0 \, dx = 0,$$

men varken $I_1(f)$ eller $I_3(f)$ är konvergenta.

Ur satserna 62, 63 och 64 erhålls:

Sats 65. Om någon av integralerna $\iint_D |f(x, y)| \, dx dy$, $\int_a^b \left(\int_c^d |f(x, y)| dy \right) dx$ och $\int_c^d \left(\int_a^b |f(x, y)| dx \right) dy$ är konvergent, så är alla integralerna $I_1(f)$, $I_2(f)$ och $I_3(f)$ konvergenta. (Beteckning som i Sats 64).

Exempel 106. Konvergerar $\iint_D ye^{-\sqrt{x}} \, dx dy$ på mängden $D = \{(x, y) : 0 \leq x < +\infty, -1 \leq y \leq 1\}$?

Lösning: Betrakta $I = \int_0^\infty \left[\int_{-1}^1 |ye^{-\sqrt{x}}| dy \right] dx$

$$I = \int_0^\infty \left[2 \int_0^1 y e^{-\sqrt{x}} dy \right] dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{6}} < \frac{6}{x^{3/2}}, \text{ då } x \geq 1.$$

$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$ konvergent och $\int_1^\infty \frac{6}{x^{3/2}} dx$ konvergent ger att $I = \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$ konvergent. Enligt Sats 65 är $\iint_D y e^{-\sqrt{x}} dx dy$ konvergent med värdet

$$\underline{I_1(f)} = I_2(f) = \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_{-1}^1 y e^{-\sqrt{x}} dy \right)}_{=0} dx = 0.$$

Exempel 107. $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$ enligt Exempel 104. Enligt Fubinis sats, Sats 64, gäller då

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{x^2-y^2} dy \right) dx = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Då $e^{-x^2} \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller:

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}.$$

Observera att e^{-x^2} saknar elementär primitiv funktion.

2.5 Trippelintegraler

Allt vi utrett i avsnitten om dubbelintegraler kan naturligt utvidgas till funktion av tre variabler. För att göra detta behöver vi ett volymmått $m(D)$ av begränsade mätbara mängder $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Låt då $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en begränsad mängd och R ett axelriktat rätblock så att $D \subseteq R$. R indelas nu i axelriktade små rätblock. Låt P_1 vara en union av axelriktade små rätblock som valts så att $P_1 \subseteq D$. Analogt låter vi P_2 vara en union av axelriktade små rätblock som valts så att $D \subseteq P_2$. Låt $m(P_1)$ = volymen av P_1 och $m(P_2)$ = volymen av P_2 . Om man betraktar alla möjliga indelningar av R i axelriktade små rätblock och alla möjliga P_1 och P_2 , samt inför talen:

$$\begin{cases} m^*(D) = \inf_{P_2 \supseteq D} m(P_2), & \text{yttre måttet} \\ m_*(D) = \sup_{P_1 \subseteq D} m(P_1), & \text{inre måttet,} \end{cases}$$

så är D mätbar om $m^*(D) = m_*(D)$, med måttet eller volymen $m(D) := m^*(D) = m_*(D)$.

Antag nu att $f(x, y, z)$ är begränsad på en mätbar och begränsad mängd $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $D \subseteq D_f$.

Låt $(D_k)_{k=1}^n$ vara en indelning av D i mätbara parvis disjunkta delmängder. Definiera:

$$\begin{cases} S_k = \sup_{D_k} f, \\ s_k = \inf_{D_k} f, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n.$$

Analogt med definitionen för dubbelintegraler sätts:

$$\begin{cases} I_D^+(f) = \inf_{(D_k)} \sum_{k=1}^n S_k m(D_k) \\ I_D^-(f) = \sup_{(D_k)} \sum_{k=1}^n s_k m(D_k) \end{cases}$$

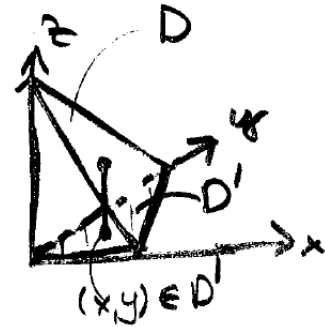
Då är f integrerbar om $I_D^+(f) = I_D^-(f)$ och har värdet $I_D(f) := I_D^+(f)$.

1°| Analogt med Sats 59 får vi, om f är kontinuerlig på $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D', \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$, och funktionerna α och β är kontinuerliga på D' , formeln

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{D'} \left[\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy, \quad (37)$$

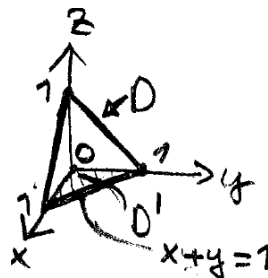
Innebörd: För fixa värden x och y integreras $f(x, y, z)$ med avseende på z över D 's snitt med en linje parallell med z -axeln.

Sedan integreras värdet av denna integral över D' . (Man kan även börja med en inre integral med fixerade $(x$ och $z)$ eller $(y$ och $z)$).



Exempel 108. Beräkna $I = \iiint e^{x+y+z} \, dx dy dz$ över $D = \text{tetraeder som begränsas av koordinatplanen och planet } x + y + z = 1$.

Enligt 1°, formel (37) erhålls:



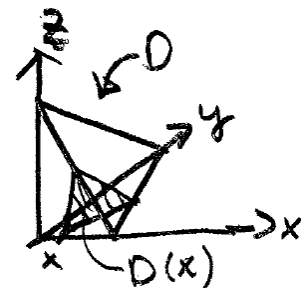
$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \left[\int_0^{1-x-y} e^{x+y+z} dz \right] dx dy = \iint_{D'} [e^{x+y+z}]_0^{1-x-y} dx dy \\ &= \iint_{D'} (e - e^{x+y}) dx dy = \iint_{D'} e \, dx dy - \iint_{D'} e^{x+y} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}e - \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} e^{x+y} dy \right] dx = \frac{1}{2}e - \int_0^1 (e - e^x) dx \\
 &= \frac{1}{2}e - [ex - e^x]_0^1 = \underline{\underline{\frac{e}{2} - 1}}.
 \end{aligned}$$

2°| Om de x -värden som förekommer i D utgör ett intervall $[a, b]$ och $f(x, y, z)$ är kontinuerlig på $D(x) = \{(y, z) : (x, y, z) \in D\}$, för $a \leq x \leq b$, så har vi formeln

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz \right] dx, \quad (38)$$

dvs. vi integrerar först med fixt x -värde över snittet $D(x)$. Värdet av denna dubbel integral integreras sedan med avseende på x .

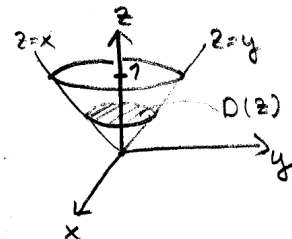


Också i fallet 2° kan x, y och z byta roller.

Exempel 109. Beräkna $I = \iiint_D z \, dx dy dz$ över kroppen $D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 0 \leq z \leq 1\}$.

Formel (38) ger då:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[\iint_{D(z)} z \, dx dy \right] dz = \int_0^1 z \underbrace{\left[\iint_{D(z)} dx dy \right]}_{=m(D(z))=\pi z^2} dz \\
 &= \int_0^1 \pi z^3 dz = \pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.
 \end{aligned}$$



3°| Variabelsubstitution: Antag att f är integrerbar, begränsad och att D är en begränsad och mätbar mängd i $\mathbb{R}^3$. Om avbildningen

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

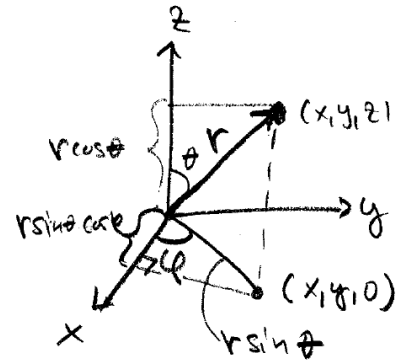
är en omvändbar avbildning av D' på D , där D' är begränsad och mätbar, och $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \neq 0$ i D' har vi formeln:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad (39)$$

för variabelsubstitution i trippelintegraler.

Exempel 110. En viktig variabelsubstitution i $\mathbb{R}^3$ är övergången till sfäriska (rymdpolära) koordinater:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \\ r > 0, \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$



ger omvändbar avbildning på $\mathbb{R}^3 \setminus z\text{-axeln}$.

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin \theta, \quad \text{se Exempel 56 b).}$$

Vi beräknar $\iiint_S z^2 \, dx dy dz$, där S är enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

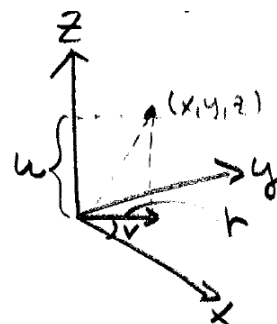
Lösning: Om $D = S \setminus z\text{-axeln}$ så är integralerna över S och D lika. ($z\text{-axeln}$ nollmängd).

$D' = \{(r, \theta, \varphi) : 0 < r \leq 1, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ avbildas omvändbart på D .

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\iiint_S z^2 \, dx dy dz}_{\text{}} &= \iint_D z^2 \, dx dy dz \stackrel{(39)}{=} \iiint_{D'} r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
 &= 2\pi \underbrace{\left(\int_0^1 r^4 dr \right)}_{=\frac{1}{5}} \left(\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right) = \frac{2\pi}{5} \underbrace{\left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi}_{=\frac{1}{3} - (-\frac{1}{3})} \\
 &= \frac{4\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

Exempel 111. Övergång till cyindriska koordinater: (Exempelvis vid rotationssymmetri kring z -axeln)

$$\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \\ z = u \\ r > 0 \\ 0 \leq v < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$



ger omvändbar avbildning på $\mathbb{R}^3 \setminus z\text{-axeln}$.

$\frac{d(x,y,z)}{d(r,v,u)} = r$, se exempel 6, demo 5, år 2016.

Exemplet 109, $I = \iiint_D z \, dx dy dz$ över $D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 0 \leq z \leq 1\}$

Kan lösas med cyindriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos v & 0 \leq u \leq 1 \\ y = r \sin v & 0 \leq v < 2\pi \\ z = u & 0 < r \leq u \end{cases}$$

Då ger formel (39):

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\iiint_D z \, dx dy dz}} &= \iiint ur \, dr dv du = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 u \underbrace{\left(\int_0^u r dr \right)}_{\frac{u^2}{2}} du \right) dv \\
&\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v < 2\pi \\ 0 < r \leq u \end{cases} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 u \cdot \frac{u^2}{2} du \right) dv = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, dv \right) \left(\int_0^1 \frac{u^3}{2} du \right) \\
&= 2\pi \cdot \left[\frac{u^4}{8} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.
\end{aligned}$$

2.5.1 Tabellerade tillämpningar av dubbel- och trippelintegraler

Area och Volym:

Arealen av en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kan beräknas med dubbelintegralen:

$$A(D) = \iint_D 1 \cdot dx dy. \quad (40)$$

Volymen av en begränsad och mätbar mängd $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kan beräknas med trippelintegralen:

$$V(K) = \iiint_K 1 \cdot dx dy dz. \quad (41)$$

Massa och tyngdpunkt

Massan av en begränsad och mätbar mängd $D \subseteq \mathbb{R}^3$ med ytdensitet $\rho(x, y), (kg/m^2)$, ges av:

$$M(D) = \iint_D \rho(x, y) dx dy, \quad (43)$$

och tyngdpunkten $T = (x_T, y_T)$ av

$$\begin{cases} x_T = \frac{1}{M(D)} \iint_D x \rho(x, y) \, dx dy, \\ y_T = \frac{1}{M(D)} \iint_D y \rho(x, y) \, dx dy. \end{cases} \quad (44)$$

Massan av en begränsad och mätbar mängd $K \subseteq \mathbb{R}^3$ med volymdensitet $\rho(x, y, z)$, (kg/m^3), ges av

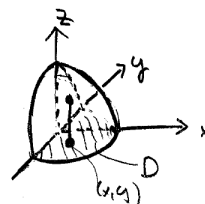
$$M(k) = \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad (45)$$

och tyngdpunkten $T = (x_T, y_T, z_T)$ av

$$\begin{cases} x_T = \frac{1}{M(k)} \iiint_k x \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ y_T = \frac{1}{M(k)} \iiint_k y \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ z_T = \frac{1}{M(k)} \iiint_k z \rho(x, y, z) \, dx dy dz. \end{cases} \quad (46)$$

Exempel 112. Bestäm massan av kroppen K , $K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2), x \geq 0\}$, med densiteten $\rho(x, y, z) = 2 - x$.

D halvcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$.



$$\begin{aligned} \underline{\underline{M(k)}} &\stackrel{(45)}{=} \iiint_k (2 - x) \, dx dy dz = \iint_D (2 - x) \left(\int_0^{1-(x^2+y^2)} 1 \cdot dz \right) dx dy \\ &= \iint_D (2 - x) [z]_0^{1-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_D (2 - x)(1 - (x^2 + y^2)) dx dy \\ &\stackrel{\text{polära koord}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{D'} (2 - r \cos \theta)(1 - r^2) r \, dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 2r - 2r^3 - (r^2 - r^4) \cos \theta \, dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r^2 - \frac{1}{2} r^4 - \left(\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right) \cos \theta \right]_0^1 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{15} \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{2}{15} \sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{15}}} \quad (\approx 1,3) \end{aligned}$$

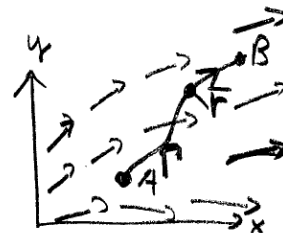
2.6 Integralkalkyl för vektorfält, kurvintegraler

En funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan tolkas som ett plant kraftfält, (gravitationsfält, elektriskt fält),

$$\bar{F}(\bar{r}) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

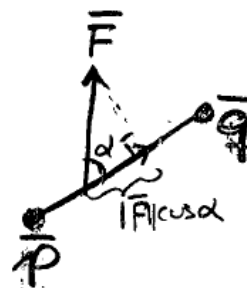
som i varje punkt $\bar{r}$ anger den kraft en enhetspartikel (enhetsmassa, enhetsladdning) påverkas av.

Om partikeln förflyttas längd kurvan Γ , från A till B, utförs ett arbete som kan beräknas med en kurvintegral.



Om förflyttningen sker raka vägen från p och q under en konstant kraft $\bar{F}$ fås arbetet som produkten av vägen $|\bar{q} - \bar{p}|$ och projektionen $|\bar{F}| \cos \alpha$ på rörelseriktningen. Arbetet blir då

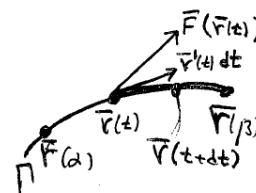
$$A = |\bar{q} - \bar{p}| |\bar{p}| \cos \alpha = \bar{F} \cdot (\bar{q} - \bar{p})$$



Om partikeln rör sig längs kurvan Γ med parameterframställning $\bar{r} = \bar{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta, t : \alpha \rightarrow \beta$ och påverkas av den variabla kraften $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$, så kan en "liten" förflyttning från $\bar{r}(t)$ till $\bar{r}(t + dt)$ approximeras med den rätlinjiga förflyttningen $d\bar{r} = \bar{r}'(t)dt$ i tangentriktningen. Det av kraftfältet uträttade arbetet blir approximativt:

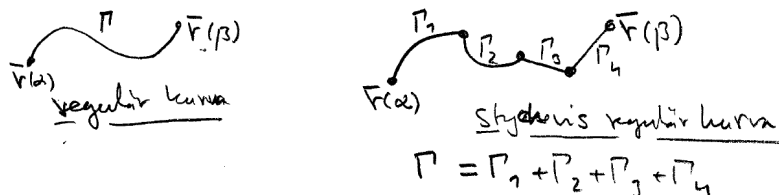
$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)dt,$$

och hela arbetet längs Γ ges av:

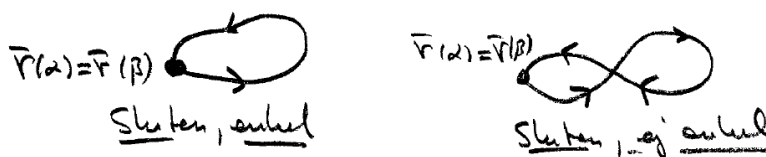


$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt$$

Definition 38. En kurva Γ i $\mathbb{R}^2$ (eller $\mathbb{R}^3$) är regulär om den har en parameterframställning $\bar{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta$, $t: \alpha \rightarrow \beta$, sådan att $\bar{r}'(t) \neq 0$ och $\bar{r}(t)$ är kontinuerlig på $[\alpha, \beta]$. Kurvan är styckevis regulär om den är regulär förutom i ett ändligt antal punkter $t_1, \dots, t_n \in [\alpha, \beta]$.



Kurvan Γ är sluten om $\bar{r}(\alpha) = \bar{r}(\beta)$ och enkel om det inte finns $t_1, t_2 \in]\alpha, \beta[$: $t_1 \neq t_2$ och $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$.



Definition 39. Antag att $\bar{F}$ är en kontinuerlig funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ eller 3 , och att $\Gamma \subseteq D_{\bar{F}}$ är en regulär kurva med parameterframställning $\bar{r} = \bar{r}(t), a \leq t \leq b$, $t: a \rightarrow b$. Då existerar kurvintegralen av $\bar{F}$ längs kurvan Γ :

$$\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} := \int_a^b (\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)) dt \quad (47)$$

Om Γ är styckevis regulär, $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$, gäller:

$$\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}.$$

Anmärkning. Kurvintegraler kallas även linjeintegraler. Om komponenterna för $\bar{F}$ då $n = 2$ är $P(x, y)$ och $Q(x, y)$ och för $\bar{r}(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ har vi $\bar{F} \cdot \bar{r}' = Px' + Qy'$, och formel (47) kan då omskrivas i differentialform:

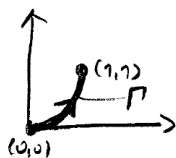
$$\int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) \, dt \quad (47')$$

Då $n = 3$ med $\bar{F} = (P, Q, R)$, $\bar{r} = (x, y, z)$ har vi

$$\int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] \, dt \quad (47'')$$

Exempel 113. Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} xy \, dy$ där Γ är bågen från $(0, 0)$ till $(1, 1)$ av parabeln $y = x^2$.

Lösning: Γ kan exempelvis parameterframställas genom $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1, t \rightarrow 1$.



Formel (47') ger:

$$\int_{\Gamma} xy \, dy = \int_0^1 t \cdot t^2 \cdot 2t \cdot dt = 2 \int_0^1 t^4 dt = 2 \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

Med parameterframställningen $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ y(t) = t, & t : 0 \rightarrow 1 \end{cases}$

$$\int_{\Gamma} xy \, dy = \int_0^1 \sqrt{t} \cdot t \cdot 1 \cdot dt = \int_0^1 t^{3/2} dt = \frac{2}{5} [t^{5/2}]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}.$$

Första framställningen regulär den andra inte, ty $x'(0)$ existerar inte.

Kurvintegralen beror på genomloppsriktningen (orienteringen) av kurvan Γ .

Antag att $\Gamma : \bar{r} = \bar{r}(t), a \leq t \leq b, t : a \rightarrow b$. Med $-\Gamma$ avses samma kurva genomlöst i motsatt riktning, $t : b \rightarrow a$. Då gäller:

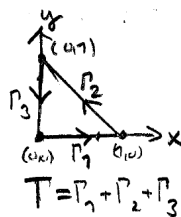
$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int_{-\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}}} &= \int_b^a (\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)) dt = - \int_a^b (\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)) dt \\ &= - \underline{\underline{\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}}}, \end{aligned}$$

dvs. kurvintegralen byter tecken.

Däremot är kurvintegralen oberoende av parameterframställningen, så länge genomloppsriktningen bibehålls.

Exempel 114. Beräkna $\int_T y^3 dx - x^3 dy$ där T är omkretsen av triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$, genomlöpta i denna ordning.

Lösning: $\int_T = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3}$.



$$\int_{\Gamma_1} y^3 dx - x^3 dy = \left[\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ t : 0 \rightarrow 1 \end{array} \right] = \int_0^1 (0 \cdot 1 - t^3 \cdot 0) dt = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} y^3 dx - x^3 dy = \left[\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t \\ t : 1 \rightarrow 0 \end{array} \right] = \int_1^0 [(1-t)^3 \cdot 1 - t^3 \cdot (-1)] dt = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma_3} y^3 dx - x^3 dy = \left[\begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y(t) = t \\ t : 1 \rightarrow 0 \end{array} \right] = \int_1^0 [t^3 \cdot 0 - 0 \cdot 1] dt = 0$$

Svar: $\int_T y^3 dx - x^3 dy = -\frac{1}{2}$.

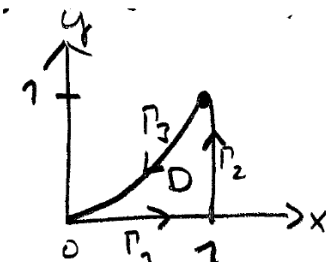
2.6.1 Greens formel med Tillämpningar

Om en kurvintegral längs en sluten och enkel kurva Γ som genomlöps i positiv led,

(området D innanför Γ till vänster om kurvans genomloppsriktning), är för svår att beräkna kan man ibland skriva om problemet med Greens formel och beräkna en dubbelintegral över D .



Exempel 115. Beräkna $\oint_{\Gamma} yx \, dx + e^{y^2} dy$ där Γ är den positivt orienterade randkurvan till det slutna området $\bar{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} yx \, dx + e^{y^2} dy &= \begin{bmatrix} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ t : 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 (0 \cdot t \cdot 1 + 1 \cdot 0) dt = 0 \\ \int_{\Gamma_2} yx \, dx + e^{y^2} dy &= \begin{bmatrix} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ t : 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 (t \cdot 1 \cdot 0 + e^{t^2}) dt = \int_0^1 e^{t^2} dt \\ \int_{\Gamma_3} yx \, dx + e^{y^2} dy &= \begin{bmatrix} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ t : 1 \rightarrow 0 \end{bmatrix} = - \int_0^1 (t^2 \cdot t \cdot 1 + e^{t^4} \cdot 2t) dt \end{aligned}$$

Alltså gäller:

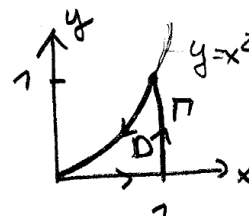
$$\oint_{\Gamma} yx \, dx + e^{y^2} dy = \int_0^1 (e^{t^2} - 2te^{t^4} - t^3) dt = ?$$

Sats 66. (Greens formel). Antag att $\underline{D}$ är ett begränsad område med en positivt orienterad randkurva Γ som är sluten, enkel, av ändlig längd och sammansatt av ett ändligt antal regulära delkurvor. Antag att P, Q, P'_y, Q'_x är kontinuerliga på $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Då gäller Greens formel:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\bar{D}} (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy. \quad (48)$$

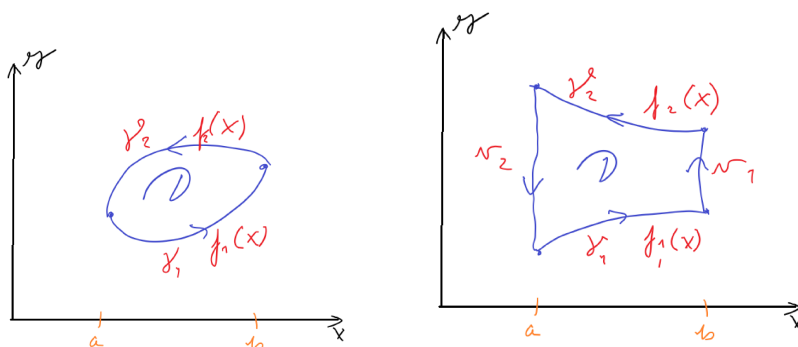
Innan vi bevisar Greens formel slutför vi Ex. 115 med hjälp av formel (48).

$$\begin{cases} P(x, y) = yx, & P'_y(x, y) = x \\ Q(x, y) = e^{y^2}, & Q'_x(x, y) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\oint_{\Gamma} yx \, dx + e^{y^2} \, dy}} &\stackrel{(48)}{=} \iint_D (0 - x) dx dy = - \int_0^1 x \left(\int_0^{x^2} 1 \cdot dy \right) dx \\ &= - \int_0^1 x^3 dx = - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

Bevis. Vi bevisar satsen för områden D som är enkla i x -led och y -led. Antag först att området D är enkelt i y -led:



I båda fallen ovan gäller det att $\oint_{\Gamma} P \, dx = \oint_{\gamma_1} P \, dx + \oint_{\gamma_2} P \, dx$, ty i en parametrisering av v_1 och v_2 i högra figuren är $x(t) = b$ respektive $x(t) = a$, så $dx = x'(t)dt = 0 \, dt$ och $\int_{v_1} P \, dx = \int_{v_2} P \, dx = 0$.

Med parametriseringarna: $[x(t) = t, y(t) = f_1(t), t : a \rightarrow b]$ och $[x(t) = t, y(t) = f_2(t), t : b \rightarrow a]$ av γ_1 respektive γ_2 erhålls:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} P(x, y) \, dx &= \int_a^b P(t, f_1(t)) \cdot 1 \, dt + \int_b^a P(t, f_2(t)) \cdot 1 \, dt \\ &= \int_a^b P(t, f_1(t)) \, dt - \int_a^b P(t, f_2(t)) \, dt\end{aligned}$$

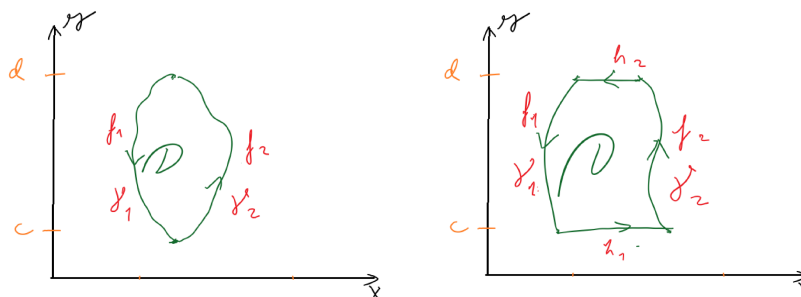
Å andra sidan gäller:

$$\begin{aligned}\iint_D P'_y(x, y) \, dx dy &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P'_y(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b [P(x, y)]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b P(x, f_2(x)) \, dx - \int_a^b P(x, f_1(x)) \, dx.\end{aligned}$$

Då gäller det för områden enkla i y -led att:

$$\oint_{\Gamma} P \, dx = - \iint_D P'_y(x, y) \, dx dy.$$

Antag nu att D är enkelt i x -led:



Nu gäller det alltid att $\oint_{\Gamma} Q \, dy = \int_{\gamma_1} Q \, dy + \int_{\gamma_2} Q \, dy$, ty i en parametrisering av h_1 och h_2 i den högra figuren är $y(t) = c$ respektive $y(t) = d$, så $\int_{h_1} Q \, dy = \int_{h_2} Q \, dy = 0$.

Analogt med det föregående fallet, (enkelt i y -led), visas:

$$\oint_{\Gamma} Q \, dy = \iint_D Q'_x(x, y) \, dx dy.$$

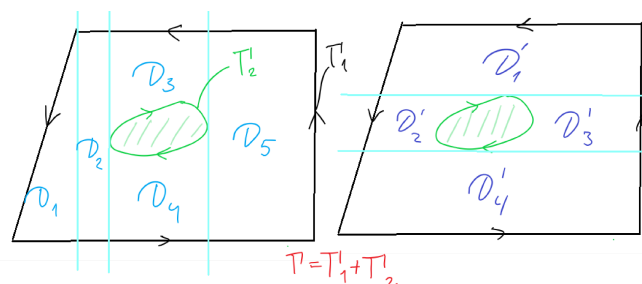
Sammanfattningsvis gäller för områden som är enkla både i y -led och x -led att

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\bar{D}} (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy,$$

vilket ger formel (48). □

Anmärkning. Om ett område kan indelas i ett ändligt antal områden som är enkla i y -led och i ett ändligt antal områden som är enkla i x -led så kan Greens formel bevisas och tillämpas med hjälp av ovanstående resonemang. Vi kan alltså i Sats 66 tillåta att D :s rand utgörs av flera slutna, enkla och positivt orienterade delkurvor.

Exempelvis kan nedanstående område D med "ett hål" indelas i fem områden enkla i y -led och 4 områden enkla i x -led:



Dessa uppdelningar ger:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P dx &= \sum_{k=1}^5 \oint_{\gamma_k} P dx = - \sum_{k=1}^5 \iint_{\bar{D}_k} P'_y(x, y) dx dy = - \iint_{\bar{D}} P'_y(x, y) dx dy \\ \oint_{\Gamma} Q dy &= \sum_{k=1}^4 \oint_{\gamma'_k} Q dy = \sum_{k=1}^4 \iint_{\bar{D}'_k} Q'_x(x, y) dx dy = \iint_{\bar{D}} Q'_x(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Alltså: $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\bar{D}} (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy$

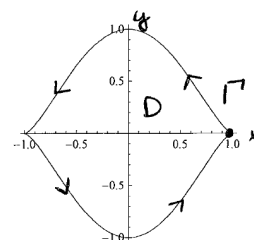
Tillämpning 2: Arean av området D innanför en parameterframställd kurva Γ kan under lämpliga förutsättningar beräknas som en kurvintegral:

$$A = \iint_{\bar{D}} dx dy = - \oint_{\Gamma} y dx = \oint_{\Gamma} x dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -y dx + x dy. \quad (49)$$

Exempel 116. Beräkna arean innanför kurvan Γ med parameterframställning $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

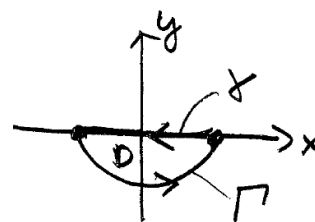
Lösning: Formel (49) ger:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \iint_D dx dy = \oint_{\Gamma} x dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}. \end{aligned}$$



Tillämpning 3: En besvärlig kurvintegral över en öppen, enkel och styckevis regulär kurva Γ kan ibland beräknas med Greens formel genom att lägga till en kurva γ så att $\Gamma + \gamma$ blir en sluten enkel kurva:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy - \int_{\gamma} P dx + Q dy \quad (50)$$



Exempel 117. Beräkna $\int_{\Gamma} y^3 dx - x^3 dy$, där Γ är den övre delen av enhetscirkeln från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$.

Lösning: $P = y^3, Q = -x^3$

$$\underline{\int_{\gamma} P dx + Q dy} = \left[\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ t : -1 \rightarrow 1 \end{array} \right] = \int_{-1}^1 (0 \cdot 1 - t^3 \cdot 0) dt = \underline{0}$$

Formel (50):



$$\begin{aligned}
\underline{\int_{\Gamma} Pdx + Qdy} &= \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy - 0 \\
&\stackrel{\text{Polära koordinater}}{=} -3 \cdot \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 r^2 \cdot r \cdot dr \right) d\theta \\
&= -3\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2.6.2 Konservativa fält

Om $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, är ett kraftfält och Γ en regulär kurva, $\Gamma : \bar{r} = \bar{r}(t), t : a \rightarrow b$, kan kurvintegralen $\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$ tolkas som arbetet att flytta en enhetspartikel längs Γ från $\bar{r}(a)$ till $\bar{r}(b)$. I många tillämpningar (gravitationsfält, elektrostatiske fält, ...) beror arbetet enbart på start- och slutpunkt och inte på vägen Γ . Vi har i ett sådant fall ett konservativt fält, eller ett potentialfält.

Definition 40. Låt $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett plant vektorfält definierat i ett sammanhängande och öppet område D . Om värdet av kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$$

är lika för alla regulära, (styckevis regulära), kurvor Γ i D med samma start- och slutpunkter, så säger man att fältet är konservativt i området.

För ett konservativt kraftfält $\bar{F}$ kan man fastslå en punkt $\bar{p}$ i fältet som referenspunkt och definiera en enhetspartikels potentiella energi $U(\bar{x})$ i punkten $\bar{x} = (x, y) \in D_{\bar{F}}$ som det arbete som utförs då partikeln flyttas från $\bar{p}$ till $\bar{x}$:

$$U(\bar{x}) = \int_{\bar{p}}^{\bar{x}} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}, \quad (51)$$

där $\bar{r}(t)$ parameterframställer en regulär kurva från $\bar{p}$ till $\bar{x}$.

Om potentialfunktionen $U(\bar{x})$ är känd kan kurvintegralerna mellan punkterna $\bar{A}$ och $\bar{B}$ i fältet

beräknas som

$$\int_{\bar{A}}^{\bar{B}} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = U(\bar{B}) - U(\bar{A}), \quad (52)$$

eftersom det gäller att

$$\int_{\bar{A}}^{\bar{B}} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \int_{\bar{A}}^{\bar{P}} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} + \int_{\bar{P}}^{\bar{B}} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = -U(\bar{A}) + U(\bar{B}).$$

Följande viktiga sats ges utan bevis, se kursboken[1] Sats 10.3

Sats 67. (Karakterisering av konservativa fält.) Låt $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält i ett öppet och sammanhängande område D . Då är följande tre villkor ekvivalenta:

- a) Fältet är konservativt,
- b) $\oint_{\Gamma} \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = 0$ för varje sluten regulär kurva i D ,
- c) Det finns en funktion $U(x, y)$, $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definierad i D , sådan att

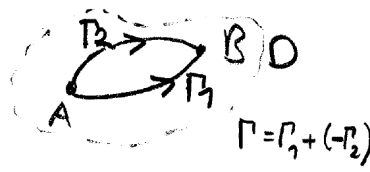
$$\text{grad } U(x, y) = \bar{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (53)$$

Funktionen U är en potentialfunktion till fältet.

Anmärkning. Att $(a) \iff (b)$ inses ur följande:

$(a) \iff \int_{\Gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ oberoende av valet av Γ_1, Γ_2 i D från A till B , $A, B \in D$ godtyckligt valda.

$$\iff \int_{\Gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_{-\Gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0$$

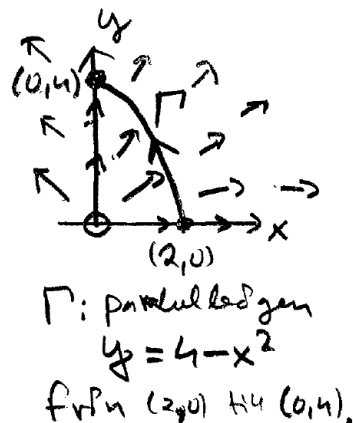


för varje sluten (styckevis) regulär kurva Γ i D .

Exempel 118. Vektorfältet $\bar{F} = (P, Q) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ är konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ty för $U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ gäller i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ att $\nabla U(x, y) = (P, Q)$, dvs. (53) i Sats 67 c) är uppfyllt.

Om vi vill beräkna $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ kan vi utnyttja formel (52):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= U(0, 4) - U(2, 0) \\ &= \frac{1}{2} \ln 16 - \frac{1}{2} \ln 4 = \underline{\underline{\ln 2}}. \end{aligned}$$



(Fältet (P, Q) svarar mot ett elektrostatiskt kraftfält runt en positivt laddad rak ledare genom origo, ortogonal mot xy -planet.)

Sats 68. Om fältet $\bar{F} = (P, Q)$ är konservativt i området D , och P, Q har kontinuerliga partiella derivator i D så gäller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (54)$$

i hela området D .

Bevis.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

Exempel 119. Avgör om vektorfälten:

a) $(P, Q) = \left(xy, \frac{x^2}{2} + xy\right),$

b) $(P, Q) = (2xy + y, x^2 + x + 3y^2)$ är konservativa i $\mathbb{R}^2$.

a) $\frac{\partial Q}{\partial x} = x + y \neq x = \frac{\partial P}{\partial y}$, ej konservativt, Sats 68.

$$b) \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ eventuellt konservativt!}$$

Söker potentialfunktion $U : \text{grad } U = (P, Q)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x + 3y^2 \end{cases} \implies U(x, y) = \int (2xy + y) dx = x^2y + xy + g(y) \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ deriverbar.}$$

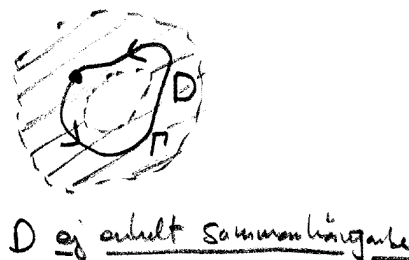
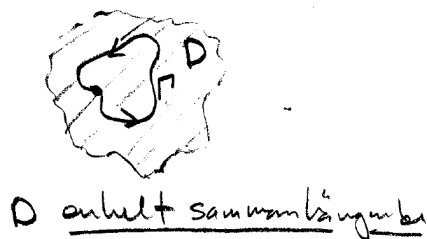
krav:

$$x^2 + x + 3y^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x + g'(y) \implies g'(y) = 3y^2 \implies g(y) = y^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

$\therefore U(x, y) = x^2y + xy + y^3 + C$ potentialfunktion för alla $c \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Sats 67: (P, Q) konservativt vektorfält.

Definition 41. Ett öppet och sammanhängande område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande om området innanför varje enkel och sluten kurva Γ i D är en delmängd av D .



Sats 69. Låt fältet $\vec{F} = (P, Q)$ vara kontinuerligt och antag att P'_y och Q'_x är kontinuerliga i ett enkelt sammanhängande område D . Om P och Q uppfyller villkoret (54),

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

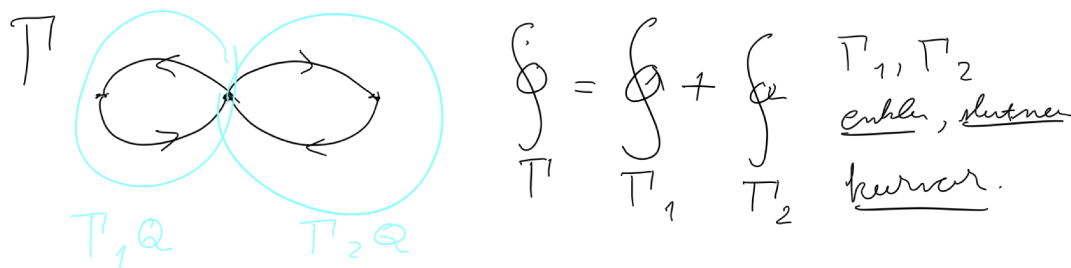
i området D , så är fältet (P, Q) konservativt.

Anmärkning. I Exempel 119 b) är $D = \mathbb{R}^2$ ett enkelt sammanhängande område, så $Q'_x = 2x + 1 = P'_y$ i $\mathbb{R}^2$ garanterar att (P, Q) är konservativt i $\mathbb{R}^2$.

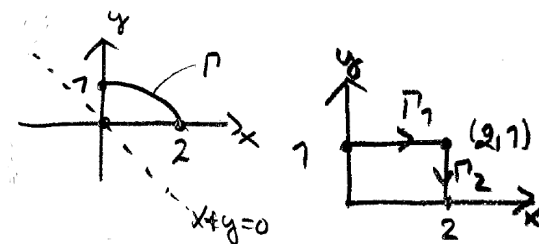
Bevissskiss. Enligt Sats 67 b) bör vi visa att $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$ längs alla slutna kurvor Γ i D . Om Γ är enkel omsluter den ett område Ω i D på vilket vi kan tillämpa Greens formel:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \pm \iint_{\Omega} (Q'_x - P'_y) dxdy = \pm \iint_{\Omega} 0 dxdy = 0.$$

Detta medför att kurvintegralen längs en godtycklig sluten kurva Γ är noll (visas ej). Exempelvis kan vissa slutna kurvor delas upp i enkla slutna kurvor:



Exempel 120. Beräkna $\int_{\Gamma} \underbrace{\left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right)}_P dx + \underbrace{\frac{x}{x+y}}_Q dy$, där Γ genomlöper ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ från $(0, 1)$ till $(2, 0)$.



Lösning: Välj $D = \{(x, y) : x + y > 0\}$.

D enkelt sammanhängande öppet område, P, Q, P'_y, Q'_x kontinuerliga i D . $Q'_x = \frac{y}{(x+y)^2} = P'_y$ i D .

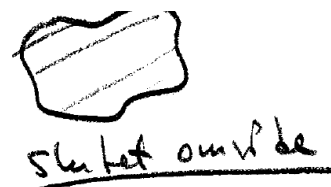
Sats 69: (P, Q) konservativt i D . Väljes ny väg:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\Gamma}} &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_0^2 \left(\ln(t+1) + \frac{t}{t+1} \right) \cdot 1 \cdot dt + \int_1^0 \frac{2}{2+t} \cdot 1 \cdot dt \\ &= \dots = [t \ln(t+1)]_0^2 + [2 \ln(2+t)]_1^0 = \underline{\underline{2 \ln 2}}. \end{aligned}$$

2.7 Parameterframställning och areor av ytor i $\mathbb{R}^3$

För att parameterframställa en rymdkurva räcker det med en parameter t och en avbildning $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. Parameterframställning av en yta i $\mathbb{R}^3$ kräver två parametrar u och v och en avbildning $\bar{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$ där D är ett "område" i $\mathbb{R}^2$.

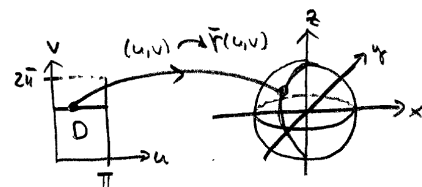
Definition 42. Ett öppet område D i $\mathbb{R}^2$ är en öppen och sammanhängande punktmängd. Om A är ett öppet område kallas en mängd $D = A \cup B$, $B \subset \partial A$, ett område och $D = A \cup \partial A$ ett slutet område.



Exempel 121. Avbildningen $\begin{cases} x(u, v) = \sin u \cos v \\ y(u, v) = \sin u \sin v \\ z(u, v) = \cos u \end{cases}$ avbildar rektangeln $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v < 2\pi\}$, på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Rektangelsidorna $u = 0$ och $u = \pi$ avbildas på polerna $(0, 0, 1)$ resp. $(0, 0, -1)$.

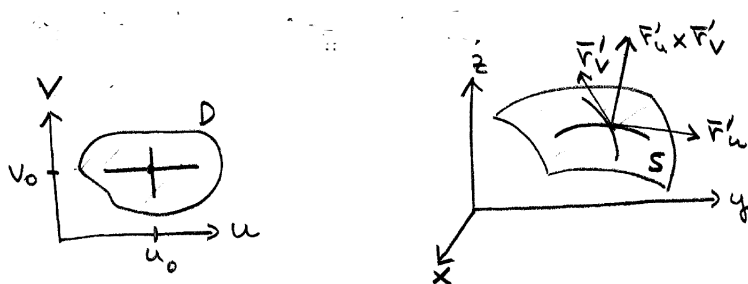
I övrigt är avbildningen omvändbar.



Antag att avbildningen $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, med komponenterna

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D, \quad (55)$$

är kontinuerligt deriverbar, dvs. partiella derivatorna av x, y och z med avseende på u och v är kontinuerliga i D .



Om $v = v_0 = \text{konst.}$ och u varierar, beskriver $\bar{r}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$ en kurva på S med tangentvektorn $\bar{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$.

Om $u = u_0 = \text{konst.}$ och v varierar, beskriver $\bar{r}(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$ en kurva på S med tangentvektorn $\bar{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.

Antag att $\bar{r}'_u \neq \bar{0}$ och $\bar{r}'_v \neq \bar{0}$. Om $(u, v) = (u(\tau), v(\tau))$ är en regulär kurva i D med $(u(\tau_0), v(\tau_0)) = (u_0, v_0)$, så avbildas den på kurvan $\bar{r}(\tau) = \bar{r}(u(\tau), v(\tau))$ på S , med tangentvektorn, (för $\tau = \tau_0$),

$$\bar{r}'(\tau_0) = \bar{r}'_u(u_0, v_0) \cdot u'(\tau_0) + \bar{r}'_v(u_0, v_0) \cdot v'(\tau_0), \quad (56)$$

som är en linjärkombination av $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$.

Om $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$ är linjärt oberoende spänner de upp ett plan i vilket alla tangentvektorer ligger, tangentplanet till S i punkten $\bar{r}(u_0, v_0)$.

Då har vi att $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq \bar{0}$ och $\bar{r}(u_0, v_0)$ är en regulär punkt. Tangentplanets ekvation:

$$((x, y, z) - \bar{r}(u_0, v_0)) \cdot (\bar{r}'_u(u_0, v_0) \times \bar{r}'_v(u_0, v_0)) = 0,$$

där normalvektorn $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ i punkten $\bar{r}(u_0, v_0)$ är:

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} e_1 & x'_u & x'_v \\ e_2 & y'_u & y'_v \\ e_3 & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right)_{|(u_0, v_0)}. \quad (57)$$

Därmed blir tangentplanets ekvation:

$$(x - x_0) \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + (y - y_0) \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + (z - z_0) \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = 0 \quad (58)$$

Planet tangerar ytan S i $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$.

Om $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$ är linjärt beroende är $\bar{r}(u_0, v_0)$ en singulär punkt och $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \bar{0}$. Vi har att $\bar{r}(u_0, v_0)$ är en singulär punkt om och endast om

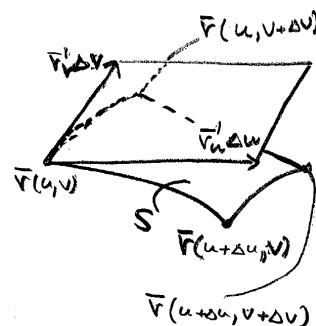
$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \bar{0}. \quad (59)$$

Ett lämpligt regularitetsantagande är då att $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq \bar{0}$.

Vi skall nu resonera oss fram till en formel för beräkning av arean hos en buktig yta.

Låt $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, vara en parameterframställning av ytan S i $\mathbb{R}^3$.

Tangentplanet till S i punkten $\bar{r}(u, v)$ spänns upp av $\bar{r}'_v$ och $\bar{r}'_u$. Vi approximerar ytavsnittet som begränsas av parameterkurvorna mellan $\bar{r}(u, v)$, $\bar{r}(u, v + \Delta v)$, $\bar{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ och $\bar{r}(u + \Delta u, v)$ med parallelogrammen som spänns upp av $\bar{r}'_u \Delta u$ och $\bar{r}'_v \Delta v$.



Den geometriska tolkningen av vektorprodukt, ger att parallelogrammens area är

$$|(\bar{r}'_u \Delta u) \times (\bar{r}'_v \Delta v)| = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| \Delta u \Delta v.$$

Vi kan då betrakta $dS = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| du dv$ som ett area element på S och definierar:

Definition 43. Om ytan S har en kontinuerligt deriverbar parameterframställning $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, så definieras arean av S genom:

$$A = \iint_D |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| du dv \quad (60)$$

Ofta används symbolen $\iint_S dS$ som beteckning för (60). (Jämför med skrivsättet $\int_\Gamma ds = \int_\alpha^\beta |\bar{r}'(t)| dt$)

för båglängd hos Γ).

Exempel 122. Vi beräknar arean av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med parameterframställningen:

$$\begin{cases} x(u, v) = \sin u \cos v, \\ y(u, v) = \sin u \sin v, \\ z(u, v) = \cos u, \end{cases} \quad D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v < 2\pi\} \text{ Jämför Ex. 121.}$$

Vi utför kalkylerna:

$$\begin{cases} \vec{r}'_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \\ \vec{r}'_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| &\stackrel{(57)}{=} \left| \left(\frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right) \right| = \dots \text{ (kolla!)} \\ &= |(\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u)| = \underline{\sin u}. \\ \underline{A} &= \iint_D |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \iint_D \sin u du dv = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin u dv \right) du = \underline{4\pi}. \end{aligned}$$

Ett viktigt specialfall är när ytan S är en funktionsyta $z = f(x, y)$ över D . Den kan då parameterframställas: $x = x, y = y, z = f(x, y)$, med x och y som parametrar och $\vec{r}'_x = (1, 0, f'_x)$, samt $\vec{r}'_y = (0, 1, f'_y)$, $\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = (-f'_x, -f'_y, 1)$.

Därmed reduceras formel (60) till

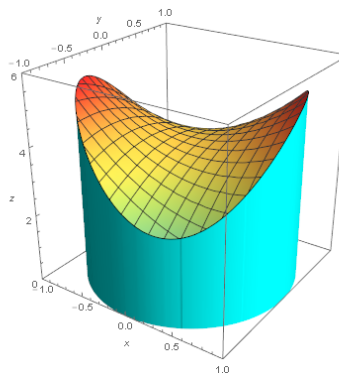
$$A = \iint_D \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} dx dy \quad (61)$$

(Jämför med båglängdsformeln för $y = f(x)$).

Exempel 123. Beräkna arean av ytan $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4$ över enhetscirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning: $f'_x = 2x + 2y$, $f'_y = 2x - 2y$. Formel (61)
ger:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{A}} &= \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx dy \\
 &= \iint_D \sqrt{1 + 8x^2 + 8y^2} \, dx dy \\
 &\stackrel{\text{Polära koord}}{=} \iint_{D'} \sqrt{8x^2 + 1} \cdot r \, dr d\theta \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 8r^2} \cdot r \, d\theta \right) dr \\
 &= 2\pi \int_0^1 (1 + 8r^2)^{1/2} \cdot r \, dr = 2\pi \left[\frac{1}{24} (1 + 8r^2)^{3/2} \right]_0^1 \\
 &= \underline{\underline{\frac{13}{6}\pi}} \quad (\approx 6,8)
 \end{aligned}$$

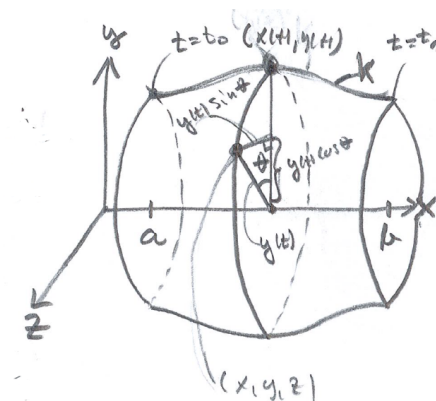


Betrakta en kurva K med parameterframställning:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t : t_0 \rightarrow t_1$, i xy -planet. (Kan anta att $y(t) \geq 0$).

Rotationsytan då kurvan roterar kring x -axeln ges då av

$$\begin{cases} \bar{r}(t, \theta) = (x(t), y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta), \\ D = \{(t, \theta) : t_0 \leq t \leq t_1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \bar{r}'_t \times \bar{r}'_\theta &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & x'(t) & 0 \\ \bar{e}_2 & y'(t) \cos \theta & -y(t) \sin \theta \\ \bar{e}_3 & y'(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta \end{vmatrix} = (y'(t)y(t), -x'(t)y(t) \cos \theta, -x'(t)y(t) \sin \theta) \\
 \underline{\underline{|\bar{r}'_t \times \bar{r}'_\theta|}} &= \sqrt{(y'(t)y(t))^2 + (x'(t)y(t))^2} = \underline{\underline{y(t) \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}}}
 \end{aligned}$$

Då ger formel (60) arean för rotationsytan:

$$\underline{\underline{A}} = \iint_D |\bar{r}'_t \times \bar{r}'_\theta| dt d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2} dt \right) d\theta = \underline{\underline{2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2} dt}} \quad (62)$$

Speciellt om K är en funktionskurva $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x, \end{cases} \quad x \in [a, b]$, erhålls formeln:

$$A = 2\pi \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (62')$$

Exempel 124. Låt parabelbågen $y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}$, rotera kring y -axeln. Beräkna arean av rotationsytan.

Lösning: $y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \iff x = \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 2$. Därmed ger formel (62') att den eftersökta rotationsarean är

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= 2\pi \int_0^2 x(y) \sqrt{1 + x'(y)^2} dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy \\ &= \pi \cdot \int_0^2 \sqrt{4y + 1} dy = \pi \left[\frac{1}{6} (4y + 1)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{6} (9^{3/2} - 1) = \frac{13}{3} \pi. (\approx 13,6) \end{aligned}$$

2.7.1 Ytintegraler

Låt S vara en parameterframställd yta, med vätskegenomströmmning. Vätskans hastighet $\bar{v}(\bar{r}(u, v))$ varierar till storlek och riktning med punkten $\bar{r}(u, v)$ på ytan. Vi vill beräkna den vätskemängd som per tidsenhet passerar genom ytan.

Ytan S uppdelas i N små delar som vi approximerar med prallelogrammer R_j , $j = 1, \dots, N$, med areor ΔS_j och vätskans hastighet genom R_j är approximativt konstant $\bar{v}_j = \bar{v}(\bar{r}(u_j, v_j))$, där $\bar{r}(u_j, v_j)$ är en punkt i R_j .

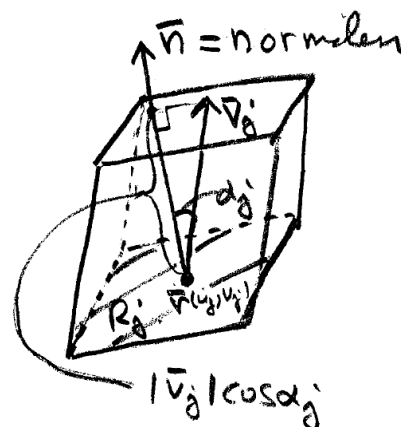
Vätskemängden per tidsenhet som strömmar genom R_j bildar en parallelepiped med basytan ΔS_j och kantlängd $|\bar{v}_j|$.

Höjden är då $|\bar{v}_j| \cdot \cos \alpha_j$.

Volymen = $|\bar{v}_j| \cos \alpha_j \cdot \Delta S_j$.

Totala vätskemängden fås som

$$\sum_{j=1}^N |\bar{v}_j| \cos \alpha_j \Delta S_j.$$



Enligt sida 210 är $\Delta S_j \approx \overbrace{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}^{\bar{n}} m(D_j)$, där D_j är motsvarande område i uv -planet.

Därmed kan den totala vätskemängden per tidsenhet (approximativt) uttryckas som

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |\bar{v}_j| \cos \alpha_j |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| m(D_j) &= \sum_{j=1}^N \bar{v}_j \cdot (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v) m(D_j) \\ &= \sum_{j=1}^N [\bar{v}(\bar{r}(u_j, v_j)) \cdot (\bar{r}'_u(u_j, v_j) \times \bar{r}'_v(u_j, v_j))] m(D_j), \end{aligned}$$

Vilket är en Riemannsumma till dubbelintegralen:

$$I = \iint_D [\bar{v}(\bar{r}(u, v)) \cdot (\bar{r}'_u(u, v) \times \bar{r}'_v(u, v))] du dv.$$

Definition 44. Antag att $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är kontinuerlig och att en yta S i $\bar{F}$'s definitionsmängd är given genom parameterframställningen $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, med $\bar{r}'_u$ och $\bar{r}'_v$ kontinuerliga, (utom eventuellt på en nollmängd $D' \subset D$).

Dubbelintegralen

$$\iint_D \{\bar{F}(\bar{r}(u, v)) \cdot [\bar{r}'_u(u, v) \times \bar{r}'_v(u, v)]\} du dv \quad (63)$$

kallas ytintegralen av vektorfältet $\bar{F}$ över S i normalriktningen $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ och betecknas $\iint_S \bar{F} \cdot dS$.

Om vi betecknar $\bar{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ och $\bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ kan integranden i (63), med stöd av sida 9, (formeln för $\bar{u} \cdot (\bar{x} \times \bar{y})$), skrivas som

$$\begin{vmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = P \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + Q \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + R \frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

varför (63) kan skrivas:

$$\iint_D \left\{ P(\bar{r}(u, v)) \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + Q(\bar{r}(u, v)) \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + R(\bar{r}(u, v)) \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right\} du dv, \quad (63')$$

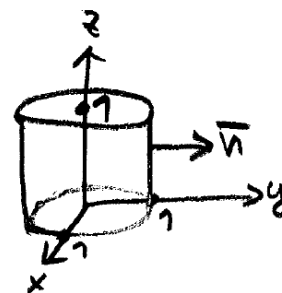
och betecknas kortare:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (63'')$$

Exempel 125. Beräkna $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, där S är mantelytan av en cylinder med normalriktning utåt, då $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$.

Lösning:

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d(y, z)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u \\ \frac{d(z, x)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u \\ \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$



$$\therefore I \stackrel{(63')}{=} \iint_D \{\cos u(\cos u) + \sin u(\sin u) + v \cdot 0\} du dv = \iint_D 1 \cdot du dv = \underline{\underline{2\pi}}.$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} e_1 & -\sin u & 0 \\ e_2 & \cos u & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0) \\ r(0, 0) = (1, 0, 0) \\ (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v)(0, 0) = (1, 0, 0) \quad \underline{\text{Normalriktning utåt!}} \end{pmatrix}$$

Observera att ordningsföljden på differentialerna i en ytintegral inte är godtycklig, exempelvis:

$$dydz = \frac{d(y, z)}{d(u, v)} du dv = -\frac{d(z, y)}{d(u, v)} du dv = -dzdy.$$

Om vi med $-S$ betecknar ytstycket S med normalriktningen $\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u = -\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ gäller:

$$\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u) du dv = - \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) du dv = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (64)$$

Fysikalisk tolkning: Om vätskan i inledande exemplet strömmar genom ytan åt ena hållet, räknas "flödet" åt andra hållet som negativt.

Anmärkning. Vi betraktar enbart orienterbara (tvåsidiga) ytor, för vilka man kan skilja mellan ytans båda sidor och motsvarande normalriktningar.

Möbins' band: Fås genom att ta en lång smal rektangulär pappersremsa och klistra ihop dess båda ändar efter vridning ett halvt varv. Då övergår ursprungliga remsans över- och undersida kontinuerligt i varandra och bandet har bara en sida. Detta är en icke-orienterbar yta.

Ytintegralen är oberoende av ytans parameterframställning, bara man ser till att ordningsföljden på parametrarna är sådan att ytans orientering inte byts.

Antag att vi går över till nya parametrar u', v' genom avbildningen

$$\begin{cases} u = u(u', v'), \\ v = v(u', v'). \end{cases}$$

och antag att avbildningen har kontinuerliga partiella derivator av första ordning, samt att D' avbildas bijektivt på D . Då ger variabelsubstitution i dubbelintegral och Sats 27 för funktionaldeterminanten av en sammansättning att:

$$\begin{aligned}
\iint_S \bar{F} \cdot dS &= \iint_D \left\{ P(\bar{r}(u, v)) \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + Q(\bar{r}(u, v)) \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + R(\bar{r}(u, v)) \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right\} dudv \\
&= \iint_{D'} \left\{ \left(P \cdot \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + Q \cdot \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + R \cdot \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right) \cdot \left| \frac{d(u, v)}{d(u', v')} \right| \right\} \cdot du' dv' \\
&= \pm \iint_{D'} \left\{ P \cdot \frac{d(y, z)}{d(u', v')} + Q \cdot \frac{d(z, x)}{d(u', v')} + R \cdot \frac{d(x, y)}{d(u', v')} \right\} \cdot du' dv',
\end{aligned}$$

där tecknet i sista ledet beror på om normalriktningarna $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v$ och $\bar{r}'_{u'} \times \bar{r}'_{v'}$ överensstämmer eller inte. Om

$$\frac{d(u, v)}{d(u', v')} > 0$$

bibehålls ytans orientering vid parameterbyte.

Om ytan S delas i två delar S_1 och S_2 genom att området D delas i två delområden D_1 och D_2 så att $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in D_1$ och $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in D_2$, blir parameterframställningar av S_1 respektive S_2 så gäller:

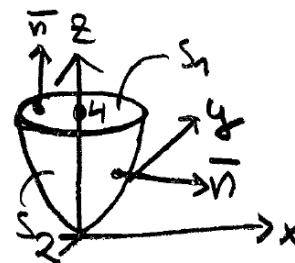
$$\iint_S \bar{F} \cdot dS = \iint_{S_1} \bar{F} \cdot dS + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot dS, \quad (65)$$

eftersom $\iint_D \{\bar{F}(\bar{r}(u, v)) \cdot (\bar{r}'_u(u, v) \times \bar{r}'_v(u, v))\} dudv$ kan delas upp i summan av dubbelintegralerna över D_1 och D_2 . Formel (65) gäller för uppdelning av D i ett ändligt antal områden.

Exempel 126. Beräkna flödet ut ur området $K : x^2 + y^2 \leq z \leq 4$ för fältet $\bar{F} = (x, y, 3)$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
1^\circ) \quad S_1 : & \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = 4 \end{cases} & \begin{cases} \frac{d(y, z)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \frac{d(z, x)}{d(r, \theta)} = 0 \\ \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \end{cases} \\
D_1 : & \begin{cases} 0 < r \leq 2, \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}
\end{aligned}$$



$$\vec{r}'_r \times \vec{r}'_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & \cos \theta & -r \sin \theta \\ e_2 & \sin \theta & r \cos \theta \\ e_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r) \quad \underline{\text{riktad utåt.}}$$

Flödet genom S_1 ges av:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I_1}} &= \iint_{S_1} x dy dz + y dz dx + 3 dx dy = 3 \iint_{S_1} dx dy \\ &= 3 \iint_{D_1} \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r dr \right) d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = \underline{\underline{12\pi}}. \end{aligned}$$

$$2^\circ) \quad \begin{aligned} S_2 : & \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = r^2 \end{cases} & \begin{cases} \frac{d(y, z)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ 2r & 0 \end{vmatrix} = -2r^2 \cos \theta \\ \frac{d(z, x)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 2r & 0 \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -2r^2 \sin \theta \\ \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = r \end{cases} \\ D_2 : & \begin{cases} 0 < r \leq 2, \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{r}'_r \times \vec{r}'_\theta = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r) \quad \underline{\text{riktad inåt!}}$$

Då kan flödet I_2 genom S_2 beräknas med (64):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I_2}} &= \iint_{S_2} = - \iint_{-S_2} = - \iint_{D_2} \{ r \cos \theta \cdot (-2r^2 \cos \theta) + r \sin \theta (-2r^2 \sin \theta) + 3 \cdot r \} dr d\theta \\ &= \iint_{D_2} (2r^3 - 3r) dr d\theta = 2\pi \int_0^2 (2r^3 - 3r) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{2} - \frac{3}{2} r^2 \right]_0^2 \\ &= \underline{\underline{4\pi}}. \end{aligned}$$

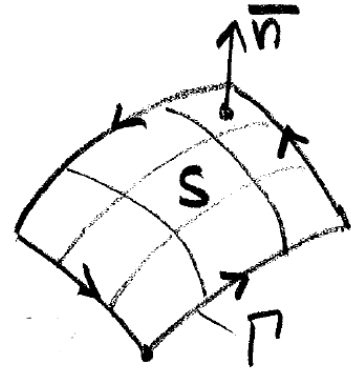
Totala flödet ut ur K genom $S = S_1 \cup S_2$ ges då med stöd av formel (65) av:

$$\underline{\underline{\iint_S \vec{F} \cdot dS}} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot dS = 12\pi + 4\pi = \underline{\underline{16\pi}}.$$

2.7.2 Stokes Sats

Stokes sats anger ett samband mellan kurvintegralen över en sluten rymdkurva Γ och ytintegralen över en yta S med Γ som positivt orienterad rand.

Att Γ är en positivt orienterad rymdkurva till S betyder att från spetsen av normalvektorn $\vec{n}$ betraktat genomlöps Γ så att S ligger till vänster om Γ . (Om S ligger till höger om Γ är randen negativt orienterad.)



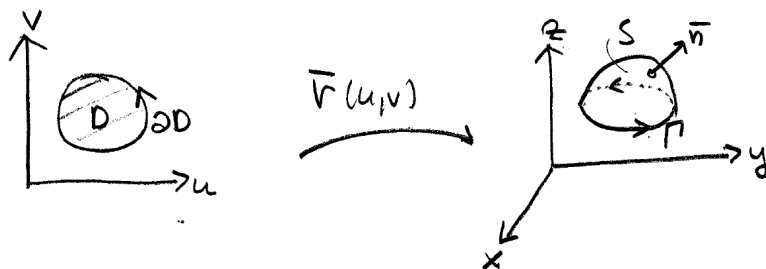
Definition 45. För ett vektorfält $\vec{F} = (P, Q, R)$ definieras rotationen $\text{rot } \vec{F}$ som vektorfältet:

$$\text{rot} \vec{F} := \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (66)$$

Rotationen kan uppfattas som en vektorprodukt av operatoren ∇ och $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}.$$

Antag att ytan S har parameterframställning $\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in D$, att ∂D kan paramterframställas $(u, v) = (u(t), v(t)), t \in [a, b]$



Låt Γ har parameterframställning $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t : a \rightarrow b$. $(\bar{r}(u(t), v(t)) = \bar{x}(t))$.

Sats 70. Antag att $\bar{F} = (P, Q, R)$ är kontinuerligt deriverbar, att $\bar{r}(u, v)$ har kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen och att Greens formel kan användas på D och ∂D .

Då gäller: (Stokes sats)

$$\int_{\Gamma} \bar{F}(\bar{x}) \cdot d\bar{x} = \iint_S \text{rot } \bar{F} \cdot dS = \iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot dS. \quad (67)$$

I komponentform:

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy. \quad (67')$$

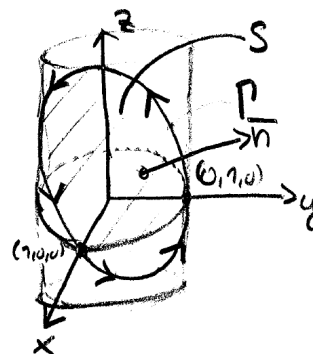
I två dimensioner ($R = 0, dz = 0$) reduceras (67) till Greens formel.

Exempel 127. Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$ där Γ är snittet av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $x + y + z = 1$ och Γ löps moturs.

Lösning: Ytan S definieras genom $z = 1 - x - y$ för $x^2 + y^2 \leq 1$.

Parametrisering:

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 1 - u - v, \end{cases} \quad (u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$$



$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad \Gamma \text{ positivt orienterad.}$$

$$\bar{F} = (-y^3, x^3, -z^3) = (P, Q, R), \quad \begin{cases} R'_y - Q'_z = 0 \\ P'_z - R'_x = 0 \\ Q'_x - P'_y = 3x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

Då ger formel (67') att:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int_{\Gamma} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz}} &= \iint_S (3x^2 + 3y^2) dx dy \\ &= \left[\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right] = \iint_D (3u^2 + 3v^2) \cdot 1 \cdot du dv \\ &\stackrel{\text{Polära Koord.}}{=} 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \cdot r \cdot dr \right) d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

2.7.3 Gauss' Sats

Greens formel i planet har ytterligare en motsvarighet i $\mathbb{R}^3$. Låt $\underline{D}$ vara en kropp i $\mathbb{R}^3$ med en sluten begränsningsyta ∂D . Ytintegralen av $\bar{F} = (P, Q, R)$ över ∂D kan beräknas med en tripelintegral.

Definition 46. Divergensen för $\bar{F} = (P, Q, R)$ definieras genom

$$\operatorname{div} \bar{F} = P'_x + Q'_y + R'_z. \quad (68)$$

Sats 71. (Gauss' Sats). Låt $\bar{F} = (P, Q, R)$ ha kontinuerliga derivator i kroppen $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Låt ∂D vara en sluten och styckevis regulär randyta till D . Då gäller:

$$\iint_{\partial D} \bar{F} \cdot dS = \iiint_D \operatorname{div} \bar{F} \, dx dy dz. \quad (69)$$

I komponentform:

$$\iint_{\partial D} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_D (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz. \quad (69')$$

Exempel 128. Beräkna $\iint_S (4x + y) dy dz + (2x + 5z) dx dy$, där S är enhetssfären med utåtriktad normal.

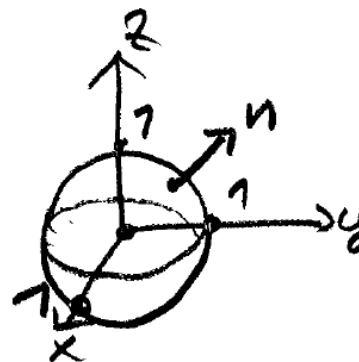
Lösning:

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$\partial D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\bar{F} = (P, Q, R) = (4x + y, 0, 2x + 5z)$$

$$P'_x = 4, \quad Q'_y = 0, \quad R'_z = 5$$

Då ger (69'):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\iint_S (4x + y) dy dz + (2x + 5z) dx dy}} &= \iiint_D (4 + 0 + 5) dx dy dz \\ &= 9 \cdot \iiint_D 1 \cdot dx dy dz = 9 \cdot V(D) = 9 \cdot \frac{4\pi}{3} = \underline{\underline{12\pi}}. \end{aligned}$$

Litteraturförteckning

- [1] Petermann E. *Analytiska metoder II*. Studentlitteratur, 2002.
- [2] Eriksson F. *Flerdimensionell analys*. Studentlitteratur, 1976.
- [3] Lindström M. *Föreläsningsmaterial i flerdimensionell analys*. 2016.
- [4] Persson A och Böiers L-C. *Analys i flera variabler*. Studentlitteratur, 1988.
- [5] Månsson J och Nordbeck P. *Flerdimensionell Analys*. Studentlitteratur, 2013.