Introduktion till dynamiska system Period 3, 2012

Introduction to Dynamical Systems

Hemuppgifter till fredagen den 17 februari

Exercises for Friday, February 17

Påminnelse: Hemarbete A inlämnas 17.2. - Reminder: Assignment A is to be handed in on February 17.

Problem 1.

Arcussinuslagen

Betrakta F_4. Ange några slutligen periodiska eller fixa punkter.

För de flesta startpunkter är banan dock kaotisk. I själva verket kan F_4 användas för att generera slumptal ur den s.k. arcussinusfördelningen. Visa detta experimentellt. Jämför den empiriska fördelningsfunktionen med den teoretiska.

Bevisa att F_4 är topologiskt konjugerad med tältavbildningen T_2 via $h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$

Ledning: Visa t. ex. att $h \circ F_4$ har samma derivata som $T_2 \circ h$ där derivatan existerar, och dessutom har samma värden i vissa speciella punkter.

Visa att $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ är en sannolikhetstäthetsfunktion på [0,1], täthetsfunktionen för *arccussinusfördelningen.*

Bevisa att arcussinusfördelningen är invariant, dvs. om den stokastiska variabeln X är fördelad enligt arcussinusfördelningen så är också $F_4(X)$ fördelad enligt samma fördelning.

Ref.: H. G. Schuster: *Deterministic Chaos. An Introduction*, 2nd rev. ed., VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim 1989, pp. 67-68.

C. Reichsöllner och M. Thaler: Zufallsgesetze in chaotischen dynamischen Systemen, i *Ausflüge in die Mathematik*, Universität Salzburg 1988.

The Arc Sine Law

Consider F_4. Determine some eventually periodic or fixed points.

For most initial points the orbits are chaotic, however. One can show that F_4 may be used as a random number generator. Show experimentally that iteration by F_4 often produces numbers which seem to be randomly drawn from the arc sine distribution. Compare the empirical distribution function with the theoretical one.

Prove that F_4 is topologically conjugate with the tent map T_2 via $h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$

Hint: Show, e. g., that $h \circ F_4$ has the same derivative as $T_2 \circ h$ at points where the derivative exists, and that they, in addition, have the same values at certain particular points.

Show that $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ is a probability density function on [0,1], the density function of the *arc sine distribution.*

Prove that the arc sine distribution is invariant with respect to F_4, i. e., if the random variable X is distributed according to the Arc sine law then so is $F_4(X)$.

Ref.: H. G. Schuster: *Deterministic Chaos. An Introduction*, 2nd rev. ed., VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim 1989, pp. 67-68.

C. Reichsöllner och M. Thaler: Zufallsgesetze in chaotischen dynamischen Systemen, in *Ausflüge in die Mathematik*, Universität Salzburg 1988.

Problem 2.

Cauchyfördelningen

För att finna lösningar till ekvationer av typen $h(x) = 0$ är Newtons metod ofta mycket användbar. Den konvergerar snabbt om h' i nollstället är olika noll och startpunkten ligger tillräckligt nära nollstället. Men om lösning *saknas* får det motsvarande dynamiska systemet en helt annan karaktär! Nedan betraktas situationen då Newtons metod tillämpas på ekvationen $x^2 + 1 = 0$.

Betrakta avbildningen $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}, \;\; x \neq 0$. Ange några slutligen periodiska eller fixa punkter om sådana finns.

För de flesta startpunkter är banan dock kaotisk. I själva verket kan f användas för att generera slumptal ur den s.k. Cauchyfördelningen, vars täthetsfunktion är $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Detta kan enkelt visas experimentellt med samma metod som i Problem 1.

Bevisa att Cauchyfördelningen är invariant, dvs. om den stokastiska variabeln X är fördelad enligt Cauchyfördelningen så är också $f(X)$ fördelad enligt samma fördelning.

Ref.: C. Reichsöllner och M. Thaler: Zufallsgesetze in chaotischen dynamischen Systemen, i *Ausflüge in die Mathematik*, Universität Salzburg 1988.

The Cauchy Distribution

If Newton's method to find zeroes to functions is applied to functions *without zeroes* then sometimes a very interesting dynamical system arises. For example, the system below is obtained when we try to apply Newton's method to the function $x^2 + 1$.

Consider $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}, \;\; x \neq 0$. Determine some eventually periodic or fixed points if such points exist.

For most initial points the orbits are chaotic, however. f may be used as a random number generator. Using the same method as in Problem 1 one can show experimentally that iteration by f often produces numbers which seem to be randomly drawn from the Cauchy distribution (with probability density function $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$).

Prove that the Cauchy distribution is invariant with respect to f, i. e., if the random variable X is distributed according to the Cauchy distribution then so is $f(X)$.