

Approximationsteori. Hemuppgifter 7

1. Utbytesalgoritmen används för att beräkna en approximation till en konvex funktion $f \in C[a, b]$ ur mängden P_1 , dvs. ur mängden av förstgradspolynom på $[a, b]$. Att f är konvex betyder att om x_1 och x_2 tillhör $[a, b]$ och om $\theta \in [0, 1]$ så gäller olikheten

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2).$$

- a) Visa att om startreferensen innehåller punkterna $\xi_0 = a$ och $\xi_2 = b$, så krävs högst två iterationer för att erhålla den bästa approximationen $p^* \in P_1$. (Powell övning 8.2)
 - b) Ange en metod att bestämma p^* på basen av informationen av den första iterationen av utbytesalgoritmen.
2. En polynomiell approximation $p \in C[-1, 1]$ önskas för $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{2})$, $-1 \leq x \leq 1$. Felet bör uppfylla $\|f - p\|_\infty \leq 0.01$. Visa att man kan erhålla ett $p \in P_3$ som uppfyller kravet genom att ekonomisera trunkerade Taylorutvecklingar av $f(x)$ kring punkten $x = 0$. (Powell övning 8.6)
 3. Betrakta $C[0, 1]$ och låt $f(x) = e^x - 1$. Låt $A = \{\lambda x^{1.349}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, (jämför Hemuppgifter 2). Visa att A inte uppfyller Haars villkor på $[0, 1]$, men att Haars villkor är uppfyllt i intervallet $[\varepsilon, 1]$ för $0 < \varepsilon < 1$. Bestäm med utbytesalgoritmen den bästa approximationen på intervallet $[\varepsilon, 1]$ ur A till f . Motivera värför denna approximation även är den bästa på intervallet $[0, 1]$. (Illustrera felfunktionen grafiskt för iterationerna av utbytesalgoritmen).
 4. Givet funktionsvärdena $f(0) = 0.3$, $f(1) = 4.2$, $f(2) = 0.1$, $f(3) = 3.4$, $f(4) = 5.7$, $f(5) = 4.9$ och $f(6) = 5.7$.
 - a) använd den diskreta enpunkts-utbytesalgoritmen för att beräkna en bästa approximation ur mängden P_1 till de givna datapunkterna. Låt startreferensen vara $\{0, 3, 6\}$. (Powell övning 8.7)
 - b) antag att vi kräver att approximanten interpolerar f i punkten $x = 3$. Använd linjär programmering för att bestämma den bästa approximationen.Illustrera resultaten i a) och b) fallen grafiskt.

5. Betrakta $f(x) = |x|$ i intervallet $[-1, 1]$. Bestäm med hjälp av utbytesalgoritmen polynomiella minimax-approximationer till f av gradtal $n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$. Visa numeriskt att uttrycket $n\|f - p_n^*\|$ verkar att närma sig ett värde β . (Bernsteins konstant)