Approximationsteori. Hemuppgifter 3

1. Låt X vara en linjär operator från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$. Då finns det en $(n \times n)$ matris $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})$, sådan att för $f \in \mathbb{R}^n$ gäller att $X(f) = \overline{X}f$, där f är en kolonnvektor.
   a) Bestäm operatornormen $\|X\|_\infty$.
   b) Bestäm operatornormen $\|X\|_1$. (Powell övning 3.1)
   (ledning: Börja med att undersöka fallet $n = 2$)

2. Betrakta $C[0,1]$ med L_∞-normen. För $c \in \mathbb{R}$ och för ett fixt reellt $n > 0$ definieras operatorn $X_n(f)$ för $f \in C[0,1]$ genom
$$(X_n f)(x) = \int_0^1 cx^n f(y)dy \ , \qquad 0 \le x \le 1.$$
   Låt $A_n = \{\lambda x^n \ ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   a) Visa att X_n är en linjär approximationsoperator från $C[0,1]$ till A_n.
   b) Bestäm konstanten c så att X_n är en linjär projektion, och bestäm operatornormen $\|X_n\|_\infty$ för den linjära projektionen.
   c) Låt $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ och låt X_n vara den linjära projektionen. Bestäm numeriskt ett optimalt $n = n^* > 0$ sådant att $\|f - X_n f\|_\infty$ minimeras. Ge en undre gräns för felet d^* av den bästa tänkbara approximationen $a^*_{n^*} \in A_{n^*}$.

3. Vi definierar funktionen Xf för varje $f \in C[0,1]$ genom
$$(Xf)(x) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \ + (x - \tfrac{1}{4})(f(1) - f(0)) \ , \quad 0 \le x \le 1.$$
   Visa att olikheten
$$\|f - Xf\|_\infty \le \tfrac{7}{2}\|f - p\|_\infty$$
   är uppfylld för alla polynom $p \in C[0,1]$ av gradtal ≤ 1.(Pow. övn. 3.4)

4. Visa att estimatet $f(3) \approx -\frac{1}{2}f(0) + f(1) + \frac{1}{2}f(4)$ är exakt om f är ett andragradspolynom. För en funktion $f \in C[0,4]$ är felet i estimatet 0.15. Visa att olikheten
$$\min_{p \in P_2} \max_{0 \le x \le 4} |f(x) - p(x)| \ge 0.05$$
   gäller. (Powell övning 3.6)

5. Låt A vara mängden av kvadratiska rifunktioner i $C[-1,1]$ med högst två knutpunkter i det öppna intervallet $-1 < x < 1$, och låt $f(x) = |x|$. Visa att det finns rifunktioner $s \in A$ som gör felet $\|f - s\|_\infty$ mindre än $\varepsilon > 0$. (Powell övning 3.8)