

Approximationsteori. Hemuppgifter 9

1. Antag att $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ är ett ortogonalsystem. Visa att $\phi_0, \dots, \phi_n$ är linjärt oberoende.
2. Givet skalärprodukten

$$(f, g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

och motsvarande ortogonala polynom $p_0, p_1, \dots$, alla med ledande koefficienten 1. Låt q_n vara ett godtyckligt polynom av gradtal n med ledande koefficienten lika med 1. Visa att

$$\int_a^b w(x)(q_n(x))^2 dx$$

minimeras för $q_n = p_n$.

3. Visa att polynomen som genereras av rekursionsformeln

$$\phi_{n+1}(x) = x\phi_n(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^{n+1}}\phi_{n-1}(x),$$

där $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x$, är ortogonala polynom med avseende på viktfunktionen $w(x) = |x|$ på intervallet $[-1, 1]$. (ledning: induktion)

4. Bestäm Gauss kvadraturformler med 2, 3 och 4 abskissor för numerisk integration av integraler av formen

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)dx.$$

Tillämpa formlerna på $f(x) = e^x$ och ange hur stort trunkationsfelet är.

5. Låt $x = \cos \theta$ och definiera

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n = 0, 1, \dots$$

- a) Visa att $U_n(x)$ är ett polynom i x av grad n .
- b) Visa att polynomen $U_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, bildar ett ortogonalsystem på intervallet $[-1, 1]$ med avseende på $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- c) Använd Rodrigues formel för Jacobi polynom i fallet $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ för att bestämma $U_i(x)$, $i = 0, \dots, 4$.
($U_n(x)$ kallas Tjebysjevpolynom av andra slaget.)