Approximationsteori. Hemuppgifter 12

1. Givet nedanstående data:
   $f(0) = -0.112178\,,\ f(\pi) = -0.321412\,,\ f(\frac{\pi}{4}) = 1.079659\,,$
   $f(\frac{5\pi}{4}) = -0.528113\,(\frac{\pi}{2}) = 2.172667\,,\ f(\frac{3\pi}{2}) = -0.562326\,,$
   $f(\frac{3\pi}{4}) = 0.376607\,,\ f(\frac{7\pi}{4}) = -0.466261.$
   a) Anpassa en interpolerande naturlig kubisk ri-funktion till datat. Illustrera resultatet grafiskt.
   b) Ändra den tredje datapunkten till $f(\frac{\pi}{2}) = 1.9$ och jämför grafiskt den så erhållna naturliga kubiska ri-funktionen med den som erhölls i fallet a). Vad kan man säga om metodens känslighet för fel i mätdata?

2. Gör samma utredning som i uppgift 1 med kubiska ri-funktioner med rätta randvillkor.

3. Betrakta funktionen $f(x) = \pi,\ 0 \leq x < \pi,\ f(\pi) = \pi/2,\ f(x) = x - \pi,\ \pi < x \leq 2\pi.$
   a) Approximera f på intervallet $[0, 2\pi]$ med en naturlig kubisk ri-funktion.
   b) Antag att man inte kräver att andraderivatan är kontinuerlig i de inre knutpunkterna. Kan man då konstruera en bra approximation?

4. Arkimedes spiral ges av parameterframställningen
   $x(t) = t\cos t$
   $y(t) = t\sin t\,, \quad t \geq 0\,.$
   Diskretisera parameterintervallet $t \in [0, 2\pi]$ ekvidistant i 10 punkter och beräkna $x(t_i), y(t_i)$. Anpassa en parameterkurva till datat med hjälp av naturliga kubiska ri-funktioner. Jämför resultatet med den korrekta spiralen.

5. a) Utveckla en metod för beräkning av $\int_a^b f(x)dx$ med hjälp av den interpolerande kubiska ri-funktionen $s(x)$ med rätta randvillkor.
   b) Hur många ekvidistanta knutpunkter behövs för att approximera $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$ med ett fel som är högst 0.001 ?