Introduktion till dynamiska system Period 3, 2012

Introduction to Dynamical Systems

Hemuppgifter till fredagen den 20 januari

Exercises for Friday, January 20

Hänvisningarna är till Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*

References and exercises are taken from the text book Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*

1. Verifiera Theorem 3.13 (Jacobis teorem) experimentellt, dvs. tag ett irrationellt λ och bilda $T_\lambda^n(0)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots N$ där N är ett stort tal. Undersök andelen punkter i ett par intervall.

[**Jacobi, Carl Gustav Jacob** (1804-1851) German mathematician - tysk matematiker, verksam i Berlin och Königsberg (nuv. Kaliningrad)]

Verify Theorem 3.13 (Jacobi's Theorem) numerically, i. e., take an irrational λ and form $T_\lambda^n(0)$ for $n = 1, 2, \ldots N$ where N is a large number. Count the number of points falling in a couple of preassigned intervals.

2. (Problem 1/ p. 29-30.) Sök alla periodiska punkter till följande avbildningar och avgör om de är attraherande, repellerande eller icke-hyperboliska. Skissera fasporträtten.

Find all the periodic points for each of the following maps and classify them as attracting, repelling, or neither. Sketch the phase portraits.

c. $f(x) = x^3 - \frac{1}{9}x$

d. $f(x) = x^3 - x$

j. $A(x) = \frac{\pi}{4} \arctan x$.

k. $A(x) = -\frac{\pi}{4} \arctan x$.

3. (Problem 3/p. 38.) Betrakta den s. k. tältavbildningen

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{om } 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{om } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} .$$

Utnyttja funktionskurvan för T_2^n för att visa att T_2 har exakt 2^n periodiska punkter med perioden n.

Consider the tent map T_2. Use the graph of T_2^n to conclude that T_2 has exactly 2^n periodic points of period n.

4. (Problem 4/p. 39.) Visa att mängden periodiska punkter till T_2 ligger tätt i intervallet [0,1].

Prove that the set of all periodic points of T_2 are dense in [0,1].

5. Betrakta det dynamiska systemet definierat av funktionen $-\sin x$. Antag vidare att räkningarna utförs med precisionen 0.0001, dvs. alla tal avrundas till närmaste multipel av 0.0001. Visa att systemet har en punkt med perioden 2.

Consider the dynamical system defined by the function $-\sin x$. Assume further that the calculations are made with the precision 0.0001, i. e., all numbers are rounded to the nearest multiple of 0.0001. Show that the system has a point with prime period 2.

6. Antag att p är periodisk med fundamentalperioden d. Visa att multiplikatorn kan beräknas som produkten av $f'(x)$ då x genomlöper $O^+(p)$.

Assume that p is a periodic point (for the system $x_{n+1} = f(x_n)$) with prime period d. Show that the multiplicator can be calculated as the product of the derivatives $f'(x)$ as x ranges over the forward orbit $O^+(p)$.