BAYESIANSK STATISTIK

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 15.5.2012

1. Låt $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3)$ vara multinomialfördelad med parametrar $n = 6$ och $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ givet $\bar{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \bar{\theta}$ och låt $\bar{\Theta}$ ha Dirichlet a-priori-fördelningen Dir(1, 1, 2).

Bestäm marginella a-priori-väntevärdet $E(\Theta_i)$ och -variansen $Var(\Theta_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. Fortsättning till uppgift 1: antag att vi har från $\bar{X}$ en observation (1, 2, 3). Bestäm a-posteriori-fördelningen för $\bar{\Theta}$ givet observationen (1, 2, 3), marginella a-posteriori-väntevärden $E(\Theta_1|X_1= 1)$, $E(\Theta_2|X_2= 2)$ och $E(\Theta_3|X_3= 3)$ samt marginella a-posteriori-varianser $Var(\Theta_1|X_1= 1)$, $Var(\Theta_2|X_2= 2)$ och $Var(\Theta_3|X_3= 3)$.

3. Låt stokastiska variabler Y_1 och Y_2 vara betingat oberoende givet $\Theta_j = \theta_j$, $j = 1,2$. Antag att Y_j är Bin(2, θ_j)-fördelad givet $\Theta_j = \theta_j$, $j = 1,2$. Låt vidare Θ_1 och Θ_2 också vara betingat oberoende givet hyperparametern α och antag att Θ_j givet hyperparametern α är Beta(α,1)-fördelad, $j = 1,2$. Antag slutligen att hyperparametern α har en Exp(1)-a-priori-fördelning. Beskriv modellen med en riktad icke-cyklisk graf (DAG) och bestäm den simultana a-priori-tätheten för $\alpha, \theta_1, \theta_2$, $f(\alpha, \theta_1, \theta_2)$.

4. Fortsättning till uppgift 3: Låt $Y_1 = 1$ och $Y_2 = 1$ vara observationer från Y_1 och Y_2. Bestäm den simultana a-posteriori-tätheten $f(\alpha, \theta_1, \theta_2| 1, 1)$.

5. Fortsättning till uppgifterna 3 och 4: bestäm den marginella a-posteriori-fördelningen för hyperparametern α givet observationerna $Y_1 = 1$ och $Y_2 = 1$.