6. Likformig konvergens vid approximation med polynom.

6.1 Weierstrass sats.

<u>Sats 6.1.1</u>: (Weierstrass) För varje $f \in C[a,b]$ och för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett algebraiskt polynom av formen

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n, \quad a \le x \le b,$$

sådant att $\|f - p\|_\infty \le \varepsilon$.

Teorin i detta kapitel ger ett konstruktivt bevis av satsen.

Kan ett dylikt polynom p alltid konstrueras med hjälp av Tjebysjev interpolation? <u>Svaret är nej!</u>

6.2 Monotona operatorer.

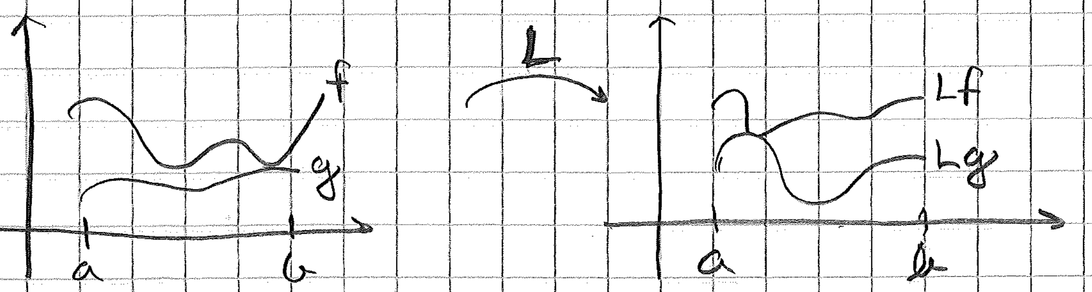
<u>Definition</u>: Låt $L : C[a,b] \to C[a,b]$ vara en operator. Låt $f, g \in C[a,b]$ uppfylla

$$f(x) \ge g(x), \quad a \le x \le b.$$

Om detta innebär att

$$(Lf)(x) \ge (Lg)(x), \quad a \le x \le b,$$

så är L en <u>monoton operator</u>.



<u>Sats</u>: Antag att $L : C[a,b] \to C[a,b]$ är en <u>linjär operator</u>. Då gäller:

$$L \text{ är monoton} \iff (f(x) \ge 0 \implies (Lf)(x) \ge 0).$$

<u>Bevis</u>: 1° Antag att L är monoton. Om $f(x) \ge 0$ så gäller det att:

$$\begin{aligned} f(x) \ge 0 &\implies (Lf)(x) \ge (L0)(x) \\ &\implies (Lf)(x) - (L0)(x) \ge 0 \\ &\implies (L(f-0))(x) \ge 0 \\ &\implies (Lf)(x) \ge 0. \end{aligned}$$

2° Antag att $f(x) \ge 0 \implies (Lf)(x) \ge 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \ge g(x) &\implies f(x) - g(x) \ge 0 \\ &\implies (L(f-g))(x) \ge 0 \\ &\implies (Lf)(x) - (Lg)(x) \ge 0 \\ &\implies (Lf)(x) \ge (Lg)(x). \end{aligned}$$

$\therefore$ <u>L är monoton.</u>

Nästa sats ger ett enkelt test för att avgöra om en följd $\{L_i f;\ i = 0,1,2,\dots\}$ av funktioner konvergerar likformigt mot f för alla $f \in C[a,b]$, då L_i, $i = 0,1,2,\dots$, är en följd av <u>monotona linjära operatorer</u>.

<u>Sats 6.2.1</u>: För en följd av <u>monotona linjära operatorer</u> $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ är följande villkor ekvivalenta:

(i) $\|f - L_n f\|_\infty \to 0$ för alla $f \in C[a,b]$.

(ii) $\|f - L_n f\|_\infty \to 0$ för $f(x) = 1, x, x^2$.

(iii) $\|1 - L_n 1\|_\infty \to 0$ och $\|(L_n \phi_t)(t)\|_\infty \to 0$ likformigt med avseende på t, där $\phi_t(x) = (t-x)^2$.

<u>Bevis</u>: Det är klart att (i) $\implies$ (ii).

Vi visar att (ii) $\Rightarrow$ (iii). Låt $f_i(x)=x^i$.

Det gäller att

$$\phi_t(x) = t^2 - 2tx + x^2 = t^2\cdot f_0(x) - 2t f_1(x) + f_2(x)$$

Alltså gäller det att

$$(L_n\phi_t)(x) = t^2(L_nf_0)(x) - 2t(L_nf_1)(x) + (L_nf_2)(x).$$

Vi kan således skriva:

$$(L_n\phi_t)(t) = t^2\left[(L_nf_0)(t)-1\right] - 2t\left[(L_nf_1)(t)-t\right]+\left[(L_nf_2)(t)-t^2\right]$$

$$\le t^2\|L_nf_0-f_0\|_\infty + |2t|\|L_nf_1-f_1\|_\infty + \|L_nf_2-f_2\|_\infty$$

t^2 och $|2t|$ är begränsade i intervallet $[a,b]$. För varje $\varepsilon>0$ finns ~~att~~ N sådant att $n>N$ medför att

$$|(L_n\phi_t)(t)| < \varepsilon \quad \text{för alla } t\in[a,b].$$

Det är också klart att $\|1-L_n1\|_\infty \to 0$.
Därmed gäller det att (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Vi visar slutligen att (iii) $\Rightarrow$ (i).
Låt $f\in C[a,b]$ och välj $\varepsilon>0$. Vi skall visa att för tillräckligt stora n gäller att $\|L_nf-f\|_\infty < 3\varepsilon$.
f är likformigt kontinuerlig så vi kan välja ett $\delta>0$ så att

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad x,y\in[a,b].$$

Fixera ett godtyckligt valt $t\in[a,b]$.
Sätt:

$$\alpha = \frac{2\cdot\|f\|_\infty}{\delta^2}$$

Om $|t-x|<\delta$ så är $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$.

 Är däremot $|t-x|\ge\delta$ så gäller det att

$$|f(t)-f(x)| \le 2\|f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty\frac{(t-x)^2}{\delta^2} = \alpha\,\phi_t(x).$$

Då gäller det för alla x att:

$$-(\varepsilon+\alpha\,\phi_t(x)) \le f(t)-f(x) \le \varepsilon+\alpha\,\phi_t(x)$$

Eftersom $f_0(x)=1$ får vi

$$-(\varepsilon\cdot f_0(x)+\alpha\,\phi_t(x)) \le f(t)\cdot f_0(x) - f(x) \le \varepsilon\cdot f_0(x)+\alpha\,\phi_t(x)$$

L_n är en linjär och monoton operator för varje n. Då gäller speciellt för $x=t$:

$$-\varepsilon(L_nf_0)(t) - \alpha(L_n\phi_t)(t) \le f(t)(L_nf_0)(t)-(L_nf)(t) \le \varepsilon(L_nf_0)(t)+\alpha(L_n\phi_t)(t)$$

Vilket ger att:

$$|f(t)(L_nf_0)(t)-(L_nf)(t)| \le \varepsilon\|L_nf_0\|_\infty + \alpha(L_n\phi_t)(t).$$

Då får vi:

$$|f(t)-(L_nf)(t)| \le |f(t)-f(t)(L_nf_0)(t)| + |f(t)(L_nf_0)(t)-(L_nf)(t)|$$

$$\le |f(t)||1-(L_nf_0)(t)| + \varepsilon\|L_nf_0\|_\infty + \alpha(L_n\phi_t)(t)$$

$$\le \|f\|_\infty\|1-L_n1\|_\infty + \varepsilon(1+\|1-L_n1\|_\infty) + \alpha(L_n\phi_t)(t)$$

Vi väljer N så stort att $n\ge N$ medför att $(\|f\|_\infty+\varepsilon)\|1-L_n1\|_\infty<\varepsilon$ och $\alpha(L_n\phi_t)(t)<\varepsilon$ för alla $t\in[a,b]$. (Låta sig göras likformigt i t då $\|(L_n\phi_t)(t)\|_\infty\to 0$.)

$\therefore$ $|f(t)-(L_nf)(t)| \le 3\varepsilon$,

och detta gäller för alla $t\in[a,b]$. (iii) $\Rightarrow$ (i) □

Satsen är bevisad.

6.3 Bernsteins operator

Definition: Bernstein operatorn $B_n : C[a,b] \to P_n$, där P_n är mängden av polynom av gradtal $\leq n$ på $[a,b]$, är definierad för $n = 1, 2, 3, \ldots$. I intervallet $[0,1]$ ges $B_n f$ av

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

I fortsättningen antar vi att B_n är definierad på $[0,1]$.

Sats: $B_n f$ på $[0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$, är en monoton och linjär operator.

Bevis: $\boxed{1^\circ}$ tag $f, g \in C[a,b]$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(B_n(\alpha f + \beta g))(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \alpha (B_n f)(x) + \beta (B_n g)(x).$$

$\therefore$ B_n är en linjär operator.

$\boxed{2^\circ}$ Antag att $f(x) \geq 0$ då $0 \leq x \leq 1$. Då är det klart från definitionen av B_n att

$$(B_n f)(x) \geq 0 \quad \text{då} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Men enligt en sats i föregående avsnitt är då B_n en monoton operator. □

Vi kan tydligen tillämpa sats 6.2.1 på $B_n f$ i intervallet $[0,1]$. Vi kan notera att B_n inte är en projektion, ett faktum som blir uppenbart i beviset av nästa sats.

Sats 6.3.1: Låt $f \in C[0,1]$. Följden av polynom $\{B_n f, n = 1, 2, \ldots\}$ konvergerar likformigt mot f, dvs. $\|B_n f - f\|_\infty \to 0$, då $n \to \infty$.

Bevis: $\{B_n, n = 1, 2, \ldots\}$ är en följd av monotona linjära operatorer från $C[0,1]$ till P_n. Vi tillämpar sats 6.2.1 (ii).

$\boxed{1^\circ}$ Vi låter $f(x) = 1$.

$$(B_n 1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot 1$$

$$= (x + (1-x))^n = 1^n = 1 \quad \forall n$$

$\therefore$ $\|B_n 1 - 1\|_\infty = 0$ för alla $n = 1, 2, \ldots$.

$\boxed{2^\circ}$ Vi låter $f(x) = x$.

$$(B_n x)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{k}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x (x + (1-x))^{n-1}$$

$$= x.$$

$\therefore$ $\|B_n x - x\|_\infty = 0$ för alla $n = 1, 2, \ldots$.

$\boxed{3^\circ}$ Vi låter $f(x) = x^2$.

$$(B_n x^2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{k^2}{n^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}}_{x}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!} x^k (1-x)^{n-k-2}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2 \left(x + (1-x)\right)^{n-2}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2 .$$

Vi ser att B_n <u>inte är en projektion</u> och att

$$\|B_n x^2 - x^2\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2 - x^2 \right| \to 0, \quad \text{då } n \to \infty .$$

Med stöd av sats 6.2.1 drar vi då slutsatsen att

$$\|B_n f - f\|_\infty \to 0, \quad \text{då } n \to \infty \text{ för alla } f \in C[0,1].$$

Vi har alltså bevisat Weierstrass sats, Sats 6.1.1 i fallet $C[a,b] = C[0,1]$.

Om $f \in C[a,b]$ så betraktar vi funktionen

$$g(y) = f(a + (b-a)y).$$

$g \in C[0,1]$ då $0 \le y \le 1$. För $\varepsilon > 0$ kan vi bestämma ett polynom $r(y)$ sådant att

$$\|g - r\|_\infty < \varepsilon \quad \text{på } [0,1].$$

Men då gäller:

$$\left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - r\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad \text{då } a \le x \le b$$

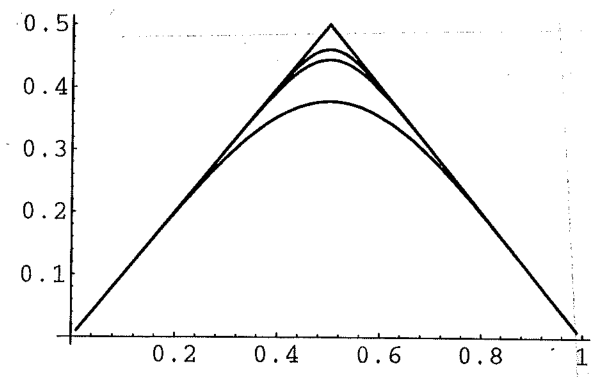
$$\iff \left| f(x) - r\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad \text{då } a \le x \le b.$$

Alltså kan vi välja $p(x) = r\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ för att erhålla $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$. Alltså gäller Weierstrass sats för ett godtyckligt intervall $[a,b]$.

<u>Tyvärr konvergerar följden $B_n f$ mycket långsamt mot f!</u>

$\boxed{\text{Ex}}$ Betrakta funktionen $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -x+1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$

Nedan har vi ritat ut $f(x)$, $B_{10}f$, $B_{50}f$ och $B_{100}f$ i intervallet $[0,1]$.



$\boxed{\text{Ex}}$ $\|B_n x^2 - x^2\|_\infty < 10^{-4} \Rightarrow n \ge 2500$.

6.4 Derivatorna av Bernsteinpolynom.

Man kan visa att om $f \in C^m[0,1]$ så gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} \|(B_n f)^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Vi har samtidig likformig approximation av f och dess kontinuerliga derivator.
Vi visar detta i fallet $m = 1$.

Sats 6.4.1: Låt $f \in C^1[0,1]$. Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \|f' - (B_n f)'\|_\infty = 0,$$

där B_n är Bernsteinoperatorn.

Bevis: Enligt sats 6.3.1 gäller för tillräckligt stora n att

$$\|f' - B_n f'\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eftersom

$$\|f' - (B_{n+1} f)'\|_\infty \le \|f' - B_n f'\|_\infty + \|B_n f' - (B_{n+1} f)'\|_\infty$$

bör vi visa att $\lim_{n\to\infty} \|B_n f' - (B_{n+1} f)'\|_\infty = 0$.

$$(B_{n+1} f)'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n+1}{k} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k)\binom{n+1}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)$$

Om vi nu beaktar att den dividerade differensen

$$f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right] = \frac{f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)}{\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1}} = (n+1)\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)$$

Så erhåller vi med stöd av sats 5.1.2 att:

$$(B_{n+1} f)'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f'(\xi_k),$$

där $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$, $k = 0, \dots, n$. Men då får vi att

$$|(B_n f')(x) - (B_{n+1} f)'(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'(\xi_k)\right]\right|$$

$$\le \max_{0 \le k \le n} \left|f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'(\xi_k)\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2},$$ för alla $x \in [0,1]$ om n är tillräckligt stort.

($\frac{k}{n}$ och ξ_k $\in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$)

$\therefore \|f' - (B_{n+1} f)'\|_\infty \le \varepsilon$ för tillräckligt stora n.

6.5 Fejér-Hermite operatorn

Definition: Om vi i Hermites interpolationsformel på sida 70 sätter $f'(x_k) = 0$ erhålls Fejér-Hermite operatorn H_n:

$$(H_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(1 - 2\ell_k'(x_k)\cdot(x - x_k)\right)\ell_k^2(x),$$

där $\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$.

$H_n f$ är ett polynom av gradtal $\le 2n+1$.

Om vi sätter $W(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$ så kan man

skriva

$$\begin{cases} l_k(x) = \dfrac{W(x)}{(x-x_k)W'(x_k)} \\ l_k'(x_k) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{W''(x_k)}{W'(x_k)} \end{cases}$$

Då erhålls uttrycket:

$$(*)\quad (H_nf)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(1 - \frac{(x-x_k)W''(x_k)}{W'(x_k)}\right)\left(\frac{W(x)}{(x-x_k)W'(x_k)}\right)^2$$

<u>Sats:</u> Tjebysjev polynomen $T_n(x)$ på intervallet $[-1,1]$ uppfyller differential ekvationen:

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

<u>Bevis:</u> lätt att verifiera för $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$.

<u>Sats 6.5.1:</u> (Fejér). Låt H_n vara Hermite-Fejér operatorn med x_k, $k=0,\dots,n$ valda till <u>Tjebysjev abskissorna</u>, dvs. nollställena för $T_{n+1}(x)$. För varje $f \in C[-1,1]$ gäller då att

$$\|H_nf - f\|_\infty \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

<u>Bevis:</u> Av föregående sats erhålls:

$$\begin{cases} (1-x_k^2)T_{n+1}''(x_k) = x_kT_{n+1}''(x_k) \\ \dfrac{T_{n+1}''(x_k)}{T_{n+1}'(x_k)} = \dfrac{x_k}{(1-x_k^2)} \end{cases},\ k=0,\dots,n.$$

Nu kan vi ersätta $W(x)$ med $2^{-n}\cdot T_{n+1}(x)$ i $(*)$, varvid de ledande koefficienterna tar ut varandra i täljaren och nämnaren.

 Därmed erhålls:

$$(H_nf)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(1 - \frac{(x-x_k)T_{n+1}''(x_k)}{T_{n+1}'(x_k)}\right)\frac{T_{n+1}^2(x)}{(x-x_k)^2(T_{n+1}'(x_k))^2}$$

$$= T_{n+1}^2(x)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(1 - \frac{(x-x_k)x_k}{1-x_k^2}\right)\cdot\frac{1}{(x-x_k)^2(T_{n+1}'(x_k))^2}$$

Det gäller även att:

$$T_{n+1}'(x) = \frac{d}{dx}\cos[(n+1)\arccos x]$$

$$= -\sin[(n+1)\arccos x]\cdot\frac{-(n+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(T_{n+1}'(x_k))^2 = \frac{(n+1)^2}{1-x_k^2}\left(\sin\left[(n+1)\arccos\left(\cos\left(\frac{(2(n-k)+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)\right]\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)^2}{1-x_k^2}\cdot\left(\sin\left[(2(n-k)+1)\frac{\pi}{2}\right]\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{1-x_k^2}.$$

Alltså får vi att:

$$(H_nf)(x) = T_{n+1}^2(x)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(1 - \frac{(x-x_k)x_k}{1-x_k^2}\right)\cdot\frac{1}{(x-x_k)^2\cdot\frac{(n+1)^2}{(1-x_k^2)}}$$

$$= \frac{T_{n+1}^2(x)}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot\frac{1-xx_k}{(x-x_k)^2} \qquad (**)$$

Vi ser att H_n i $(**)$ är <u>linjär</u>. Vidare är H_n <u>monoton</u>, ty $1-xx_k > 0$, så $f(x)\geq 0 \Rightarrow (H_nf)(x)\geq 0$. För $f(x)=1$ sammanfaller $(**)$ med Hermites-interpolationsformel, ty $f'(x_k)=0$. Alltså gäller då $(H_n1)(x) = 1$. Då kan vi tillämpa sats 6.2.1 (iii) om vi kan visa att $\|(H_n\phi_t)(t)\|_\infty \to 0$, (för alla t), $\phi_t(x) = (t-x)^2$

$$(H_n\phi_t)(t) = \frac{T_{n+1}^2(t)}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(t-x_k)^2\cdot\frac{1-tx_k}{(t-x_k)^2}$$

Summan är $< 2n+1$, ty $0 < 1 - t\cdot x_k < 2$

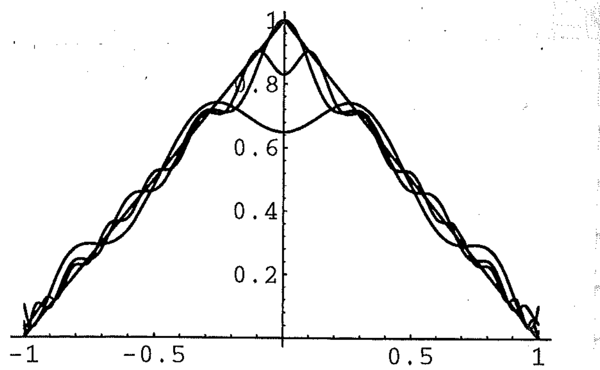
$$\therefore \|(H_n\phi_t)(t)\|_\infty \to 0 \text{ då } n\to\infty.$$

Då är satsen bevisad med stöd av sats 6.2.1.

Ex Vi betraktar approximationen med Fejér–Hermite polynom av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x+1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

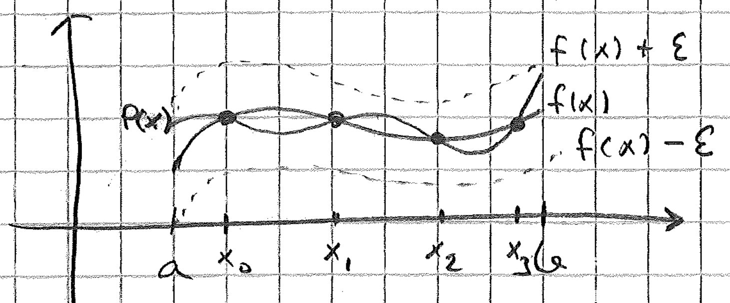
Nedan har vi plottat $f(x)$, $H_5(x)$, $H_{10}(x)$, $H_{15}(x)$.



6.6 Samtidig interpolation och L_∞-approximering

Givet $f \in C[a,b]$ och $\varepsilon > 0$. Tag $n+1$ st sinsemellan olika punkter $x_0, \dots, x_n$ i $[a,b]$. Kan vi hitta ett polynom $p \in C[a,b]$ sådant att

$$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ \|f - p\|_\infty \lesssim \varepsilon \end{cases} \quad ?$$



Sats 6.6.1. (Walsh). Låt $f \in C[a,b]$ och låt $x_0, \dots, x_n$ vara $n+1$ st. sinsemellan olika punkter i $[a,b]$. Välj $\varepsilon > 0$. Då finns det ett algebraiskt polynom $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$, sådant att

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

och

$$\|f - p\|_\infty \lesssim \varepsilon.$$

Bevis: Tag $\varepsilon > 0$. Enligt Weierstrass sats kan vi hitta ett polynom $P_1(x)$ sådant att $\|f - P_1\|_\infty \lesssim \dfrac{\varepsilon}{1 + \|L_n\|_\infty}$. Sätt

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - P_1(x_k))\, l_k(x)$$

där $$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$q(x) \in \mathcal{P}_n$ är det entydigt bestämda interpolationspolynomet som uppfyller

$$q(x_k) = f(x_k) - P_1(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Vidare gäller

$$\max_{a \le x \le b} |q(x)| = \max_{a \le x \le b} \left| \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - P_1(x_k))\, l_k(x) \right|$$

$$\lesssim \frac{\varepsilon}{1 + \|L_n\|_\infty} \cdot \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| = \frac{\varepsilon \|L_n\|_\infty}{1 + \|L_n\|_\infty}$$

Sätt $p(x) = P_1(x) + q(x)$. Då gäller

$$p(x_k) = P_1(x_k) + f(x_k) - P_1(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n,$$

och

$$\|f - p\|_\infty \le \|f - P_1\|_\infty + \|q\|_\infty$$

$$\lesssim \frac{\varepsilon}{1 + \|L_n\|_\infty} + \frac{\varepsilon \|L_n\|_\infty}{1 + \|L_n\|_\infty} = \varepsilon.$$

Därmed är satsen bevisad.