

Approximationsteori. Hemuppgifter 10

1. Låt polynomen $\phi_0, \phi_1, \dots$, vara **ortonormala** polynom på intervallet $[a, b]$ med avseende på viktfunktionen $w(x)$. Visa att för ett godtyckligt polynom $p(x)$ av gradtal $\leq n$ gäller att

$$p(x) = \int_a^b p(t)K_n(t, x)w(t)dt,$$

där

$$K_n(t, x) = \sum_{i=0}^n \phi_i(t)\phi_i(x)$$

är kärnan för det ortonormala systemet.

2. Låt a_n och b_n vara Fourier koefficienterna för $f \in C_{2\pi}$ och låt G_n vara Fejérs operator. Visa att

$$a) (G_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

och att

$$b) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((G_n f)(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

3. Visa att om $f \in C_{2\pi}$ och har Fourier koefficienterna a_n och b_n , så gäller

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

(ledning: undersök $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - (S_n f)(x))^2 dx$ och använd Weierstrass sats för trigonometriska polynom.)

4. Bestäm den formella ortogonalutvecklingen av $f(x) = |x|$ i Tjebysjev-serie på $[-1, 1]$. Visa att partialsummorna $R_n f$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ och bestäm $\|f - R_n f\|_{\infty}$ för $n = 0, 2, \dots, 10$.
5. Låt $f \in C_{2\pi}$ och låt f ges av $f(x) = |x|$ på intervallet $[-\pi, \pi]$. Utveckla f i Fourier serie och visa att partialsummorna $S_n f$ konvergerar likformigt mot f . Bilda $G_n f$, där G_n är Fejérs operator och illustrera grafiskt f och $S_n f$ samt f och $G_n f$ på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.