

Approximationsteori. Hemuppgifter 5

1. Låt $f(x) = \sin x$ i intervallet $I = [-\pi, \pi]$. Välj fyra abskissor $x_0, x_1, x_2, x_3 \in I$ och bestäm Hermites interpolationspolynom $p(x)$. Beräkna $\|f - p\|_\infty$.
2. Antag att $f \in C[a, b]$. Låt Xf vara det förstegradspolynom som interpolerar f i punkterna $x_0, x_1 \in [a, b]$. Antag att $x_0 < x_1$ och visa att X är en monoton operator om och endast om $x_0 = a$ och $x_1 = b$. (Powell övning 6.1)
3. Visa att $\|B_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, då $f \in C[0, 1]$ och B_n är Bernsteins operator.
4. Använd identiteten $k^2 = (k-1)(k-2) + 3(k-1) + 1$ för att visa att

$$(B_n f)(x) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2} x^2 + n^{-2} x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

då B_n är Bernsteins operator och $f(x) = x^3$. (Powell övning 6.2)

5. Betrakta funktionen $f(x) = |x|$ i intervallet $[-1, 1]$. Undersök numeriskt hur stort L_∞ felet för felfunktionen blir med växande gradtal vid approximation med
 - a) Bernsteins operator,
 - b) Fejér-Hermite operatorn.Illustrera undersökningarna grafiskt.