7. Minimax approximation

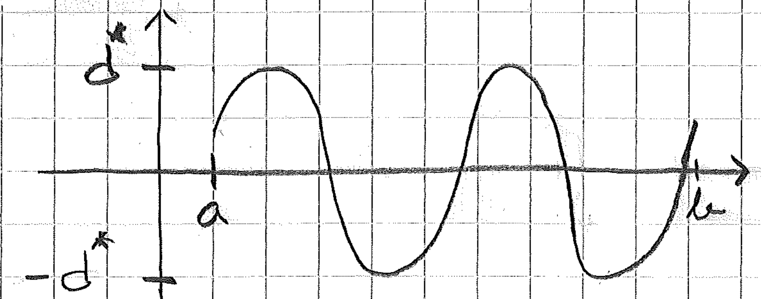
7.1 Inledning

Vi betraktar problemet att ur ett ändligt-dimensionellt linjärt underrum $\mathcal{A}$ av $C[a,b]$ hitta en bästa approximation $p^* \in \mathcal{A}$ till $f \in C[a,b]$ sådan att

$$\|f-p^*\|_\infty = \min_{p\in\mathcal{A}} \left(\max_{a\le x\le b} |f(x)-p(x)|\right).$$

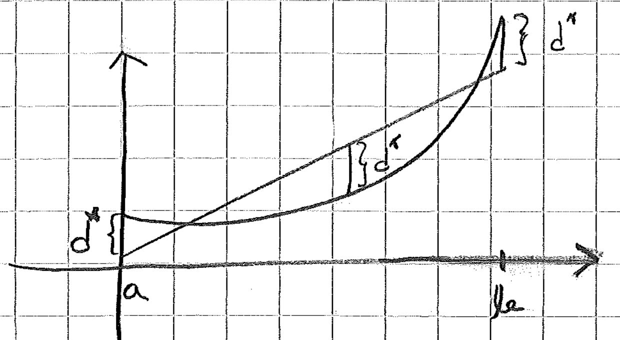
Av speciellt intresse är $\mathcal{A} = \mathcal{P}_n$, mängden av polynom av gradtal $\le n$. Men allmänt intresserar vi oss för ett linjärt underrum $\mathcal{A}$ med dimensionstalet $n+1$, som uppfyller Haars villkor. Då vet vi att den bästa approximationen är entydigt bestämd och karakteriseras av att felet $\|f-p^*\|_\infty = d^*$ antas i $n+2$ st. punkter med alternerande tecken för felfunktionen $e^*(x) = f(x)-p^*(x)$.

Ex



$$e^*(x) = f(x) - p_2^*(x) \quad ; \quad \begin{cases} f \in C[a,b] \\ p_2^* \in \mathcal{P}_2 . \end{cases}$$

Ex



För $p^* \in \mathcal{P}_1$ antas $|f(x)-p^*(x)| = d^*$ i 3 punkter.

7.2 Haars villkor

Definition: Låt $\mathcal{A}$ vara ett $(n+1)$-dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$. $\mathcal{A}$ uppfyller Haars villkor om antingen villkor (1), (3) eller (4) gäller. Man kan visa att (1), (3) och (4) är ekvivalenta villkor, och att villkor (2) följer av de övriga villkoren. Vanligen kontrollerar man villkor (1) för att verifiera att $\mathcal{A}$ uppfyller Haars villkor.

(1) Om antalet nollställen för ett element $a \in \mathcal{A}$ är större än n, så är a identiskt lika med noll, $a \equiv 0$.

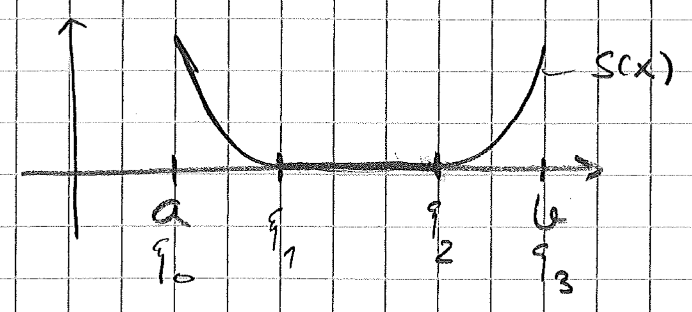
(2) Låt $\{\zeta_j ; j = 1,\dots,k\}$ vara en mängd av sinsemellan olika punkter i det öppna intervallet (a,b), $k \le n$. Då finns det en funktion $a \in \mathcal{A}$ som byter tecken i punkterna och som saknar andra nollställen i $[a,b]$. Dessutom finns det en funktion $a \in \mathcal{A}$ som saknar nollställen i $[a,b]$.

(3) Om $a \in \mathcal{A}$ inte är identiskt lika med noll och om a har j st. nollställen i $[a,b]$ av vilka k st. är inre punkter i $[a,b]$ i vilka teckenväxling inte sker, så gäller det att $j+k \le n$.

(4) Låt $\{\xi_j ; j = 0,\dots,n\}$ vara en mängd av punkter i $[a,b]$ och låt $\{\phi_i ; i = 0,\dots,n\}$ vara en bas i $\mathcal{A}$. Då är $(n+1)\times(n+1)$ matrisen $a_{ij} = \phi_i(\xi_j)$, $i = 0,\dots,n$, $j = 0,\dots,n$, icke-singulär, dvs. determinanten är olika noll.

Ex) Mängden P_n av polynom av gradtal $\leq n$ uppfyller Haars villkor, ty villkor (1) gäller. 89

Ex) Mängden $S(k, \xi_0, \dots, \xi_n)$, rifunktioner av ordning k, är ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$ av dimension $(n+k)$.
$S(k, \xi_0, \dots, \xi_n)$ uppfyller <u>inte</u> Haars villkor. Det är lätt att se att (1) inte gäller:



$$S(x) \in S(2, a, \xi_1, \xi_2, b),$$
$$S(x) = 0 \text{ i } [\xi_1, \xi_2].$$

7.3 Karakteriseringsteoremet.

I stället för att betrakta problemet att minimera
$$\|f - p\|_\infty, \quad p \in \mathcal{A}$$
på hela $[a,b]$ skall vi behandla det allmännare problemet att minimera uttrycket
$$\max_{x \in \mathcal{D}} |f(x) - p(x)|, \quad p \in \mathcal{A},$$
där $\mathcal{D}$ är en sluten delmängd av $[a,b]$.
$\mathcal{D}$ kan t. ex. vara hela $[a,b]$ eller en diskret punktmängd $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ i $[a,b]$.

Det intressanta i undersökningen är den punktmängd $\mathcal{D}_M \subseteq \mathcal{D}$ där maximet av beloppet av felfunktionen $|e(x)| = |f(x) - p(x)|$ antas.

90 **Sats 7.3.1.** Låt $\mathcal{A}$ vara ett linjärt underrum av $C[a,b]$ och låt $f \in C[a,b]$. $\mathcal{D}$ är en sluten delmängd av $[a,b]$. Låt $p^* \in \mathcal{A}$ och beteckna med $\mathcal{D}_M$ den delmängd av $\mathcal{D}$ där
$$|f(x) - p^*(x)|$$
antar sitt maximum då $x \in \mathcal{D}$.
Då är $p^* \in \mathcal{A}$ en approximant som minimerar uttrycket
$$\max_{x \in \mathcal{D}} |f(x) - p(x)|, \quad p \in \mathcal{A},$$
om och endast om det inte finns någon funktion $p \in \mathcal{A}$ sådan att
$$(f(x) - p^*(x)) \cdot p(x) > 0,$$
då $x \in \mathcal{D}_M$.

Bevis: (Vi använder indirekt bevis: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$).

Tag $p^* \in \mathcal{A}$ och låt $\mathcal{D}_M \subseteq \mathcal{D}$ vara den mängd där maximet
$$\max_{x \in \mathcal{D}} |e^*(x)| = \max_{x \in \mathcal{D}} |f(x) - p^*(x)|$$
antas.

1° $(\Leftarrow)$.

p^* är inte en bästa approximation
$\Rightarrow$
För $\theta > 0$ finns ett $p \neq 0$ i $\mathcal{A}$ sådant att $p^* + \theta p \in \mathcal{A}$ är en bästa approximation på $\mathcal{D}$.
$\Rightarrow$
$|f(x) - (p^* + \theta p)(x)| = |e^*(x) - \theta p(x)| < |e^*(x)|$, då $x \in \mathcal{D}_M$.
$\Rightarrow$
tecknet på $e^*(x)$ och $p(x)$ är lika då $x \in \mathcal{D}_M$. ($\theta > 0$ och $p(x) \neq 0$ då $x \in \mathcal{D}_M$).
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$
Det finns ett $p \in \mathcal{A}$ sådant att

$$e^*(x)p(x) = (f(x) - p^*(x))\,p(x) > 0$$

då $x \in \mathcal{D}_M$.

$\therefore$ Om det inte finns ett $p \in \mathcal{A}$ sådant att

$$(f(x) - p^*(x))\,p(x) > 0 \quad \text{då} \quad x \in \mathcal{D}_M$$

$$\Rightarrow \quad p^* \text{ minimerar } \max_{x\in\mathcal{D}} |f(x) - p(x)|, \; p \in \mathcal{A}.$$

$2°$ ($\Rightarrow$).
Antag att det finns ett $p \in \mathcal{A}$ sådant att

$$e^*(x)p(x) = (f(x) - p^*(x))\,p(x) > 0,$$

då $x \in \mathcal{D}_M$. Låt $\theta > 0$ och antag att $|p(x)| \le 1$, då $a \le x \le b$. Beteckna vidare med $\mathcal{D}_0$ den delmängd av $\mathcal{D}$ där $e^*(x)p(x) \le 0$. Då gäller:

$$d = \max_{x\in\mathcal{D}_0} |e^*(x)| < \max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)| = |e^*(x)|, \text{ då } x \in \mathcal{D}_M.$$

Om $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ så sätter vi $d = 0$. Vidare definierar vi:

$$\theta = \frac{1}{2}\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)| - \frac{d}{2}.$$

$\mathcal{D}$ är en sluten och begränsad mängd så vi kan bestämma ett ξ sådant att:

$$|e^*(\xi) - \theta p(\xi)| = \max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x) - \theta p(x)|$$

Nu delas beviset upp i två fall beroende på om $\xi \in \mathcal{D}_0$ eller inte.

Om $\xi \in \mathcal{D}_0$ är $e^*(\xi)$ och $p(\xi)$ av motsatt tecken. Vi erhåller då att

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x) - \theta p(x)| &= |e^*(\xi)| + \theta |p(\xi)| \\
&\le d + \theta \cdot 1 \\
&= d + \frac{1}{2}\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)| - \frac{d}{2} \\
&< 2\cdot\left(\frac{1}{2}\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)|\right) \\
&= \max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)|
\end{aligned}$$

$\therefore$ $p^* + \theta p$ är en bättre approximation än p^*.

Om $\xi \notin \mathcal{D}_0$ är $e^*(\xi)$ och $p(\xi)$ av samma tecken. Då erhålls:

$$|e^*(\xi) - \theta p(\xi)| < \max\{|e^*(\xi)|, |\theta p(\xi)|\}$$

Om maximet är $|e^*(\xi)|$ erhålls vi

$$\begin{aligned}
|e^*(\xi) - \theta p(\xi)| &= \max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x) - \theta p(x)| \\
&< |e^*(\xi)| \\
&\le \max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)|,
\end{aligned}$$

$\therefore$ $p^* + \theta p$ är en bättre approximation än p^*

Om maximet är $|\theta p(\xi)|$ erhåller vi

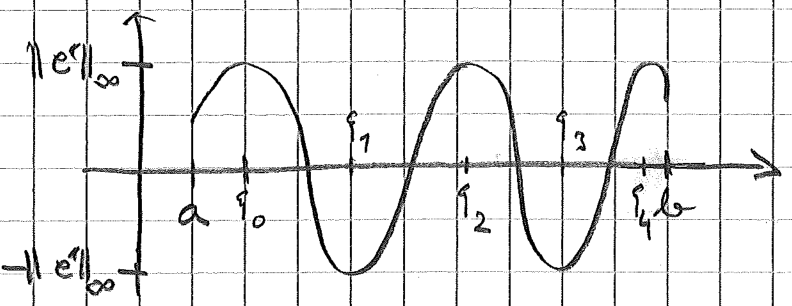
$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x) - \theta p(x)| &< \left(\frac{1}{2}\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)| - \frac{d}{2}\right)|p(\xi)| \\
&\le \frac{1}{2}\max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)| - \frac{d}{2} \\
&< \max_{x\in\mathcal{D}} |e^*(x)|.
\end{aligned}$$

$\therefore$ $p^* + \theta p$ är en bättre approximation än p^*.

$\therefore$ p^* är en bästa approximation $\Rightarrow$ det finns inget $p \in \mathcal{A}$ som uppfyller $(f(x) - p^*(x))p(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}_M$.

$\therefore$ Därmed är satsen bevisad $\square$.

Ex] Antag att $\mathcal{A} = \mathcal{P}_3$ och att $f \in C[a,b]$. (93)
Antag att $e^*(x) = f(x) - p^*(x)$, $p^* \in \mathcal{A}$, $\mathcal{S} = [a,b]$, har följande utseende:



Vi ser att $\mathcal{S}_M = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ och att $e^*(x)$ byter tecken 4 gånger i $\mathcal{S}_M$.
Men varje $p \in \mathcal{P}_3$ byter tecken högst 3 gånger i $[a,b]$.
Alltså har vi inget $p \in \mathcal{P}_3$: $(f(x)-p^*(x))p(x) > 0$ då $x \in \mathcal{S}_M$. Därmed är p^* en bästa approximation ur $\mathcal{P}_3$.
Om däremot $e^*(x)$ skulle byta tecken högst 3 gånger i $\mathcal{S}_M$ så kunde vi hitta $p \in \mathcal{P}_3$ sådant att $(f(x)-p^*(x))p(x) > 0$ då $x \in \mathcal{S}_M$, och då vore p^* inte en bästa approximation.

Sats 7.3.2: (Karakteriseringsteoremet). Låt $\mathcal{A}$ vara ett $(n+1)$-dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$. Antag att $\mathcal{A}$ uppfyller Haars villkor. Låt $f \in C[a,b]$. Då är p^* en bästa minimax-approximation till f ur $\mathcal{A}$ om och endast om det finns $(n+2)$ punkter $\{\xi_i^*;\ i = 0,..,n+1\}$ sådana att

$(*)$ $\quad a \leq \xi_0^* < \xi_1^* < \dots < \xi_{n+1}^* \leq b,$

$(**)$ $\quad |f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)| = \|f - p^*\|_\infty, \; i = 0,\dots,n+1$

och

$(***)$ $\quad f(\xi_{i+1}^*) - p^*(\xi_{i+1}^*) = -[f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)],$
$i = 0,1,\dots,n.$

(94) **Bevis:** Tag $f \in C[a,b]$ och låt $\mathcal{S} = [a,b]$ i sats 7.3.1.

1°] $(\Leftarrow)$. Antag att $(*)$, $(**)$ och $(***)$ gäller. och sätt $\mathcal{S}_M = \{\xi_0^*, \dots, \xi_{n+1}^*\}$.
Då byter $f(x) - p^*(x)$ tecken $n+1$ gånger i $\mathcal{S}_M$.
Men enligt Haars villkor (1) byter $p \in \mathcal{A}$ tecken högst n gånger i $[a,b]$.
Då finns det inget $p \in \mathcal{A}$ sådant att

$$(f(x) - p^*(x))p(x) > 0, \quad \text{då } x \in \mathcal{S}_M.$$

$\therefore$ p^* är en bästa minimax-approximation till f ur $\mathcal{A}$. (sats 7.3.1)

2°] $(\Rightarrow)$. Antag att p^* är en bästa minimax-approximation till f ur $\mathcal{A}$.
Antites. $\mathcal{S}_M$ består av högst $n+1$ punkter. Då byter $f(x) - p^*(x)$ tecken högst n gånger i $\mathcal{S}_M$ i punkterna som vi numrerar $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$, $m \leq n$. Enligt Haars villkor (2) kan vi då hitta m st. punkter ς_i, $i = 1,\dots,m$ sådana att:

$$\xi_0 < \varsigma_1 < \xi_1 < \varsigma_2 < \xi_2 < \dots < \varsigma_m < \xi_m,$$

och så att $p \in \mathcal{A}$ har nollställen endast i $\varsigma_1, \dots, \varsigma_m$ och byter tecken i dessa.
Då kan p väljas så att $(f(x) - p^*(x))p(x) > 0$ då $x \in \mathcal{S}_M$, vilket är en motsägelse.
$\therefore$ $\mathcal{S}_M$ består av minst $n+2$ punkter i vilka $e^*(x)$ måste byta tecken minst $n+1$ gånger.
Då kan vi hitta $n+2$ punkter $\xi_0^*, \dots, \xi_{n+1}^*$ som uppfyller $(*)$, $(**)$ och $(***)$.

Därmed är satsen bevisad.

Vi kan tillämpa karakteriseringsteoremet på Tjebysjevpolynomen och erhåller ett alternativt bevis för Minimax egenskapen (sats 4.4.2).

<u>Sats 7.3.3</u>: Betrakta P_n = mängden av polynom av gradtal $\leq n$ på intervallet $[-1,1]$. Polynomet $2^{1-n} T_n(x) \in P_n$ är det polynom med ledande koefficienten 1 i P_n som har den minsta L_∞-normen på $[-1,1]$.

<u>Bevis</u>: Problemet att hitta ett polynom i P_n med ledande koefficient 1 och minimal L_∞-norm kan formuleras som följer:
Sök $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ sådana att

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right|$$

minimeras. Vi söker alltså en bästa approximation ur P_{n-1} till x^n. Om nu

$$e(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = 2^{1-n} T_n(x)$$

så är $\|e(x)\|_\infty = 2^{1-n}$ och i punkterna

$$\xi_i = \cos\left(\frac{(n-i)\pi}{n}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

gäller att

$$e(\xi_i) = 2^{1-n} T_n(\xi_i) = (-1)^{n-i} \|e(x)\|_\infty, \quad i = 0, \dots, n.$$

Alltså antas maximifelet med alternerande tecken i $(n-1)+2 = n+1$ punkter.
Därmed är

$$2^{1-n} T_n(x)$$

det polynom av gradtal n med ledande koefficient 1 som har den minsta L_∞-normen på $[-1,1]$.

Orsaken till att vi i sats 7.3.1 betraktar en sluten delmängd $\mathcal{S}$ av $[a,b]$ är att den algoritm som vi presenterar i nästa kapitel jobbar med $n+2$ punkter i $[a,b]$.

<u>Definition</u>. Mängden $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+1}\}$ bestående av $n+2$ punkter i $[a,b]$ sådana att

$$a \leq \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+1} \leq b,$$

kallas en <u>**referens**</u>.

Följande sats är viktig för utbytesalgoritmen, som presenteras i nästa kapitel.

<u>Sats 7.3.4</u>: Låt $\mathcal{A}$ vara ett $(n+1)$-dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$. Antag att $\mathcal{A}$ uppfyller Haars villkor. Låt $\{\xi_0, \dots, \xi_{n+1}\}$ vara en referens i $[a,b]$ och låt $f \in C[a,b]$. Då är $p^* \in \mathcal{A}$ den funktion i $\mathcal{A}$ som minimerar uttrycket

$$(*) \qquad \max_{0 \leq i \leq n+1} |f(\xi_i) - p(\xi_i)|, \quad p \in \mathcal{A},$$

om och endast om

$$(**) \qquad f(\xi_{i+1}) - p^*(\xi_{i+1}) = -(f(\xi_i) - p^*(\xi_i))$$

gäller för $i = 0, 1, \dots, n$.

<u>Bevis</u>: Satsen följer av karakteriseringsteoremet om vi istället för $[a,b]$ betraktar $\mathcal{S} = \{\xi_0, \dots, \xi_{n+1}\}$ i sats 7.3.2.

Vi kan utnyttja ekvationerna $(**)$ för att beräkna $p^* \in \mathcal{A}$ som minimerar $(*)$.
Vi väljer en bas $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ för $\mathcal{A}$.
(För P_n kan vi välja $\{1, x, \dots, x^n\}$).

Då kan vi uttrycka $p^*(x)$ i formen

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \phi_j(x),$$

där $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ är $(n+1)$ st. reella tal som entydigt bestämmer $p^*(x)$. Om vi sätter

$$h = f(\xi_0) - p^*(\xi_0), \qquad (***)$$

så har vi $n+2$ obekanta, $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ och h. Ur $(**)$ och $(***)$ erhåller vi $(n+2)$ st. ekvationer

$$\boxed{f(\xi_i) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \phi_j(\xi_i) = (-1)^i h, \quad i = 0,1,\dots,n+1.}$$

Tack vare sats 7.3.4 vet vi att ekvationssystemet har en (entydig) lösning för varje $f \in C[a,b]$.

Vi har alltså löst problemet att hitta en bästa minimax-approximation $p^* \in \mathcal{U}$ på en mängd $\mathcal{S}$ som är en referens med $(n+2)$ punkter.

7.4 Entydighet och begränsningar för L_∞-felet

Sats 7.4.1: Låt $r \in C[a,b]$, och låt $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+1}\}$ vara en referens i $[a,b]$ sådan att

$$(-1)^i r(\xi_i) \geq 0, \quad i = 0,1,\dots,n+1,$$

gäller. Då har r minst $(n+1)$ st. nollställen i $[a,b]$, förutsatt att nollställen i (a,b), där r inte byter tecken, medräknas 2 gånger.

Bevis: Låt I och J vara mängderna

$$\begin{cases} I = \{i;\ r(\xi_i) \neq 0,\ i = 0,1,\dots,n+1\} \\ J = \{j;\ r(\xi_j) = 0,\ j = 0,1,\dots,n+1\}. \end{cases}$$

Vi inför beteckningarna:

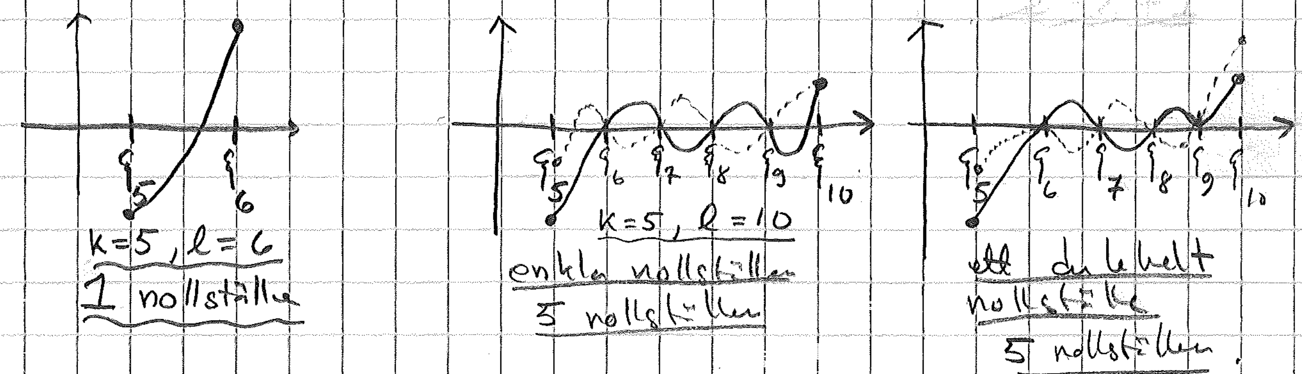
$$\begin{cases} n(I) = \text{antalet element i } I \\ n(J) = \quad \text{"} \quad J. \end{cases}$$

$$n(I) + n(J) = n+2.$$

Om $n(I) = 0$ eller $n(I) = 1$ gäller satsen, ty då har r minst $(n+2)$ respektive $(n+1)$ nollställen.

Antag att $n(I) \geq 2$. Välj k och l sådana att $k < l$, $k, l \in I$ och så att inget index mellan k och l tillhör I. Vi skall bestämma antalet nollställen i intervallet $[\xi_k, \xi_l]$. Eftersom $(-1)^k r(\xi_k) > 0$ och $(-1)^l r(\xi_l) > 0$, så har $r(\xi_k)$ och $r(\xi_l)$ samma tecken om $(l-k)$ är ett jämnt tal och olika tecken om $(l-k)$ är ett udda tal.

1° Om $(l-k)$ är udda gäller det att antalet nollställen i (ξ_k, ξ_l) är minst ett större än antalet punkter $\xi_i \in (\xi_k, \xi_l)$,



2° Om $(l-k)$ är jämnt ger en motsvarande undersökning att antalet nollställen i (ξ_k, ξ_l) är minst ett större än antalet punkter $\xi_i \in (\xi_k, \xi_l)$.

Av indexen i mängden I kan vi bilda $(n(I)-1)$ st. intervall av typen $[\xi_k, \xi_l]$.

Men då måste $r(x)$ ha minst $(n(J)+n(I)-1)$ stycken nollställen i $[a,b]$, dvs minst $(n+1)$ st. nollställen. □

Obs! Satsen gäller även om $(-1)^i r(\xi_i) \leq 0$ då $i = 0,1,\dots,n+1$.

Sats 7.4.2 (Entydigheten av p^*). Låt $\mathcal{A}$ vara ett $(n+1)$-dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$. Antag att $\mathcal{A}$ uppfyller Haars villkor och att $f \in C[a,b]$. Då är den bästa approximationen $p^* \in \mathcal{A}$ till f entydigt bestämd.

Bevis: Antag att det finns en referens $\{\xi_0^*, \ldots, \xi_{n+1}^*\}$ i $[a,b]$ sådan att

$$(*) \quad |f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)| = \|f - p^*\|_\infty, \quad i = 0, \ldots, n+1$$

och

$$(**) \quad f(\xi_{i+1}^*) - p^*(\xi_{i+1}^*) = -(f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)), \quad i = 0, \ldots, n+1,$$

där $p^* \in \mathcal{A}$. Då är p^* en bästa minimax-approximation till f ur $\mathcal{A}$. Antag att $g^* \in \mathcal{A}$, $g^* \neq p^*$, är en annan bästa approximation ur $\mathcal{A}$.

$$(***) \quad \|f - p^*\|_\infty = \|f - g^*\|_\infty .$$

Definiera $r^*(x) = (g^* - p^*)(x)$. $r^* \in \mathcal{A}$. Betrakta

$$r^*(\xi_i^*) = (f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)) - (f(\xi_i^*) - g^*(\xi_i^*)), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

På grund av ovanstående och $(*)$ och $(***)$ gäller då att antingen är $r^*(\xi_i^*) = 0$ eller så har $r^*(\xi_i^*)$ samma tecken som $(f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*))$. Detta resonemang gäller för alla $i = 0, \ldots, n+1$. Med beaktande av $(**)$ gäller då att

$$(-1)^i r^*(\xi_i^*) \geq 0, \quad i = 0, \ldots, n+1,$$

eller

$$(-1)^i r^*(\xi_i^*) \leq 0, \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

Med stöd av sats 7.4.1 och observationen efter satsen, måste det då gälla att $r^*(x)$ har minst $(n+1)$ st. nollställen i intervallet $[a,b]$, förutsatt att nollställen där ingen teckenväxling sker medtages två gånger. Men med stöd av Haars villkor (3) måste då $r^*(x) \equiv 0$. Alltså gäller det att

$$p^*(x) \equiv g^*(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Därmed är satsen bevisad.

Man kan visa att om $\mathcal{A}$ är ett ändligt-dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$ som *inte* uppfyller Haars villkor, så kan man alltid hitta funktioner $f \in C[a,b]$ sådana att den bästa minimax-approximationen ur $\mathcal{A}$ inte är entydigt bestämd.

Sats 7.4.3. Låt $\mathcal{A}$ vara ett $(n+1)$-dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$, som uppfyller Haars villkor. Låt $f \in C[a,b]$ och låt $p^* \in \mathcal{A}$, (p^* inte nödvändigtvis en bästa approximation). Låt $\{\xi_0, \ldots, \xi_{n+1}\}$ vara en referens sådan att

$$(*) \quad \operatorname{sgn}[f(\xi_{i+1}) - p^*(\xi_{i+1})] = -\operatorname{sgn}[f(\xi_i) - p^*(\xi_i)], \quad i = 0, \ldots, n+1$$

gäller. Då gäller:

$$\min_{0 \leq i \leq n+1} |f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| \leq \min_{p \in \mathcal{A}} \max_{0 \leq i \leq n+1} |f(\xi_i) - p(\xi_i)|$$

$$(**) \quad \leq \min_{p \in \mathcal{A}} \|f - p\|_\infty$$

$$\leq \|f - p^*\|_\infty .$$

<u>Bevis:</u> Den tredje olikheten i (**) gäller trivialt. Den andra olikheten i (**) gäller eftersom referensen $\{\xi_0,\dots,\xi_{n+1}\}$ är en delmängd av $[a,b]$.

För att visa den första olikheten i (**) antar vi som antites att det finns en funktion $q^* \in \mathcal{U}$ sådan att

$$(***)\qquad \min_{0\le i\le n+1} |f(\xi_i)-p^*(\xi_i)| \ge \max_{0\le i\le n+1} |f(\xi_i)-q^*(\xi_i)|.$$

Om $q^*=p^*$ så kan likhet gälla i (***) i fall p^* är den bästa minimax-approximationen på referensen $\{\xi_0,\dots,\xi_{n+1}\}$.
Antag att $q^* \not\equiv p^*$. Låt $r^* = q^* - p^*$.
Men av (***) kan vi dra slutsatsen att

$$r^*(\xi_i) = (f(\xi_i)-p^*(\xi_i)) - (f(\xi_i)-q^*(\xi_i))$$

är antingen noll eller så har $r^*(\xi_i)$ samma tecken som $f(\xi_i)-p^*(\xi_i)$.
Då ger (*) att antingen gäller det att

$$(-1)^i r^*(\xi_i) \ge 0 \quad , \quad i=0,\dots,n+1$$

eller

$$(-1)^i r^*(\xi_i) \le 0 \quad , \quad i=0,\dots,n+1.$$

Då har r^* minst $(n+1)$ st. nollställen i $[a,b]$, (sats 7.4.1), och med stöd av Haars villkor (3) måste då $r^*(x)\equiv 0$ på $[a,b]$. Men då får vi att $p^*(x)\equiv q^*(x)$ på $[a,b]$, vilket är en motsägelse!
Alltså kan inte (***) gälla som sträng olikhet.
Därmed är satsen bevisad.

Ex Betrakta $f(x)=e^x$ på $[0,3]$.
Vi vill bestämma den bästa minimax-approximationen $p^*(x)\in\mathcal{P}_2$ på referensen $\{0,1,2,3\}$ i $[0,3]$.
Vi väljer basen $\{1,x,x^2\}$ och skriver

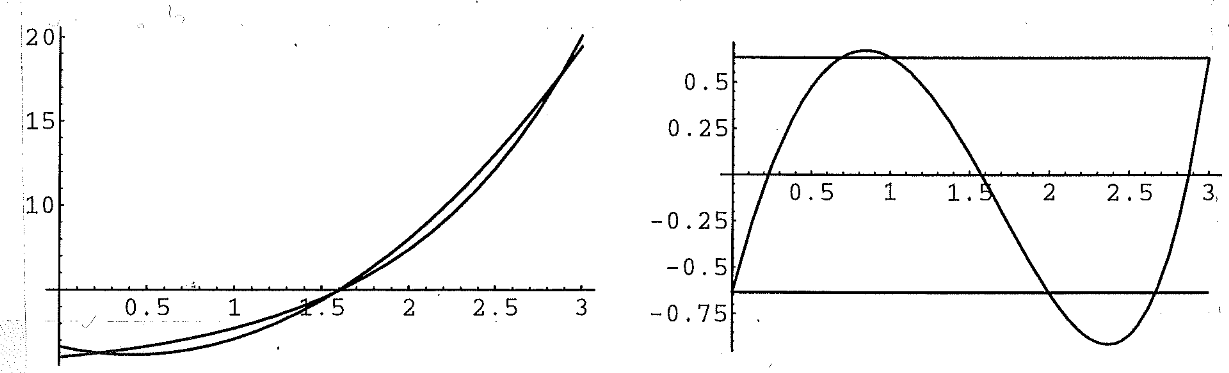
$$P_2^*(x) = a + bx + cx^2 , \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Enligt sats 7.3.4 och diskussionen efter beviset av satsen kan $P_2^*(x)$ bestämmas genom ekvationssystemet:

$$\begin{cases} e^0 - (a+b\cdot 0 + c\cdot 0^2) = h \\ e^1 - (a+b\cdot 1 + c\cdot 1^2) = -h \\ e^2 - (a+b\cdot 2 + c\cdot 2^2) = h \\ e^3 - (a+b\cdot 3 + c\cdot 3^2) = -h \end{cases}$$

<u>Lösningen är:</u> $\begin{cases} a \approx 1,63415 \\ b \approx -2,29457 \\ c \approx 2,74455 \\ h \approx -0,63415 \end{cases}$

Nedan ses $f(x)$ och $P_2^*(x)$ samt $e(x) = f(x) - P_2^*(x)$



$P_2^*(x)$ är inte den bästa minimax-approximationen på $[a,b]$.
Sats 7.4.3 ger olikheterna:

$$|h| = \min_{0\le i\le 3} |f(\xi_i) - P_2^*(\xi_i)| = 0,63415 \le \min_{p\in\mathcal{U}} \|f-p\|_\infty$$

$$\le \max_{0\le x\le 3} |(f-P_2^*)(x)| = \|f-P_2^*\|_\infty = 0,91452$$