5. Dividerade differenser

5.1 Grundegenskaper.

Definition: Låt $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vara sinsemellan olika punkter i $[a,b]$ och låt $f \in C[a,b]$. Låt $p \in P_n$ uppfylla

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Koefficienten för x^n i $p(x)$ betecknas $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ och kallas en dividerad differens av ordning n.

$f[x_0]$ är en dividerad differens av ordning 0, och har definitionsmässigt värdet $f[x_0] = f(x_0)$.

Sats 5.1.1: Låt $x_0, \ldots, x_n$ vara sinsemellan olika punkter i $[a,b]$ och låt $f \in C[a,b]$. Låt $p \in P_n$ vara interpolationspolynomet till $f(x)$ i punkterna $x_0, \ldots, x_n$. För $n \geq 1$ gäller:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}.$$

Bevis: Med stöd av Lagranges interpolationsformel gäller:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)$$

Alltså är koefficienten för x^n i $p(x)$ given av

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$$

och satsen är bevisad.

Om f är kontinuerligt deriverbar kan dividerade differenser relateras till derivatan enligt följande sats:

Sats 5.1.2: Låt $f \in C^n[a,b]$ och låt $x_0, \ldots, x_n$ vara sinsemellan olika punkter i $[a,b]$. Då finns det en punkt ξ i det minsta intervall i $[a,b]$ som innehåller alla punkter $x_0, \ldots, x_n$ sådan att

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Bevis: Låt $p(x)$ vara interpolationspolynomet av gradtal $\leq n$ som interpolerar $f(x)$ i punkterna $x_0, \ldots, x_n$.
Sätt

$$e(x) = f(x) - p(x).$$

Då gäller det att $e \in C^n[a,b]$ och $e(x_i) = 0$ då $i = 0, 1, \ldots, n$.
Enligt Rolles sats har då $e'(x)$ minst n st. nollställen i det minsta intervall som innehåller $x_0, \ldots, x_n$. Upprepad användning av Rolles sats ger att $e^{(n)}(x)$ har minst ~~ett~~ nollställe i det minsta intervall som innehåller $x_0, \ldots, x_n$.
Alltså finns det ~~ett~~ ξ i intervallet så att:

$$e^{(n)}(\xi) = 0 \iff f^{(n)}(\xi) = p^{(n)}(\xi).$$

$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ är koefficienten för x^n i $p(x)$. Vidare gäller

$$p^{(n)}(x) = f[x_0, \ldots, x_n] \cdot n!,$$

och därmed: $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. $\square$

5.2 Rekursiv beräkning av dividerade differenser.

Sats 5.2.1: Den dividerade differensen $f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}]$ av ordning $(k+1)$ kan uttryckas med hjälp av de dividerade differenserna $f[x_j, \dots, x_{j+k}]$ och $f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}]$ av ordning k genom ekvationen

$$f[x_j, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, \dots, x_{j+k}]}{(x_{j+k+1} - x_j)}.$$

Bevis: Låt $q(x)$ vara polynomet av grad $\leq k$ sådant att $q(x_i) = f_i$, $i = j, \dots, j+k$. Ledande koefficienten för q är $f[x_j, \dots, x_{j+k}]$.

Låt $r(x)$ vara polynomet av grad $\leq k$ sådant att $r(x_i) = f_i$, $i = j+1, \dots, j+k+1$. Ledande koefficienten för r är $f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}]$.

Vi bildar polynomet $P(x)$ av grad $\leq k+1$ genom:

$$P(x) = \frac{(x - x_j) r(x) + (x_{j+k+1} - x) q(x)}{x_{j+k+1} - x_j} \qquad (*)$$

P uppfyller $P(x_j) = q(x_j) = f_j$ och $P(x_{j+k+1}) = r(x_{j+k+1}) = f_{j+k+1}$.

$j < i < j+k+1$:

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j) r(x_i) + (x_{j+k+1} - x_i) q(x_i)}{x_{j+k+1} - x_j} = \frac{(x_i - x_j) f_i + (x_{j+k+1} - x_i) f_i}{x_{j+k+1} - x_j} = f_i$$

P är interpolationspolynomet av gradtal $\leq k+1$ genom datapunkterna (x_i, f_i), $i = j, \dots, j+k+1$.

Ledande koefficienten för P är $f[x_j, \dots, x_{j+k+1}]$ och den är med stöd av $(*)$ av formen:

$$f[x_j, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, \dots, x_{j+k}]}{(x_{j+k+1} - x_j)}. \qquad \square$$

5.3 Newtons interpolationsformel.

Sats 5.3.1: Låt $P_k(x)$ interpolera $f(x)$ i $x_0, \dots, x_k$. Då är

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + f[x_0, \dots, x_{k+1}] \cdot \prod_{j=0}^{k} (x - x_j)$$

det polynom av gradtal $\leq k+1$ som interpolerar $f(x)$ i punkterna $x_0, \dots, x_{k+1}$.

Bevis: Låt P_{k+1} definieras som ovan. Låt $q(x)$ vara det polynom som interpolerar $f(x)$ i punkterna $x_0, \dots, x_{k+1}$. Då gäller:

$$q(x_i) - P_{k+1}(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Vidare är koefficienten för x^{k+1} lika i $q(x)$ och $P_{k+1}(x)$, och därmed är $q(x) - P_{k+1}(x)$ av gradtal $\leq k$. Men enligt ovanstående har $q(x) - P_{k+1}(x)$ minst $k+1$ st. nollställen. $\therefore$ $q(x) - P_{k+1}(x) \equiv 0$ och satsen är bevisad.

Av satsen följer att interpolationspolynomet $P_n(x)$ till $f(x)$ i punkterna $x_0, \dots, x_n$ kan skrivas:

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}}$$

Detta är Newtons interpolationsformel. Koefficienterna kan beräknas rekursivt med hjälp av sats 5.2.1.

69

Ex Bestäm interpolationspolynomet genom punkterna $\{(1,3), (2,5), (3,-2), (4,0)\}$.

x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}, \quad \text{o.s.v.}$$

1	3			
		2		
2	5		$-9/2$	
		-7		3
3	-2		$9/2$	
		2		
4	0			

$$\therefore P_3(x) = 3 + 2(x-1) - \frac{9}{2}(x-1)(x-2) + 3(x-1)(x-2)(x-3) = 3x^3 - \frac{45}{2}x^2 + \frac{97}{2}x - 26$$

5.4 Hermite-interpolation.

Antag att $f \in C^1[a,b]$ och att punkterna $x_0, \dots, x_n$ är från varandra skilda punkter i $[a,b]$. Problem: sök ett polynom P av gradtal $\leq 2n+1$, sådant att:

$$\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, n. \qquad (*)$$

Detta kallas oskulerande interpolation eller Hermite-interpolation.

Ansats:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} V_k(x) f'(x_k),$$

där $U_k(x)$ och $V_k(x)$ är av gradtal $2n+1$.

70

Villkoren $(*)$ är uppfyllda om för $0 \leq i, k \leq n$:

$$U_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad V_k(x_i) = 0$$
$$U_k'(x_i) = 0, \quad V_k'(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \qquad (**)$$

Vi har att $l_k(x_i) = l_k^2(x_i) = \delta_{ki}$, där $l_k(x)$ ges av:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}.$$

$l_k(x)$ är ett polynom av gradtal n. Vi ansätter:

$$\begin{cases} U_k(x) = (ax+b)\cdot l_k^2(x) \\ V_k(x) = (cx+d)\cdot l_k^2(x), \end{cases}$$

där a, b, c och d beror av k. Villkoren $(**)$ bör gälla:

$$U_k(x_k) = 1 \iff ax_k + b = 1$$
$$U_k'(x_k) = 0 \iff 2(ax_k+b)\, l_k(x_k)\cdot l_k'(x_k) + a l_k^2(x_k) = 0 \iff 2\cdot 1\cdot 1\, l_k'(x_k) + a\cdot 1 = 0$$

Vilket ger: $a = -2 l_k'(x_k)$ och $b = 1 + 2x_k l_k'(x_k)$

Vidare ger $(**)$ att:

$$V_k(x_k) = 0 \iff cx_k + d = 0$$
$$V_k'(x_k) = 1 \iff 2(cx_k+d)\, l_k(x_k)\cdot l_k'(x_k) + c\, l_k^2(x_k) = 1 \iff 2\cdot 0\cdot 1\cdot l_k'(x_k) + c\cdot 1 = 1$$

Vilket ger: $c = 1$ och $d = -x_k$. Alltså:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - 2l_k'(x_k)\cdot(x-x_k)\right) l_k^2(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} (x-x_k) l_k^2(x) f'(x_k).}$$

Detta är Hermites interpolationsformel.

Sats 5.4.1. Antag att $f \in C^{2n+2}[a,b]$ och att $x_0,\dots,x_n$ är sinsemellan olika punkter i $[a,b]$. Låt $P(x)$ vara Hermite-interpolationspolynomet av gradtal $\leq 2n+1$ i punkterna $x_0,\dots,x_n$. Då gäller:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left(\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right)^2$$

för något ξ i $[a,b]$. (ξ beror av x).

Bevis: Definiera $G(x)$ genom:

$$G(x) = f(x) - P(x) - \frac{f(\bar{x}) - P(\bar{x})}{\left(\prod_{j=0}^{n}(\bar{x}-x_j)\right)^2}\cdot\left(\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right)^2$$

där $\bar{x} \in [a,b]$ och $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0,\dots,n$.

$G(x) = 0$ i punkterna $\bar{x}, x_0,\dots,x_n$, dvs. i $n+2$ punkter. Enligt Rolles sats är $G'(x) = 0$ i minst $n+1$ st. punkter olika $\bar{x}, x_0,\dots,x_n$. Dessutom är $G'(x)=0$ i $x_0,\dots,x_n$, dvs. $G'(x) = 0$ i minst $2n+2$ st. punkter $G''(x) = 0$ i minst $2n+1$ st. punkter. Till sist fås att $G^{(2n+2)}(x) = 0$ i minst en punkt $\xi_{\bar{x}} \in [a,b]$. Alltså gäller:

$$G^{(2n+2)}(\xi_{\bar{x}}) = f^{(2n+2)}(\xi_{\bar{x}}) - \frac{f(\bar{x}) - P(\bar{x})}{\left(\prod_{j=0}^{n}(\bar{x}-x_j)\right)^2}\cdot(2n+2)! = 0$$

Alltså:

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_{\bar{x}})}{(2n+2)!}\left(\prod_{j=0}^{n}(\bar{x}-x_j)\right)^2.$$

Men $\bar{x} \in [a,b]$ var godtyckligt valt, och därmed är satsen bevisad.

Hermites interpolationspolynom $P(x)$ beräknas behändigast med hjälp av dividerade differenser. Man gör så här:

Antag att vi har sinsemellan olika punkter $x_0,\dots,x_n$ i intervallet $[a,b]$ och att $f \in C^1[a,b]$. Vidare känner vi till $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $i = 0,\dots,n$.

Vi skapar en ny följd av punkter $z_0, z_1,\dots,z_{2n+1}$ genom att sätta:

$$z_{2k+1} = z_{2k} = x_k, \quad k = 0,1,\dots,n.$$

Vi får följden $\{x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, x_n\}$.

Problem uppstår vid de dividerade differenserna av ordning 1, ty

$$f[z_{2k}, z_{2k+1}] \text{"="} \frac{f[x_k] - f[x_k]}{x_k - x_k}, \quad k = 0,1,\dots,n$$

men vi kan definiera:

$$f[z_{2k}, z_{2k+1}] = \lim_{\bar{x}\to x_k} \frac{f[x_k] - f[\bar{x}]}{x_k - \bar{x}} = f'(x_k),$$

vilket är i överensstämmelse med sats 5.1.2.

Ex Antag att $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(2) = 1$, $f'(2) = -1$

0	0			
		$1 = f'(0)$		
0	0		$\frac{\frac{1}{2}-1}{2-0} = -\frac{1}{4}$	
		$\frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$		$\frac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2-0} = -\frac{1}{4}$
2	1		$\frac{-1-\frac{1}{2}}{2-0} = -\frac{3}{4}$	
		$-1 = f'(2)$		
2	1			

$\therefore$ $P(x) = 0 + 1\cdot(x-0) - \frac{1}{4}(x-0)(x-0) - \frac{1}{4}(x-0)(x-0)(x-2)$
$= x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4}$

$P(0) = 0$, $P(2) = 1$ ✓

$P'(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}x^2$

$P'(0) = 1$, $P'(2) = 1 + 1 - 3 = -1$ ✓