

Flerdimensionell analys, v.2

Flerdimensionell analys

Flerdimensionell analys, del I, 5 sp, 272023

Flerdimensionell analys, del II, 5 sp, 272024

Kurstider: v. 2 – v. 20 (7.1 – 16.5)

- Föreläsningar : Må 10.15 - 12 och O 13.30 - 15 i föreläsningssal Lindelöf.
- Demonstrationer: To 13.30 - 15 i Lindelöf, börjande vecka 3.
Ikryssning av räknade hemtal (minst 50% bör räknas). Bonuspoäng till tentamen 60%, 75% och 90% lösta hemtal ger 1, 2 respektive 3 bonuspoäng .

(Rektors beslut: 10 - 12 = 10.15 - 11.45 och 13 - 15 = 13.30 – 15.00)

Kurslitteratur: Petermann, E., *Analytiska metoder II*, Studentlitteratur, 2002 (4. Upplagan) och kurskompendium Glader, C., *Flerdimensionell analys*, 2018, samt föreläsningsanteckningar. (Bredvidläsningsmaterial: Eriksson, F., *Flerdimensionell analys*, Studentlitteratur).

Kurshemsida: <http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/flerdim/>

Kursmapp: Kopior av kursmaterial i datasalen Geologicum 127, (bredvid sal Lindelöf).

Kurstenter: Tent i del I: M 11.3 kl. 9-13 i Geologicum Aud I. Tent i del II: O 15.5 kl. 9-13 i Geologicum Aud I.

- Vektorrummet $\mathbb{R}^n$
 - Avbildningar från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$
 - Gränsvärden och kontinuitet
 - Partiella derivator, tangentplan, gradienter, funktionalmatriser, differentierbara funktioner, kedjeregeln, riktningsderivata
 - Inversa funktioner och implicit givna funktioner
-
- Taylors formel för funktioner av flera variabler
 - Extremvärdesproblem med och utan bivillkor
 - Integralkalkyl för funktioner av flera variabler, dubbelintegraler, generaliserade dubbelintegraler, trippelintegraler
 - Integralkalkyl för vektorfält, kurvintegraler, Greens formel, ytingtegraler

Euklidiska vektorrummet $\mathbb{R}^n$ ⑦

Betrakta mängden av ordnade n -tuplar:

$$\mathbb{R}^n := \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \},$$

Mängden $\mathbb{R}^n$ försedd med addition och multiplikation med reell skalär bildar ett vektorrum. För $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ definieras

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

och

$$c\bar{x} = c(x_1, \dots, x_n) := (cx_1, \dots, cx_n).$$

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Additionen är kommutativ och associativ,
Multiplikation med skalär är associativ.

Nollvektorn

$$\vec{0} := (0, \dots, 0)$$

är det neutrala elementet med avseende på addition.

Den additiva inversen till $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$-\vec{x} := (-1) \cdot \vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Subtraktion definieras genom

$$\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-\vec{y}) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n).$$

Elementen i $\mathbb{R}^n$ kallas punkter eller vektorer.

(2)

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ blir euklidiskt
om vi inför skalärprodukten (inre produkten)

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot \bar{y} &= (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k.\end{aligned}$$

Punkterna i $\mathbb{R}^n$ kan tolkas som $n \times 1$ -matriser

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\text{Varvid} \quad \underline{\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y}}.$$

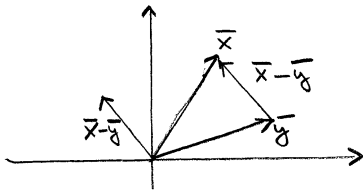
Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Beloppet (längden) av en vektor $\bar{x}$ ges av

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

och avståndet mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är

$$|\bar{x} - \bar{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$



$$\underline{n = 2}$$

③

Sats 1 (Cauchy-Schwarz' olikhet)

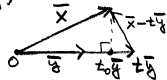
För alla vektorer $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| |\bar{y}| \quad (|\bar{x}^T \bar{y}| \leq |\bar{x}| |\bar{y}|)$$

med likhet om och endast om $\bar{x} = \lambda \bar{y}$ eller $\bar{y} = \bar{0}$.

Beris: Gäller om $\bar{x} = \bar{0}$ eller $\bar{y} = \bar{0}$. Antag $\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}$.

$$\begin{aligned} \text{S\&H: } \varphi(t) &= |\bar{x} - t\bar{y}|^2 = (\bar{x} - t\bar{y}) \cdot (\bar{x} - t\bar{y}) \\ &= \bar{x} \cdot \bar{x} - 2t\bar{x} \cdot \bar{y} + t^2\bar{y} \cdot \bar{y} \end{aligned}$$



$\varphi(t)$ 2:a grads polynom i t , minimum då $\varphi'(t) = 0$,

$$\varphi'(t) = -2\bar{x} \cdot \bar{y} + 2t\bar{y} \cdot \bar{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{y} \cdot \bar{y}} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} =: t_0.$$

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\therefore 0 \leq \varphi(t_0) &= |\bar{x}|^2 - 2 \cdot \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} (\bar{x} \cdot \bar{y}) + \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{y}|^4} \cdot |\bar{y}|^2 \\ &= |\bar{x}|^2 - \frac{(\bar{x} \cdot \bar{y})^2}{|\bar{y}|^2}\end{aligned}$$

Alltså: $(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2$ och således $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| |\bar{y}|$.
Likhet erhålls om $\bar{y} = \bar{0}$ eller om $\varphi(t_0) = 0$ dvs. $\bar{x} = t_0 \bar{y} = \bar{0}$.

Ur $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| |\bar{y}|$ följer att $-1 \leq \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}| |\bar{y}|} \leq 1$, d.v.s. $\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$.

Vi kan då definiera vinkeln θ mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ genom

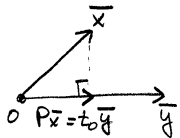
$$\cos \theta = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}| |\bar{y}|} = \frac{\bar{x}^T \bar{y}}{|\bar{x}| |\bar{y}|}, \text{ d.v.s. } \bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}.$$

Om $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ är vektorerna ortogonala och
om $\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$ är de då vinkelräta ($\cos \theta = 0$).

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Den ortogonala projektionen av en vektor $\bar{x}$ på vektorn $\bar{y}$ ges av ④

$$P\bar{x} = t_0\bar{y} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} \bar{y}.$$



En vektor $\bar{x}$ är en enhetsvektor om $|\bar{x}| = 1$.

I $\mathbb{R}^n$ är enhetsvektorerna
$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ \bar{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \end{cases}$$

parvis ortogonala, $(\bar{e}_i \perp \bar{e}_j, i \neq j)$, och bildar en ortonormal bas i $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$.

Sats 2 (Triangelolikheten). För alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|,$$

med likhet om och endast om $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är parallella och lika riktade.

Beweis: $|\bar{x} + \bar{y}|^2 = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{y}$

$$\leq |\bar{x}|^2 + 2|\bar{x} \cdot \bar{y}| + |\bar{y}|^2 \stackrel{(\text{Sats 7})}{\leq} |\bar{x}|^2 + 2|\bar{x}||\bar{y}| + |\bar{y}|^2$$

$$= (|\bar{x}| + |\bar{y}|)^2.$$

Alltså gäller $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$. Vidare har vi att

$|\bar{x}| = |(\bar{x} + \bar{y}) + (-\bar{y})| \leq |\bar{x} + \bar{y}| + |-\bar{y}| = |\bar{x} + \bar{y}| + |\bar{y}|,$
 så $|\bar{x}| - |\bar{y}| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. Analogt för att $|\bar{y}| - |\bar{x}| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$
 och då gäller $||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. $\square$

För $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gäller

⑤

$$|\lambda \bar{x}|^2 = (\lambda \bar{x}) \cdot (\lambda \bar{x}) = \lambda^2 (\bar{x} \cdot \bar{x}) = \lambda^2 |\bar{x}|^2$$

alltså har vi att $|\lambda \bar{x}| = |\lambda| |\bar{x}|$. Sammenfattningsvis har vi för bukket egenskaperna

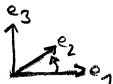
$|\bar{x}| \geq 0$, med likhet om och endast om $\bar{x} = \bar{0}$,

$|\lambda \bar{x}| = |\lambda| |\bar{x}|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

Vektorprodukter i $\mathbb{R}^3$

Antag att basvektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för $\mathbb{R}^3$ bildar ett högersystem: "Den minsta vridning som överför e_1 på e_2 sker moturs klockrat från spetsen av e_3 ".



Alternativt: "Den minsta vridning som överför e_1 på e_2 får en vanlig hörgångad skruv att röra sig i den riktning som representeras av e_3 ".

Vektorprodukten av $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ betecknad $\bar{x} \times \bar{y}$ och definierad av

$$\bar{x} \times \bar{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

En minnesregel för beräkning av $\bar{x} \times \bar{y}$ ges
 av utvecklingen av nedanstående formella
 determinant efter den första kolonnen: ⑥

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= \begin{vmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 \\ &+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) e_2 \\ &\quad + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3\end{aligned}$$

Exempel 1. Beräkna vektorprodukten $\bar{x} \times \bar{y}$ för vektorerna $\bar{x} = (1, 2, -2)$ och $\bar{y} = (-1, 2, 2)$.

Lösning:

$$\begin{aligned}\bar{x} \times \bar{y} &= \begin{vmatrix} e_1 & 1 & -1 \\ e_2 & 2 & 2 \\ e_3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot e_2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} e_3 = (4 - (-4)) \cdot e_1 - (2 - 2) e_2 \\ &\quad \quad \quad + (2 - (-2)) \cdot e_3 \\ &= (8, 0, 4)\end{aligned}$$

Notera att $(\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{x} = 0$ och $(\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{y} = 0$,
så $\bar{x} \times \bar{y}$ är vinkelrät mot $\bar{x}$ och $\bar{y}$.

⑦

Med hjälp av definitionen kontrollerar man lätt att följande egenskaper gäller för vektorprodukten:

$$\overline{x} \times \overline{y} = -\overline{y} \times \overline{x} \quad (\text{antikommutativ}),$$

$$\overline{x} \times (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \times \overline{y} + \overline{x} \times \overline{z} \quad (\text{distributiv}),$$

$$\overline{x} \times c\overline{y} = c(\overline{x} \times \overline{y}) \quad \text{för alla } c \in \mathbb{R},$$

Den skalära trippelprodukten av vektorerna $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ definieras som $\bar{u} \cdot (\bar{x} \times \bar{y})$.

Om $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ser vi direkt från minnesregeln för beräkning av $\bar{x} \times \bar{y}$ att

$$\bar{u} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \pm V(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}),$$

där $V(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ betecknar volymen av den parallelepiped som har sidorna $\bar{u}, \bar{x}$ och $\bar{y}$ och tecknet är "+" om dessa bildar ett högersystem (annars "-").

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

-5-

Ur ovanstående formel härleder vi lätt två egenskaper för vektorprodukten.

1. Vektorn $\bar{x} \times \bar{y}$ är vinkelrät mot både $\bar{x}$ och $\bar{y}$,

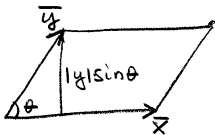
ty om vi väljer $\bar{u} = \bar{x}$ eller $\bar{u} = \bar{y}$ så har determinanten två identiska kolonner och är därmed lika med noll.

2. Om $\bar{x} \times \bar{y} \neq \vec{0}$ bildar $\bar{x}, \bar{y}$ och $\bar{x} \times \bar{y}$ i denna ordning ett högersyslem, ty om $\bar{x} \times \bar{y} = (a_1, a_2, a_3)$ har vi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1 \\ x_2 & y_2 & a_2 \\ x_3 & y_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & y_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) > 0.$$

⑧

3. Vidare gäller $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}| |\bar{y}| \sin \theta$,
 där θ betecknar vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$.
 Detta betyder att $|\bar{x} \times \bar{y}|$ är arean av
den parallelogram som har sidorna $\bar{x}$ och $\bar{y}$.



Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

Beweis: Med vår minnesregel för beräkning av $\bar{x} \times \bar{y}$ erhålls

$$\begin{aligned} |\bar{x} \times \bar{y}|^2 &= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= \dots = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 - |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 \left(1 - \frac{|\bar{x} \cdot \bar{y}|^2}{|\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2}\right) \\ &= |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\bar{x}|^2 |\bar{y}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

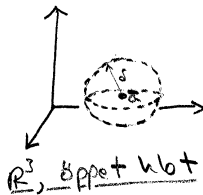
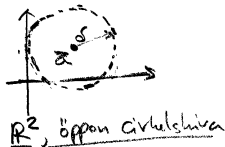
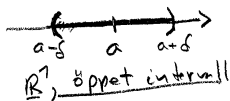
Alltså gäller: $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}| |\bar{y}| \sin \theta$. $\square$

Topologiska begrepp i $\mathbb{R}^n$ (9)

De punkter i $\mathbb{R}^n$ som ligger på ett avstånd mindre än δ från $\bar{a}$ utgör en omgivning, (δ -omgivning),

$O_\delta(\bar{a})$ till $\bar{a}$:

$$O_\delta(\bar{a}) := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \}, \quad \delta > 0.$$



Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en inre punkt till mängden $M \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\exists \delta > 0 : O_\delta(\bar{a}) \subseteq M$.

En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en yttre punkt till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\exists \delta > 0 : O_\delta(\bar{a}) \cap M = \emptyset$. (Då är $\bar{a}$ en inre punkt till $C M := \mathbb{R}^n \setminus M$).

En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en randpunkt till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\forall \delta > 0 : M \cap O_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset$ och $C M \cap O_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset$.



a inre punkt, b yttre punkt
och c randpunkt till M .

Mängden av alla inre punkter till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 70
 betecknas M° ,

$$M^\circ := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \text{ är en inre punkt till } M \}.$$

Det gäller att $M^\circ \subseteq M$, ty $O_\delta(\bar{a}) \subseteq M \Rightarrow \bar{a} \in M$.

Mängden av alla randpunkter till $M \subseteq \mathbb{R}^n$
 betecknas ∂M ,

$$\partial M := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \text{ är en randpunkt till } M \}.$$

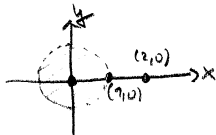
Mängden $\bar{M} := M \cup \partial M$ kallas höljet av M .

Mängden M är sluten om $\partial M \subseteq M$, dvs. $\bar{M} = M$.

Mängden M är öppen om $M \subseteq M^\circ$, dvs. $M = M^\circ$.

Exempel 2. Låt $M \subseteq \mathbb{R}^2$ definieras av

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0), (2, 0)\}.$$



os gäller:

$$M^o = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\partial M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0)\},$$

$$\bar{M} = M \cup \partial M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}.$$

$M \neq M^o$ och $M \neq \bar{M}$, så M är varken sluten eller öppen.

Exempel 3. En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen om och endast om ∂M är en sluten mängd. (11)

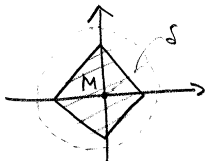
Beweis: (Notera att $\partial M = \partial(\partial M)$). Det gäller att

$$\begin{aligned} \underline{M \text{ är öppen}} &\Leftrightarrow M \subseteq M^\circ \Leftrightarrow \partial M \subseteq \partial M \\ &\Leftrightarrow \partial M \subseteq \partial M \Leftrightarrow \underline{\partial M \text{ är sluten}}. \quad \square \end{aligned}$$

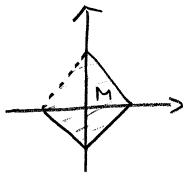
Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad om det
existerar en δ -omgivning $O_\delta(\bar{0})$ av $\bar{0}$
sådan att $M \subseteq O_\delta(\bar{0})$. (Då är $|\bar{x}| < \delta$ för alla $\bar{x} \in M$).

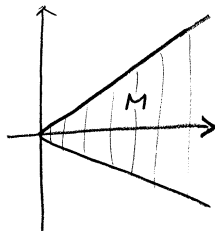
Om en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad och sluten
kallas den kompakt.



$\partial M \subseteq M$, sluten
 $M \subseteq O_\delta(\bar{0})$, begränsad
 M kompakt.



M begränsad,
ej sluten.
Ej kompakt



M sluten,
ej begränsad,
Ej kompakt.

Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

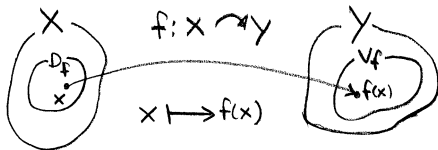
12

Låt f vara en funktion (avbildning) från mängden X till mängden Y , betecknat: $f: X \rightarrow Y$.

De punkter i X som f är definierad i utgör f 's definitionsmängd, betecknad D_f .

Värdeområdet för f , betecknad V_f , är de värden i Y som antas av funktionen f ,

$$V_f := \{y \in Y : \exists x \in D_f : f(x) = y\} = \{f(x) : x \in D_f\}.$$



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

För avbildningar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har vi

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

och bilden av $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ under f är en vektor i $\mathbb{R}^m$:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})),$$

där komponentfunktionerna $f_1, \dots, f_m$
är reellvärda funktioner av n variabler,

$$f_k(\bar{x}) = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, m,$$

alltså $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$.

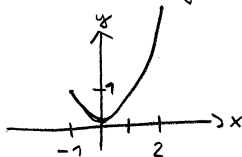
Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

För en avbildning $f: X \rightarrow Y$ definieras (13)
vi grafen för f som mängden G_f given av

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\},$$

som där är en delmängd av produktmängden $X \times Y$.
Mängden G_f kan i vissa fall visualiseras i
~~ett~~ 2- eller 3-dimensionellt koordinatsystem.

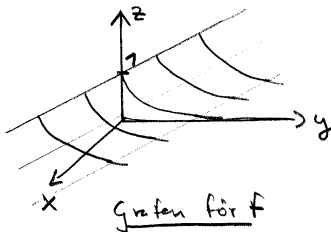
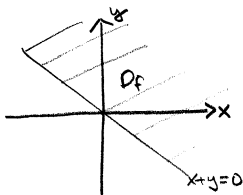
Exempel 4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2$, $D_f = [-1, 2]$.



Mängden G_f , grafen för f .

Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Exempel 5, (funktionsytor) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ges av
 $f(x, y) = e^{-x-y}$, $D_f = \{(x, y) : x+y \geq 0\}$. Kan
framställas i ett 3-dimensionellt koordinatsystem
med $z = f(x, y) = e^{-x-y}$. Observera att på
linjerna $x+y=k$ gäller $z = e^{-k}$:



(Praktisk tolkning! Bestäm kurvan $z = f(0, y) = e^{-y}$
i yz -planet och translaterar (förskjuter) denna.)

Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

(74)

Om funktionsytan är av formen

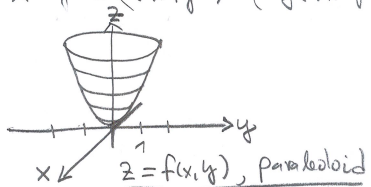
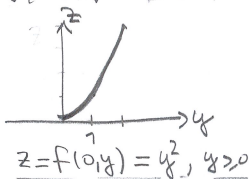
$$z = f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Så är den rotationssymmetrisk kring z -axeln.

Då kan vi i yz -planet, för $y \geq 0$, rita ut kurvan $z = f(0, y)$ och rotera denna kring z -axeln för att skapa ytan $z = f(x, y)$.

Exempel 6, Rita en teckning av ytan $z = x^2 + y^2$.

Vi har $z = f(x, y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 (=g(\sqrt{x^2 + y^2}))$



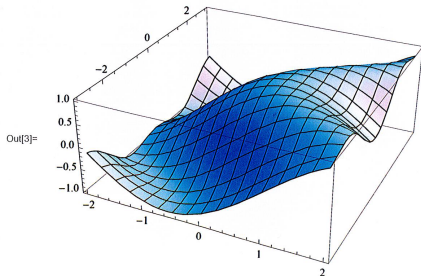
Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Ofta är det svårt att skissera en yta $z = f(x, y)$,
då kan ett symboliskt program paket användas.

Exempel 7. Rita ytan $z = f(x, y) = \sin(x + \cos y)$,
då $-2 \leq x \leq 2$ och $-3 \leq y \leq 3$, i Mathematica.

```
In[1]:= f[x_, y_] := Sin[x + Cos[y]]
```

```
In[3]:= Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]
```



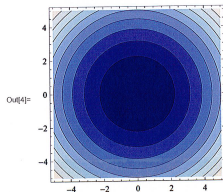
Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Et annat sätt att visualisera avbildningar 15
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är med nivåkurvor. Vi löser ekvationen

$$f(x,y) = c$$

för lämpligt valda värden på c och ritar
motsvarande kurvor i ett xy -plan. I exempel 6
med $f(x,y) = x^2 + y^2$ blir nivåkurvorna cirklar
 $x^2 + y^2 = c$ med radi $\sqrt{c}$. Ju tätare nivåkurvorna
ligger, desto brantare är funktionsgrafen.
(Jämför topografiska kartor). I Mathematica:

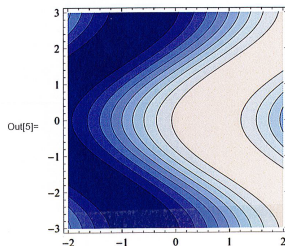
```
In[4]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Nivåkurvorna för $f(x,y) = \sin(x + \cos y)$ i exempel 7:

In[5]:= ContourPlot[Sin[x + Cos[y]], {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Avbildningar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan visualiseras ⁽⁷⁶⁾
som parameterkurvor i planet,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)),$$

eller

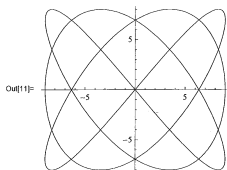
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Exempel 8. Bowditch kurva (1815):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (9 \sin(3t/4), 8 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 8\pi.$$

```
In[7]: x[t_] := 9 Sin[3 t / 4]; y[t_] := 8 Sin[t]
```

```
In[11]: ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 8 Pi}]
```



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

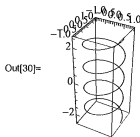
Avbildningar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ kan visualiseras som parameterkurvor i rummet,

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Exempel 9. Skruvlinjen $\bar{r} = \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/5)$,
belägen på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$. $-4\pi \leq t \leq 4\pi$

```
In[28]:= x[t_] := Cos[t]; y[t_] := Sin[t]; z[t_] := t/5
```

```
In[30]:= ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, -4 Pi, 4 Pi}]
```

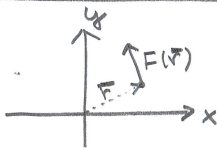


Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

En avbildning $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan tolkas 17
som ett vektorfält, (kraftfält), i planet.

$$F = F(\vec{r}) = F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Det kan visualiseras så att man utgår från ortsvektorn $\vec{r} = (x, y)$ ritat ut vektorn $F(x, y)$.

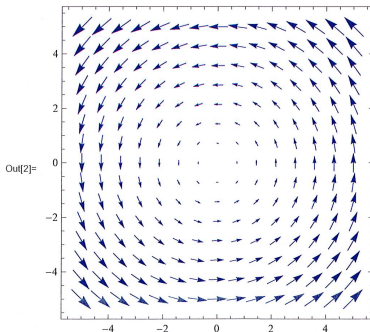


Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Exempel 70. Fältet $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y, x)$
"Vrider vektorn (x,y) moturs vinkeln $\pi/2$ ".
I Mathematica görs detta med VectorPlot:

```
In[1]:= P[x_, y_] := -y; Q[x_, y_] := x
```

```
In[2]:= VectorPlot[{P[x, y], Q[x, y]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



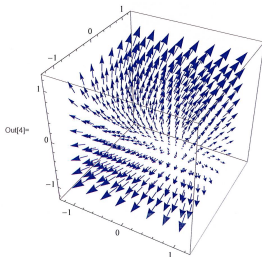
Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

På analogt sätt kan en avbildning (18)
 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tolkas som ett vektorfält
i rummet

$$F = F(\vec{r}) = F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Exempel 17. Fältet $F(x, y, z) = (x, 2(y+z), \frac{z}{2}+1)$
kan visualiseras med VectorPlot3D

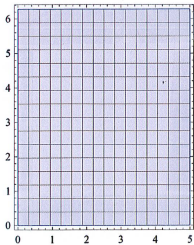
```
In[1]:= P[x_, y_, z_] := x; Q[x_, y_, z_] := 2 (y+z); R[x_, y_, z_] := z/2+1  
In[4]:= VectorPlot3D[{P[x, y, z], Q[x, y, z], R[x, y, z]},  
  {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Avbildningar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan tolkas som koordinat-
leyten, eller deformation av områden.

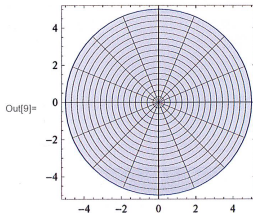
Exempel 12, Övergång från polära koordinater till
kartesiske koordinater $F(r, \theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$



$r\theta$ -planet



In[9]:= ParametricPlot[{r Cos[t], r Sin[t]}, {r, 0, 5}, {t, 0, 2 Pi}]



xy -planet

Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

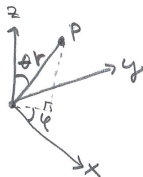
(19)

En avbildning $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kan tolkas
som en avbildning av ett område i planet
på en yta i rummet,

$$F(u,v) = F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Exempel 13. Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ kan fram-
ställas med sfäriska koordinater som

$$\begin{cases} x = 5 \sin \theta \cos \varphi, \\ y = 5 \sin \theta \sin \varphi, \\ z = 5 \cos \theta. \end{cases}$$



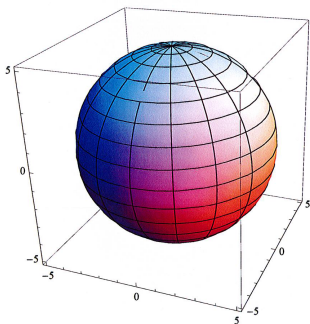
Sfäriska koordinater (r, θ, φ)

Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Ytan kan visualiseras i Mathematica med `ParametricPlot3D`:

```
In[5]:= ParametricPlot3D[  
  {5 Sin[t] Cos[fi], 5 Sin[t] Sin[fi], 5 Cos[t]}, {t, 0, Pi}, {fi, 0, 2 Pi}]
```

Out[5]=



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Sammansättning av funktioner

(20)

Antag att $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Om $V_g \cap D_f \neq \emptyset$ kan vi definiera den

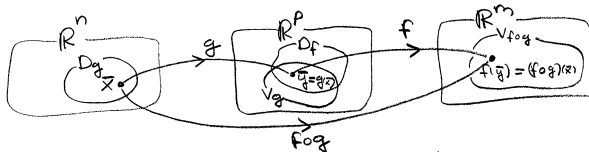
sammansatta funktionen $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$(f \circ g)(\bar{x}) := f(g(\bar{x})),$$

med definitions- och värdemängd givna av

$$D_{f \circ g} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_g \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f \},$$

$$V_{f \circ g} = \{ f(\bar{y}) : \bar{y} \in D_f \cap V_g \}.$$



Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Exempel 14. Givet $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, & f(u) = (u^2, u+1), \\ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & g(x,y) = \sin(xy^2). \end{cases}$

Då är $f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ given av

$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(\sin(xy^2)) = (\sin^2(xy^2), \sin(xy^2)+1)$$

och $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ given av

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(u^2, u+1) = \sin(u^2(u+1)^2).$$