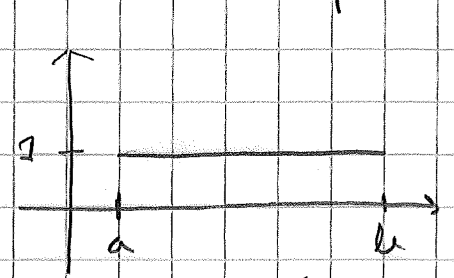
9. Minsta kvadrat approximation.

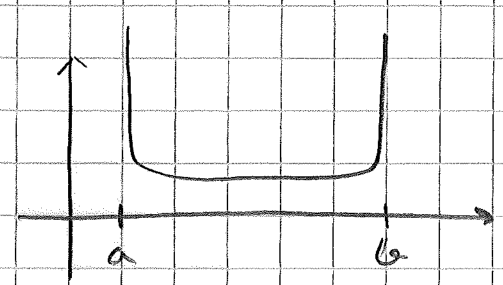
9.1 Inledning

Betrakta en mängd $\mathcal{A}$ av approximanter i $C[a,b]$. Vi har en fix funktion $w(x) > 0$ på $[a,b]$, som kallas för en viktfunktion, eller viktbeläggning på $[a,b]$. w antas kontinuerlig, men den kan ha integrerbara singulariteter i intervallets ändpunkter.

Ex



$w(x) = 1$



$w(x)$

Vi söker $p^* \in \mathcal{A}$ som minimerar integralen

$$\int_a^b w(x)(f(x)-p(x))^2\,dx \quad , \quad p \in \mathcal{A}.$$

Felet mäts med en viktad L_2-norm, $L_{2,w}$, och kvadrerade avståndet betecknas $\|f-p\|^2_{2,w}$. Ett viktigt redskap för bestämning av p^* är den normgenererande skalärprodukten

$$\begin{cases} (f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx \quad , \quad f,g \in C[a,b]. \\ \|f\|_{2,w} = \sqrt{(f,f)} \quad , \quad f \in C[a,b] \end{cases}$$

I det diskreta fallet har vi m st. mätvärden

$$y_i = f(x_i) \quad , \quad i = 1,\dots,m,$$

där $f \in C[a,b]$, och $x_i \in [a,b]$, $i = 1,\dots,m$.
Vi söker en approximation $p_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq C[a,b]$.
Vidare betraktar vi en diskret viktbeläggning w_j, $j = 1,\dots,m$, som är positiv. w_j kunde

t.ex. vara valda så att $\frac{1}{w_j}$ är den uppskattade variansen för mätfelet i punkten x_j. Vi önskar hitta $p_0^* \in \mathcal{A}_0$ som minimerar

$$\sum_{j=1}^{m} w_j (y_j - p_0(x_j))^2 \quad , \quad p_0 \in \mathcal{A}_0.$$

Nu kan inte ovanstående uttryck tolkas som en norm på $C[a,b]$, (men nog som en semi-norm), ty det kan finnas funktioner $p_0 \in \mathcal{A}$ som gör uttrycket $= 0$, fastän $p_0 \not\equiv 0$ i $[a,b]$. Problemet kan kringgås genom att betrakta $\{y_j \,;\, j=1,\dots,m\}$ som en vektor i $\mathbb{R}^m$.
För varje $p_0 \in \mathcal{A}_0$ låter vi $X(p_0)$ vara den vektor i $\mathbb{R}^m$ vars komponenter har värdena $\{p_0(x_j)\,;\, j=1,\dots,m\}$.
Vi låter $\mathcal{A}$ vara mängden $\{X(p_0)\,;\, p_0 \in \mathcal{A}_0\}$.
Då är $\mathcal{A}$ ett underrum av $\mathbb{R}^m$. Bestämning av den bästa approximationen p_0^* ur $\mathcal{A}_0$ är då ekvivalent med bestämning av den vektor p^* som minimerar

$$\sum_{j=1}^{m} w_j (y_j - p_j)^2 \quad , \quad p = (p_1,\dots,p_m) \in \mathcal{A}.$$

Ovanstående uttryck kan tolkas som en kvadrerad viktad diskret L_2-norm, $L_{2,w}$, och kvadrerade avståndet är $\|y-p\|^2_{2,w}$, $(y = (y_1,\dots,y_m))$.
Den normgenererande skalärprodukten ges av

$$\begin{cases} (u,v) = \sum_{j=1}^{m} w_j u_j v_j \quad , \quad u,v \in \mathbb{R}^m, \\ \|u\|_{2,w} = \sqrt{(u,u)} \quad , \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Om $\mathcal{A}$ är ett ändligt-dimensionellt linjärt underrum kan p^* beräknas genom lösning av ett ekvationssystem.

9.2 Euklidiska rum (Skalärproduktrum)

Definition: Ett reellt vektorrum $\mathcal{B}$ kallas ett euklidiskt rum, om det för varje vektorpar $x, y \in \mathcal{B}$ är tillordnat ett reellt tal (x, y), kallat skalära produkten (inre produkten), av x och y. (x, y) uppfyller följande axiom:

(1) $(x, x) \geq 0$ och $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) $(x, y) = (y, x)$
(3) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, z) + \mu (y, z)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
((3') $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda (x, y) + \mu (x, z)$).

Ex $C[a, b]$ försett med skalärprodukten

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) \cdot g(x)\, dx \quad , \quad f, g \in C[a, b],$$

och w, en fix positiv och kontinuerlig funktion i $[a, b]$, är ett euklidiskt rum.
Axiomen (1) – (3) är lätta att verifiera

Ex $\mathbb{R}^m$ försett med skalär produkten

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{m} w_j u_j v_j \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}^m,$$

och w_j är en positiv viktbeläggning, är ett euklidiskt rum.
Axiomen (1) – (3) är lätta att verifiera.

Definition: Med normen av en vektor x i ett euklidiskt rum förstås uttrycket

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

För att verifiera normaxiomen bevisar vi först en viktig sats.

 Sats 9.2.1 (Schwarz' olikhet). I varje euklidiskt rum gäller

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Bevis: Olikheten gäller trivialt för $y = 0$. Anta att $y \neq 0$. Då gäller för varje reellt λ enligt skalära produktens axiom:

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \lambda (y, x) - \lambda (x, y) + \lambda^2 (y, y)$$
$$= \|x\|^2 - 2\lambda (x, y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

Speciellt för $\lambda = \dfrac{(x, y)}{\|y\|^2}$ erhålls:

$$0 \leq \|x\|^2 - 2 \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$$
$$= \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}{\|y\|^2}$$

täljaren ≥ 0, vilket ger satsens påstående. $\square$

Sats 9.2.2 Varje euklidiskt rum är normerat om man definierar normen som $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Bevis: 1° klart att $\|x\| \geq 0$ och $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2° $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$.
3° $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2 (x, y) + (y, y)$
$\leq \|x\|^2 + 2 |(x, y)| + \|y\|^2$
$\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$ (sats 9.2.1)
$= (\|x\| + \|y\|)^2$

$\therefore \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\| \cdot \|$ satisfierar normaxiomen. $\square$

Ex $C[a,b]$ försett med skalärprodukten och normen $\|f\|_{2,w}$ enligt nedan är ett normerat euklidiskt rum.

$$\begin{cases} (f,g) = \int_a^b w(x)\,(f(x)-g(x))^2\,dx\,, & f,g \in C[a,b],\ w(x)>0,\ \text{kont;} \\ \|f\|_{2,w} = \sqrt{(f,f)}\,. \end{cases}$$

Det kvadrerade avståndet mellan f och g ges av

$$\|f-g\|^2_{2,w} = (f-g,\, f-g).$$

Ex $\mathbb{R}^m$ försett med skalärprodukten och normen $\|u\|_{2,w}$ enligt nedan är ett normerat euklidiskt rum.

$$\begin{cases} (u,v) = \sum_{j=1}^{m} w_j u_j v_j\,, & u,v \in \mathbb{R}^m,\ w_j>0\ \forall j, \\ \|u\|_{2,w} = \sqrt{(u,u)}\,. \end{cases}$$

Det kvadrerade avståndet mellan u och v ges av $\|u-v\|^2_{2,w}$.

Sats 9.2.3. Skalära produkten (x,y) är en kontinuerlig funktion av x och y.

Bevis: Tag godtyckliga $x_0, y_0 \in \mathcal{B}$, ett normerat euklidiskt rum. Vi visar att $|(x,y)-(x_0,y_0)|$ blir hur litet som helst såsnart avstånden $\|x-x_0\|$ och $\|y-y_0\|$ är tillräckligt små. Välj $0<\varepsilon<1$. För $\|x-x_0\|<\varepsilon$ och $\|y-y_0\|<\varepsilon$ gäller då:

$$\begin{aligned} |(x,y)-(x_0,y_0)| &= |(x,y)-(x,y_0)+(x,y_0)-(x_0,y_0)| \\ &\leq |(x,y-y_0)| + |(x-x_0,y_0)| \\ &\leq \|x\|\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y_0\| \\ &= \|(x-x_0)+x_0\|\cdot\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| \\ &\leq (\|x-x_0\|+\|x_0\|)\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| \\ &< (1+\|x_0\|)\,\varepsilon + \varepsilon\,\|y_0\| \\ &= (1+\|x_0\|+\|y_0\|)\,\varepsilon \end{aligned}$$

Alltså är (x,y) kontinuerlig för $x=x_0$ och $y=y_0$, och därmed i hela $\mathcal{B}$. □

Som korollarium av satsen följer att normen är en kontinuerlig funktion, (vilket vi redan visat i kapitel 1).

Sats 9.2.4. I varje euklidiskt rum gäller:

(1) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Parallellogramidentiteten)

(2) $(x,y)=0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ (Pythagoras sats)

Bevis: (1). $\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2$
$\|x-y\|^2 = (x-y,x-y) = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2$

Alltså gäller (1).

(2). $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ □.

Parallellogramidentiteten gäller inte i alla normerade rum. Man kan visa att om parallellogramidentiteten gäller i ett normerat rum, så kan man i rummet införa en skalär produkt, som genererar den givna normen.

Definition. Två vektorer x och y i ett euklidiskt rum $\mathcal{B}$ är <u>ortogonala</u> om $(x,y)=0$.
Beteckning: $x \perp y$.
En vektormängd $S \subseteq \mathcal{B}$ bildar ett <u>ortogonalsystem</u>, om vektorerna i S är parvis ortogonala.

Vektorerna i ett ortogonalsystem S är linjärt oberoende, vilket innebär att varje ändligt delsystem av S är linjärt oberoende.

Ex Funktionerna $f(x)=1$, $g(x)=x$, $h(x)=x^2-\frac{1}{3}$ bildar ett ortogonalsystem i $C[-1,1]$, om vi väljer $w(x)=1$ i skalärprodukten.

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$$(f,h) = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3}(-1)\right) = 0$$

$$(g,h) = \int_{-1}^{1} x(x^2 - \tfrac{1}{3})\,dx = 0.$$

<u>Sats 9.2.5</u>. Om $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ är ett ortogonalsystem i ett euklidiskt rum, så är

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

<u>Bevis</u>: $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = (x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n)$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i) + \underbrace{\sum_{i \neq j} (x_i, x_j)}_{=0}$$

$$= \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2. \quad \square$$

<u>Definition</u>: Ett ortogonalsystem $S = \{e_i\}_{i \in I}$, där I är en indexmängd, sägs bilda ett <u>ortonormalsystem</u> (<u>ortonormerat system</u>), ett <u>ON-system</u>, om för varje $i \in I$ gäller att $\|e_i\| = 1$.
Ett ON-system karakteriseras av att $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ för varje $i, j \in I$.
($\delta_{ij} = 0$ om $i \neq j$, $= 1$ om $i = j$).

$\boxed{\text{Ex}}$ $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, ..., $\varphi_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$, ... är ett ortonormalsystem i $C[0, 2\pi]$ försett med skalärprodukten

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\,dx.$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^{2\pi} \varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

<u>Sats 9.2.6</u>. (Gram-Schmidt). Låt $\{x_1, x_2, \dots\}$ vara en mängd av linjärt oberoende vektorer i ett euklidiskt rum. För varje n är det möjligt att definiera en vektor e_n som en linjär kombination av $x_1, \dots, x_n$ på ett sätt som gör mängden $\{e_1, e_2, \dots\}$ till ett ON-system.

<u>Bevis</u>: (Induktion). Sätt $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. ($x_1$ är olika noll eftersom mängden $\{x_1, x_2, \dots\}$ antogs linjärt oberoende)
Antag att $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ är ett ON-system, och att för varje $k < n$ är e_k en linjärkombination av $\{x_1, \dots, x_k\}$.
Definiera

$$u = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, e_k) e_k.$$

För $i < n$ gäller:

$$(u, e_i) = (x_n, e_i) - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, e_k)(e_k, e_i)$$

$$= (x_n, e_i) - (x_n, e_i) \cdot 1 = 0$$

Från definitionen av u och induktionshypotesen framgår att u är en linjärkombination av $\{x_1, \dots, x_n\}$. Vidare kan inte $u = 0$, ty då vore x_n en linjärkombination av $e_1, \dots, e_{n-1}$, och därmed även en linjärkombination av $x_1, \dots, x_{n-1}$. Vi kan sätta $e_n = \frac{u}{\|u\|}$ och erhåller då att $\{e_1, \dots, e_n\}$ är ett ON-system. Fullständig induktion ger då satsens påstående. $\square$

Beviset ger ett "recept" att givet ett ändligt dimensionellt linjärt underrum A av B konstruera en bas som är ett ON-system.
Om vi inte normerar e_n, utan sätter $e_n = u$, erhåller vi en bas som är ett ortogonalsystem.

Definition: Om det euklidiska rummet $\mathcal{B}$ är fullständigt, dvs. om varje Cauchyföljd i $\mathcal{B}$ konvergerar mot en vektor i $\mathcal{B}$, så kallas $\mathcal{B}$ ett Hilbertrum. (127)

Varje Hilbertrum är ett Banachrum, medan ett Banachrum inte behöver vara ett Hilbertrum.

Ex) R^m försett med skalärprodukten

$$(u,v) = \sum_{j=1}^{m} w_j u_j v_j \quad , \quad u,v \in R^m, \; w_i > 0$$

är ett Hilbertrum.

Ex) $C[a,b]$ försett med skalärprodukten

$$(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx \quad , \quad f,g \in C[a,b]$$

w positiv och kont.

är inte ett Hilbertrum.

9.3 Karakteriseringsteoremet för minsta kvadrat approximering.

Sats 9.3.1 Låt $\mathcal{A}$ vara ett ändligt-dimensionellt linjärt underrum av ett euklidiskt rum $\mathcal{B}$ och låt $f \in \mathcal{B}$. Då är $p^* \in \mathcal{A}$ den entydigt bestämda bästa approximationen ur $\mathcal{A}$ till f om och endast om

$$(f - p^*, p) = 0 \quad , \quad p \in \mathcal{A}.$$

$(f - p^* \perp p$ för varje $p \in \mathcal{A})$

Bevis: Existensen av en bästa approximation garanteras av sats 1.3.1.

$1°$ $(\Rightarrow)$ (Indirekt bevis). Antag att det finns ett $p \neq 0$ i $\mathcal{A}$ sådant att

$$(f - p^*, p) \neq 0.$$

(128) Låt $\lambda \in R$ och betrakta $p^* + \lambda p \in \mathcal{A}$.

$$\|f - (p^* + \lambda p)\|^2 = (f - p^* - \lambda p, f - p^* - \lambda p)$$
$$= \underbrace{\|f - p^*\|^2 - 2\lambda (f - p^*, p) + \lambda^2 \|p\|^2}_{h(\lambda)}$$

Vi bestämmer minimum av $h(\lambda)$:

$$h'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -2(f - p^*, p) + 2\lambda \|p\|^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^* = \frac{(f - p^*, p)}{\|p\|^2}.$$

$$h(\lambda^*) = \|f - p^*\|^2 - 2\frac{|(f - p^*, p)|^2}{\|p\|^2} + \frac{|(f - p^*, p)|^2}{\|p\|^2}$$
$$< \|f - p^*\|^2$$

$\therefore$ p^* är inte en bästa approximation.
$\therefore$ p^* är en bästa approximation $\Rightarrow$ $(f - p^*, p) = 0$ för varje $p \in \mathcal{A}$.

$2°$ $(\Leftarrow)$. Antag att $(f - p^*, p) = 0$ för alla $p \in \mathcal{A}$. Låt $q^* \in \mathcal{A}$ vara godtyckligt vald. Då erhålls:

$$\|f - q^*\|^2 - \|f - p^*\|^2 = \|q^*\|^2 - \|p^*\|^2 - 2(f, q^*) + 2(f, p^*)$$
$$= \|q^*\|^2 + \|p^*\|^2 - 2(p^*, p^*) - 2(f, q^*) + 2(f, p^*)$$
$$= \|q^*\|^2 + \|p^*\|^2 - 2(q^*, p^*) + 2(f - p^*, p^* - q^*)$$
$$= \|q^* - p^*\|^2 + 2(f - p^*, p^* - q^*)$$

$2(f - p^*, p^* - q^*) = 0$, ty $p^* - q^* \in \mathcal{A}$. Vi erhåller

$$\|f - q^*\|^2 = \|f - p^*\|^2 + \|q^* - p^*\|^2 \geq \|f - p^*\|^2$$

q^* godtyckligt vald i $\mathcal{A}$. $\therefore$ p^* är en bästa approximation. p^* är entydigt bestämd, ty likhet i ovanstående uttryck gäller endast om $q^* \equiv p^*$. □

För $q^* \equiv 0 \in \mathcal{A}$ erhåller vi ekvationen

$$\|f\|^2 = \|p^*\|^2 + \|f - p^*\|^2. \quad (*)$$

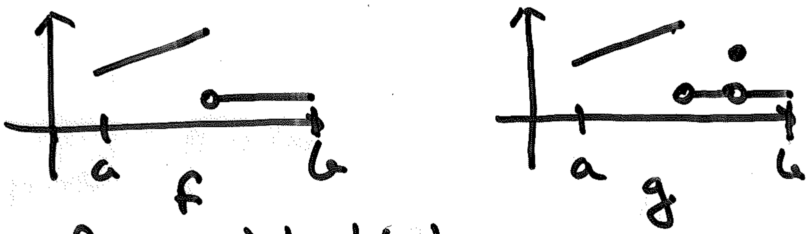
Anm: Satsen gäller även om $\mathcal{B}$ är ett Hilbertrum

Ex) Låt $L_{2,w}[a,b]$ beteckna mängden av reella funktioner på $[a,b]$ sådana att
$$\int_a^b w(x)|f(x)|^2\,dx < \infty. \quad \text{(Lebesgue-integral)}$$

$(C[a,b] \subseteq L_{2,w}[a,b])$.

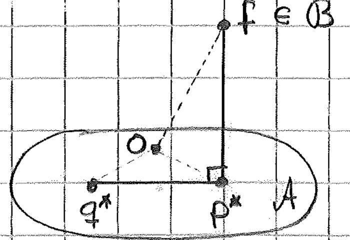
$L_{2,w}[a,b]$ är ett hilbertrum med skalärprodukten
$$(f,g) = \int_a^b w(x)\,(f(x)\cdot g(x))\,dx,$$
$$f,g \in L_{2,w}[a,b].$$

I $L_{2,w}[a,b]$ betraktas f och g som identiska ifall $f(x) \neq g(x)$ på en mängd med Lebesgue-måttet noll.



f, g identiska.

Följande bild må illustrera sats 9.3.1:



9.4 Konstruktion av den bästa approximationen

Sats 9.4.1. Låt A vara ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av det euklidiska rummet B. Låt A uppspännas av basen $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Då är $p^* \in A$ den bästa approximationen om och endast om

$$(f - p^*, \phi_i) = 0 \quad , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Då bestäms

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j(x)$$

av det linjära ekvationssystemet

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^* (\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Ekvationerna kallas normalekvationerna.

Bevis: 1° Implikationen $\Rightarrow$ gäller på grund av sats 9.3.1.

2° ($\Leftarrow$). Antag att $(f - p^*, \phi_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$. Tag godtyckligt $g \in A$. Då kan g skrivas i formen

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j \phi_j(x) \quad , \quad d_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, \ldots, n.$$

Vi bildar:

$$\begin{aligned}(f - p^*, g) &= \Big(f - p^*, \sum_{j=0}^{n} d_j \phi_j(x)\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (f - p^*, d_j \phi_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} d_j \underbrace{(f - p^*, \phi_j)}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

För varje $g \in A$ gäller $(f - p^*, g) = 0$. Alltså ger sats 9.3.1 att p^* är den bästa approximationen till $f \in B$ ur A.

Normalekvationerna härleds som följer:

$$(f - p^*, \phi_i) = 0 \quad , \quad i = 0, \ldots, n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Big(f - \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j(x), \phi_i\Big) = 0 \quad , \quad i = 0, \ldots, n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(f, \phi_i) - \sum_{j=0}^{n} (c_j^* \phi_j, \phi_i) = 0 \quad , \quad i = 0, \ldots, n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sum_{j=0}^{n} c_j^* (\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad , \quad i = 0, \ldots, n. \quad \square$$

Anm: Satsen gäller även om B är ett Hilbertrum.

Vi tillämpar sats 9.4.1 på 2 exempel.

Ex Betrakta $B = C[0,3]$, $f(x) = e^x$, $A = \{a + bx^2, \ a, b \in \mathbb{R}\}$

A är ett 2-dimensionellt underrum av B med basen $\{\phi_0, \phi_1\} = \{1, x^2\}$.

$$(f, g) = \int_0^3 f(x) \cdot g(x)\, dx \quad , \quad f, g \in B \qquad (w(x) = 1).$$

$$(f, \phi_0) = \int_0^3 1 \cdot e^x dx = e^3 - 1 \ , \ (f, \phi_1) = \int_0^3 x^2 e^x dx = 5e^3 - 2$$

$$(\phi_0, \phi_0) = \int_0^3 1 \cdot 1\, dx = 3 \ , \ (\phi_0, \phi_1) = \int_0^3 1 \cdot x^2 dx = 9$$

$$(\phi_1, \phi_1) = \int_0^3 x^2 \cdot x^2 dx = \frac{243}{5}$$

Vi uppställer normalekvationerna:

$$\begin{cases} a(\phi_0, \phi_0) + b(\phi_1, \phi_0) = (f, \phi_0) \\ a(\phi_0, \phi_1) + b(\phi_1, \phi_1) = (f, \phi_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9b = e^3 - 1 \\ 9a + \frac{243}{5} b = 5e^3 - 2 \end{cases}$$

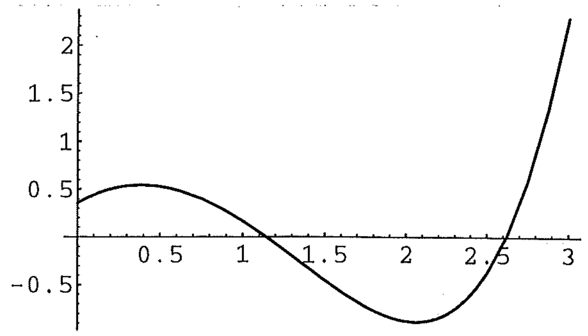
$$\Leftrightarrow \ a = \frac{2e^3 - 17}{36} \ \wedge \ b = \frac{30e^3 + 15}{324} = \frac{10e^3 + 5}{108}$$

$$p^*(x) = a + bx^2 \approx 0{,}643641 + 1{,}90607\, x^2$$

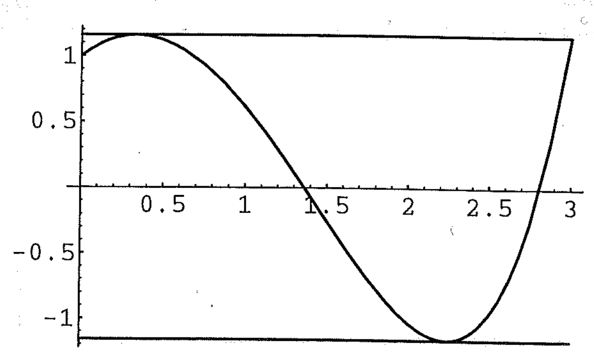
$$\|f - p^*\|_2 = \Big(\int_0^3 (e^x - p^*(x))^2 dx\Big)^{1/2} = \frac{\sqrt{52e^3 - 2e^6 - 95}}{6\sqrt{3}} \approx 1{,}14903$$

$\|f-p^*\|_\infty \approx 2{,}28728$, $e(x) = (f-p^*)(x)$. (131)

$$\begin{cases} e(0{,}385829) \approx 0{,}343447 \\ e(2{,}06174) \approx -0{,}886268 \\ e(3) \approx 2{,}28728 \end{cases}$$



Vi tillämpar utbytesalgoritmen med startreferensen $\{0{,}385829,\ 2{,}06174,\ 3\}$.
Vi erhåller $\{\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*\} \approx \{0{,}331151,\ 2{,}24507,\ 3\}$ i 3 iterationer.
$\|f-p^*\|_\infty \approx 1{,}15941$, $p^*(x) \approx 0{,}00258736 + 2{,}10262 \cdot x^2$



Ofta är L_∞-felet hos den optimala L_2-approximationen relativt litet. I detta fall gäller inte detta påstående, men man kan ofta ändå utnyttja abskissorna för extremvärdena för den bästa minsta kvadrat approximationen för att erhålla en startreferens för utbytesalgoritmen.

(132)

Ex Betrakta det diskreta minsta kvadrat approximationsproblemet att anpassa ett polynom av formen $p(x) = a + bx^2$ till datapunkterna $\{(0,e^0), (1,e^1), (2,e^2), (3,e^3)\}$.
Vektorn $(e^0, e^1, e^2, e^3)^T = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = y \in \mathbb{R}^4$

$\mathcal{A}_0 = \{a + bx^2,\ a, b \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le 3\}$

$$p_0 \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow X(p_0) = (a+b\cdot 0^2, a+b\cdot 1^2, a+b\cdot 2^2, a+b\cdot 3^2)^T = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

$\mathcal{A} = \{X(p_0);\ p_0 \in \mathcal{A}_0\}$.
$\mathcal{A}$ är ett 2-dimensionellt linjärt underrum av $\mathbb{R}^4$ med basen $\phi_0 = (1,1,1,1)^T$, $\phi_1 = (0,1,4,9)^T$.
Skalärprodukten ges av

$$(u,v) = \sum_{j=1}^{4} u_j v_j, \quad u,v \in \mathbb{R}^4 \quad (w_i = 1,\ i=1,2,3,4).$$

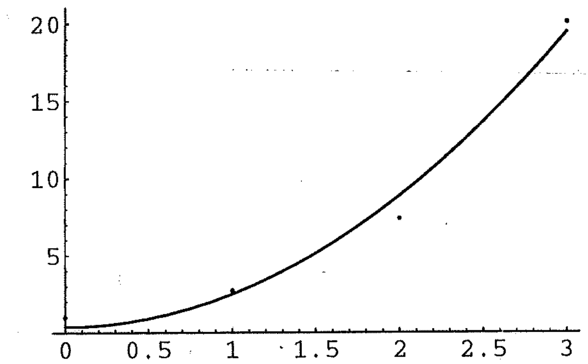
Vi tillämpar sats 9.4.1:

$$(y, \phi_0) = 1\cdot 1 + 1\cdot e + 1\cdot e^2 + 1\cdot e^3 = 1 + e + e^2 + e^3$$
$$(y, \phi_1) = e^0\cdot 0 + e^1\cdot 1 + e^2\cdot 4 + e^3\cdot 9 = e + 4e^2 + 9e^3$$
$$(\phi_0, \phi_0) = 4, \quad (\phi_0, \phi_1) = 14, \quad (\phi_1, \phi_1) = 98.$$

Normalekvationerna:

$$\begin{cases} 4a + 14b = 1 + e + e^2 + e^3 \\ 14a + 98b = e + 4e^2 + 9e^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^* \approx 0{,}378985 \\ b^* \approx 2{,}11978 \end{cases}$$

$p_0^*(x) = 0{,}378985 + 2{,}11978 \cdot x^2$, $\|y - X(p_0^*)\|_2 \approx 2{,}987$



$\Big(\|e^x - p_0^*\|_\infty \approx 1.62288$ (diskreta L_2-app. ger lägre L_∞-fel)
$\max_{1\le i\le 4} |e^{x_i} - p_0(x_i)| \approx 1{,}469$ (disk. utb. alg. ger: $\max_{1\le i\le 4} |e^{x_i} - p^*(x_i)| \approx 1{,}0467$)$\Big)$

Betrakta normalekvationerna:

$$\begin{cases} c_0^*(\phi_0,\phi_0) + c_1^*(\phi_1,\phi_0) + \dots + c_n^*(\phi_n,\phi_0) = (f,\phi_0) \\ c_0^*(\phi_0,\phi_1) + c_1^*(\phi_1,\phi_1) + \dots + c_n^*(\phi_n,\phi_1) = (f,\phi_1) \\ \vdots \\ c_0^*(\phi_0,\phi_n) + c_1^*(\phi_1,\phi_n) + \dots + c_n^*(\phi_n,\phi_n) = (f,\phi_n) \end{cases}$$

Om vi väljer $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ till en ortogonalbas så erhålls:

$$c_j^* = \frac{(f,\phi_j)}{(\phi_j,\phi_j)} = \frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}, \quad j=0,\dots,n,$$

ty $(\phi_i,\phi_j)=0$ om $i\neq j$.
Om vi väljer $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ som en ortonormalbas (ON-bas) erhålls:

$$c_j^* = \frac{(f,\phi_j)}{(\phi_j,\phi_j)} = (f,\phi_j), \quad j=0,\dots,n,$$

ty $(\phi_i,\phi_j)=\delta_{ij}$. Vi formulerar en sats:

Sats 9.4.2: Antag att A är ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av det euklidiska rummet B. $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ är en bas för A. Om basen är en ortogonalbas så erhålls den bästa approximationen p^* som:

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}\cdot\phi_j(x).$$

Om basen är en ortonormalbas erhålls:

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} (f,\phi_j)\,\phi_j(x).$$

Anm: Satsen gäller även om B är ett Hilbertrum.

Ex Betrakta det kontinuerliga exemplet $f(x)=e^x$ i $C[0,3]$, $A=\{a+bx^2,\ a,b\in\mathbb{R}\}$. Då vet vi att $p^*(x)\approx 0{,}643641+1{,}90607\,x^2$ när vi löste normalekvationerna med basen $\{1,x^2\}$.

Vi utnyttjar sats 9.2.6 och bildar en ON-bas. Sätt $\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt3}$. Då gäller

det att $(\phi_0,\phi_0)=\int_0^3\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2dx = 1$.
Sätt

$$u(x) = x^2 - (x^2,\phi_0)\cdot\phi_0(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt3}\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt3}\,dx = x^2-3.$$

$$(u,u) = \int_0^3 (x^2-3)^2\,dx = \frac{108}{5}.$$

Sätt $\phi_1(x) = \frac{u(x)}{\|u\|_2} = \frac{x^2-3}{\sqrt{\frac{108}{5}}} = \sqrt{\frac{5}{108}}\,(x^2-3)$.

Då gäller $(\phi_1,\phi_1)=1$ och $(\phi_1,\phi_0)=0$.
Vidare erhålls:

$$(f,\phi_0)=\frac{1}{\sqrt3}(e^3-1), \quad (f,\phi_1)=\frac{(1+2e^3)}{6}\cdot\sqrt{\frac53}.$$

Med stöd av sats 9.4.2 gäller då:

$$p^*(x) = \frac{1}{\sqrt3}(e^3-1)\cdot\frac{1}{\sqrt3} + \frac{(1+2e^3)}{6}\sqrt{\frac53}\left(\sqrt{\frac{5}{108}}(x^2-3)\right)$$

$$\approx 0{,}643641 + 1{,}90607\,x^2.$$

Ex A_i, $(i+1)$-dimensionellt lin. underrum av B = eukl. rum, $A_0\subset A_1\subset A_2\subset\dots$ (t.ex. $P_0\subset P_1\subset P_2\dots$)
Antag att $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_i\}$ är en ortogonalbas för A_i. Låt $f\in B$. Då kan vi konstruera $p_i^*\in A_i$ genom

$$p_i^*(x) = \sum_{j=0}^{i}\frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}\phi_j(x).$$

Vi önskar bestämma n så litet som möjligt så att givet $\varepsilon>0$: $\|f-p_n^*\|_{2,w}\leq\varepsilon$.

$$\|p_n^*\|_{2,w}^2 = \left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}\phi_j,\ \sum_{j=0}^{n}\frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}\phi_j\right) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(f,\phi_j)^2}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}$$

Enligt $(*)$ nu på sida 128 gäller: $\|f\|_{2,w}^2 = \|p_n^*\|_{2,w}^2 + \|f-p^*\|_{2,w}^2$

$\therefore$ Bestäm n så att:

$$\|p_n^*\|_{2,w}^2 = \sum_{j=0}^{n}\frac{(f,\phi_j)^2}{\|\phi_j\|_{2,w}^2} \geq \|f\|_{2,w}^2 - \varepsilon^2,$$

ty då gäller:

$$\|f-p_n^*\|_{2,w}^2 = \|f\|_{2,w}^2 - \|p_n^*\|_{2,w}^2 \leq \varepsilon^2$$

Anm: Exemplet gäller även i ett Hilbertrum B.

Man kan visa att i ett euklidiskt rum $\mathcal{B}$ gäller: $f \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ (ändligt eller ∞-dimensionellt) linjärt underrum av $\mathcal{B}$ med ortogonal basen $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$

$\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ ∞-dim.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(f, \phi_j)^2}{\|\phi_j\|_{2,w}^2} \leq \|f\|_{2,w}^2 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_j)^2}{\|\phi_j\|_{2,w}^2} \leq \|f\|_{2,w}^2 \end{cases}$$

Bessels olikheter

Om $\mathcal{B}$ är ett Hilbertrum och $\mathcal{A}$ är oändligt dimensionellt gäller:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_j)^2}{\|\phi_j\|_{2,w}^2} = \|f\|_{2,w}^2$$

Parsevals likhet.

Om Basen är ortonormala sP är

$$\frac{(f, \phi_j)^2}{\|\phi_j\|_{2,w}^2} = |c_j^*|^2 ,$$

då $p^*(x) = \sum_{j=0}^{(n,\infty)} c_j^* \phi_j(x)$.