4. Interpolation med polynom.

4.1 Existens och entydighet.

Problem: Givet $n+1$ st funktionsvärden $f_i = f(x_i)$, $i=0,\dots,n$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, hitta ett polynom av så lågt gradtal som möjligt som överensstämmer exakt med funktionsvärdena f_i i punkterna x_i, $i=0,\dots,n$.

Sats 4.1.1: Låt $x_0, x_1, \dots, x_n$ vara godtyckliga från varandra skilda punkter. Till godtyckliga värden $f_0, f_1, \dots, f_n$ finns ett entydigt bestämt polynom P av gradtal $\leq n$, sådant att

$$P(x_i) = f_i \,, \quad i = 0, \dots, n.$$

Bevis: Existensen. För $n=1$ duger polynomet

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

ty $P_1(x_0) = f_0$, $P_1(x_1) = f_1$ och P_1 är ett polynom av gradtal ≤ 1.

Gör induktionsantagandet att $P_{k-1}(x)$ är ett polynom av gradtal $\leq k-1$ sådant att

$$P_{k-1}(x_i) = f_i \,, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Sätt

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + C(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})$$

$P_k(x)$ är av gradtal $\leq k$ och $P_k(x_i) = f_i$ då $i = 0, \dots, k-1$.

Eftersom $x_0, \dots, x_k$ är sinsemellan olika kan vi sätta konstanten C till

$$C = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k - x_{k-1})}$$

Då gäller att $P_k(x_k) = f_k$. Vi har då att $P_k(x)$ är av gradtal $\leq k$, och $P_k(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, k$.
Genom fullständig induktion är existensen bevisad.

Entydigheten. Antag att $P(x)$ och $Q(x)$ är olika polynom av gradtal $\leq n$, sådana att $P(x_i) = Q(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$.
Då är $R(x) = P(x) - Q(x)$ ett polynom av gradtal $\leq n$ med minst $n+1$ st nollställen. Detta betyder att $R(x) \equiv 0$.
Alltså har vi att $P(x) \equiv Q(x)$, och entydigheten är därmed ådagalagd.

4.2 Lagranges interpolationsformel och Lagranges interpolationsoperator

Ex: Andragradspolynomet $P_2(x)$ genom (x_0, f_0), (x_1, f_1) och (x_2, f_2) kan uttryckas som:

$$P_2(x) = f_0 \cdot \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{l_0(x)} + f_1 \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}_{l_1(x)} + f_2 \cdot \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{l_2(x)}$$

Sats 4.2.1: Interpolationspolynomet $P_n(x)$, som uppfyller $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, kan skrivas på formen

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, l_k(x),$$

där

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

Bevis: $\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$.

$\therefore P_n(x_i) = f_i$, $i = 0,\dots,n$, vilket entydigt bestämmer interpolationspolynomet.

Vi noterar att funktionerna $\ell_k(x)$ enbart beror av $x_0,\dots,x_n$ och inte av $f_0,\dots,f_n$. För en fix indelning $x_0,\dots,x_n$ av sinsemellan olika punkter kan vi då betrakta $\{\ell_0(x),\dots,\ell_n(x)\}$ som en bas för interpolationspolynomen av gradtal $\leq n$ i punkterna $x_0,\dots,x_n$.

Sats 4.2.2. Låt $x_0,\dots,x_n$ vara sinsemellan olika punkter i $[a,b]$. Funktionerna $\ell_k(x)$ uppfyller följande egenskaper:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^i \ell_k(x) = x^i$, $0 \leq i \leq n$, $a \leq x \leq b$,

b) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)} = \delta_{in} = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}.$$

Bevis: Sätt $f(x) = x^i$, $0 \leq i \leq n$, då är interpolationspolynomet $P_n(x) = f(x)$, och vi får

$$x^i = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k^i \ell_k(x).$$

Alltså gäller a). Speciellt för $i = 0$ erhålls

$$\sum_{k=0}^{n} \ell_k(x) = 1, \quad a \leq x \leq b.$$

Ur a) fås att

$$x^i = \sum_{k=0}^{n} x_k^i \ell_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k^i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x - x_j), \quad i = 0,\dots,n.$$

Eftersom koefficienten för x^n är noll då $i < n$ och ett då $i = n$ erhålls b).

Ex Antag att funktionsvärdena $\{f_i = f(x_i), i = 0,\dots,n\}$ interpoleras exakt av interpolationspolynomet $P_n(x)$ i intervallet $[a,b]$.

Om vi inte kan uppmäta funktionsvärdena exakt utan erhåller mätvärden $\{\tilde{f}_i = f(x_i) + \varepsilon_i,\ i = 0,\dots,n\}$ och interpolerar dessa med polynomet $\tilde{P}_n(x)$, så kan felet $\tilde{P}_n(x) - P_n(x)$ i $[a,b]$ uttryckas genom:

$$\tilde{P}_n(x) - P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(f(x_k) + \varepsilon_k)\ell_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \ell_k(x).$$

Om vi betraktar $f \in C[a,b]$ så vet vi att det finns ett unikt polynom av gradtal $\leq n$ "som f avbildas på" av Lagranges interpolationsformel, då $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$. Vi definierar:

Definition: Låt $x_0,\dots,x_n$ vara sinsemellan olika punkter i $[a,b]$. Då kan vi definiera en approximationsoperator $L_n : C[a,b] \to P_n$ kallad Lagranges interpolationsoperator genom:

$$L_n(f) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \ell_k(x),$$

för varje $f \in C[a,b]$.

(57)

Det är klart att L_n är en projektion, ty det entydiga interpolationspolynomet till $P_n(x) = L_n(f)$ är $P_n(x)$, dvs. $\forall p \in \mathcal{P}_n$ gäller
$$L_n(p) = p.$$

L_n är också linjär ty för $f, g \in C[a,b]$:
$$\begin{aligned}L_n(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=0}^{n} (\alpha f(x_k) + \beta g(x_k))\, \ell_k(x) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\ell_k(x) + \beta \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\,\ell_k(x) \\ &= \alpha L_n(f) + \beta L_n(g).\end{aligned}$$

Sats 4.2.3 Betrakta $C[a,b]$ med L_∞-normen och låt $L_n : C[a,b] \to \mathcal{P}_n$ vara Lagranges interpolationsoperator. Antag att $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ är sinsemellan olika. Då gäller
$$\|L_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|.$$

Bevis:
$$\begin{aligned}\|L_n\|_\infty &= \sup_{\|f\|_\infty = 1} \max_{a \le x \le b} \left| \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\ell_k(x) \right| \\ &\le \sup_{\|f\|_\infty = 1} \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |f(x_k)|\,|\ell_k(x)| \\ &\le \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|.\end{aligned}$$

$$\exists\, x^* \in [a,b] : \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)| = \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x^*)|.$$

Välj $f \in C[a,b]$ så att $\|f\|_\infty = 1$ och
$$f(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{om } \ell_k(x^*) \ge 0 \\ -1, & \text{om } \ell_k(x^*) < 0 \end{cases}$$

(58)

Då erhålls:
$$\begin{aligned}\Big| \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f(x_k)\,\ell_k(x^*)}_{\ge 0\ \forall k} \Big| &= \sum_{k=0}^{n} |f(x_k)\,\ell_k(x^*)| \\ &= \sum_{k=0}^{n} |f(x_k)|\,|\ell_k(x^*)| \\ &= \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x^*)| \\ &= \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \|L_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)| \qquad \square.$$

Ex Enligt sats 3.1.1 gäller då för den linjära projektionen $L_n(f)$ att
$$\begin{aligned}\|f - L_n(f)\|_\infty = \|f - P_n\|_\infty &\le (1 + \|L_n\|_\infty)\,\|f - P_n^*\|_\infty \\ &= \left(1 + \max_{a \le x \le b} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|\right) \|f - P_n^*\|_\infty\end{aligned}$$
där $\|f - P_n^*\|_\infty = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty$.

Det är tydligen fördelaktigt att välja punkterna $x_0, x_1, \ldots, x_n$ så att $\|L_n\|_\infty$ minimeras.

4.3 Felet vid polynomiell interpolation.

Definition: Vi använder beteckningen $e(x)$ för felfunktionen vid approximation. I detta kapitel må $p \in \mathcal{P}_n$ uppfylla interpolationsvillkoren. Då ges $e(x)$ av
$$e(x) = f(x) - p(x), \quad a \le x \le b,$$
där $f \in C[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$.

Vi kan då uppskriva följande sats.

Sats 4.3.1: Låt $f \in C^{n+1}[a,b]$ och låt $x_0, x_1, \dots, x_n$ vara sinsemellan olika punkter i $[a,b]$. Om P_n är det entydigt bestämda polynom av gradtal $\leq n$ som uppfyller

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\dots,n,$$

så gäller:

$$e(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

för något $\xi \in [a,b]$. (ξ beror av x).

Bevis: Rolles sats: Om en funktion g är kontinuerlig i $[a,b]$ och har kontinuerlig derivata i (a,b), och om $g(a) = g(b) = 0$, så finns det minst en punkt η i (a,b) sådan att $g'(\eta) = 0$.

Vi väljer $\bar{x} \in [a,b]$, $\bar{x} \neq x_0, \dots, x_n$.
För någon konstant R gäller

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = R\,(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\cdot\ldots\cdot(\bar{x}-x_n).$$

Vi inför $G(x)$ genom

$$G(x) = f(x) - P_n(x) - R\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$
$$= e(x) - R\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Då gäller tydligen att

$$G(x) = 0$$

då $x = \bar{x}, x_0, x_1, \dots, x_n$.

$G(x) \in C^{n+1}[a,b]$ och har minst $n+2$ st. nollställen i $[a,b]$. I varje intervall mellan två nollställen till $G(x)$ finns enligt Rolles sats minst ett nollställe för $G'(x)$.

$G'(x)$ har minst $n+1$ st. nollställen i $[a,b]$.

Upprepad användning av Rolles sats ger då att $G^{(n+1)}(x)$ har minst ett nollställe i $[a,b]$.

$$\therefore \; \exists\, \xi_{\bar{x}} \in [a,b] : \; G^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}}) = 0$$

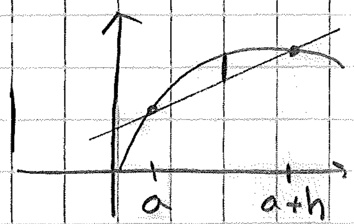
Derivering av $G(x)$ ger

$$G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)!\,R.$$

För $x = \xi_{\bar{x}}$ erhålls $\quad R = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}})}{(n+1)!}$.

$\bar{x}$ valdes godtyckligt i $[a,b]$. Satsen är bevisad.

Ex $f \in C^2[a, a+h] = I$. P_1 interpolationspolynomet genom $\{(a, f(a)), (a+h, f(a+h))\}$. Uppskatta det maximala felet $|e(x)|$ i $[a,b]$.



$$\max_{x\in I} |e(x)| \leq \frac{\max_{\xi\in I}|f^{(2)}(\xi)|}{2!} \max_{x\in I} |(x-a)(x-a-h)|$$

$g(x) = (x-a)(x-a-h)$, $g(a) = g(a+h) = 0$

$g'(x) = 2x - 2a - h$, $g'(x) = 0 \iff x = a + \frac{h}{2}$.

$$g\left(a+\tfrac{h}{2}\right) = -\frac{h^2}{4}$$

$$\therefore \; \max_{x\in I} |e(x)| = \|f - P_1\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \max_{x\in I} |f''(x)|$$

4.4 Tjebysjev interpolation.

Om vi har en funktion $f \in C^{n+1}[a,b]$ och om vi fritt kan välja interpolationspunkter $x_0, x_1, \dots, x_n$ så borde vi med stöd av sats 4.3.1 välja punkterna så att vi minimerar uttrycket

$$\max_{a \le x \le b} |(x-x_0)(x-x_1)\cdot \dots \cdot (x-x_n)|.$$

Vi skall studera problemet i intervallet $[-1,1]$. För heltaligt n och $\theta \in \mathbb{R}$ kan $\cos(n\theta)$ skrivas i formen

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\cos\theta)^k.$$

Definierar vi nu funktionen T_n genom

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),$$

så ser vi att för $-1 \le x \le 1$ gäller att

$$T_n(x) = \cos(n\cdot\arccos x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Alltså är T_n ett n:te grads polynom.

Definition: Tjebysjevpolynomet av ordning n definieras som:

$$T_n(x) = \cos(n\cdot\arccos x), \quad -1 \le x \le 1.$$

Vi ser att

$$T_0(x) = \cos(0\cdot\arccos x) = 1$$
$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Sats: Tjebysjevpolynomen ges rekursivt av:

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), & n \ge 1 \\ T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{cases}$$

Bevis: $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos[(n+1)\arccos x] + \cos[(n-1)\arccos x]$

$$= \cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin[n\arccos x]\sin(\arccos x) + \cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) + \sin[n\arccos x]\sin(\arccos x)$$
$$= 2x\cos(n\arccos x) = 2x\,T_n(x) \;\square.$$

Sats: Koefficienten för x^n, (ledande koefficienten), för $T_n(x)$ är 2^{n-1}, då $n \ge 1$.

Bevis: Följer direkt av föregående sats.

Sats 4.4.1: $T_{n+1}(x)$ har $n+1$ st. nollställen i intervallet $[-1,1]$, vilka ges av

$$x_i = \cos\left(\frac{[2(n-i)+1]\pi}{2(n+1)}\right), \quad i = 0,1,\dots,n.$$

Nollställena kallas för Tjebysjevabskissor.

Bevis: $T_{n+1}(x) = 0 \iff \cos((n+1)\arccos x) = 0$
$$\iff (n+1)\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$
$$\iff \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Den sista ekvationen är lösbar för $0 \le \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \le \pi$, vilket betyder att $0 \le k \le n$. Med $k = n-i$, då $i = 0,1,\dots,n$ fås satsens påstående.

Sats: $T_{n+1}(x)$ har $n+2$ st. extrempunkter i intervallet $[-1,1]$, vilka ges av

$$x'_k = \cos\left(\frac{k\cdot\pi}{n+1}\right), \quad k = 0,1,\dots,n+1,$$

och $T_{n+1}(x'_k) = (-1)^k$, $k = 0,\dots,n+1$.

Bevis: övn. uppg.

Sats 4.4.2. (Minimaxegenskapen). Av alla polynom av gradtal $n+1$ med ledande koefficienten 1, har $2^{-n}\cdot T_{n+1}(x)$ den minsta L_∞-normen på $[-1,1]$. $\|2^{-n}T_{n+1}(x)\|_\infty = 2^{-n}$.

Bevis: Enligt föregående sats gäller det att $\|T_{n+1}\|_\infty = 1$. Alltså gäller det att

$$\|2^{-n}T_{n+1}(x)\|_\infty = 2^{-n}.$$

Med stöd av en tidigare sats är $2^{-n}T_{n+1}(x)$ ett polynom av gradtal $n+1$ med ledande koefficienten $= 1$.

Antites: P är ett polynom av gradtal $n+1$ med ledande koefficienten $=1$ och $\|P\|_\infty < 2^{-n}$ på intervallet $[-1,1]$.

Vid extrempunkterna x_k', $k=0,\dots,n+1$, för $T_{n+1}(x)$ gäller då:

$$\begin{aligned} P(x_0') &< 2^{-n}T_{n+1}(x_0'), \quad (x_0' = 1)\\ P(x_1') &> 2^{-n}T_{n+1}(x_1')\\ P(x_2') &< 2^{-n}T_{n+1}(x_2')\\ &\vdots \end{aligned}$$

Polynomet $q(x) = P(x) - 2^{-n}T_{n+1}(x)$ har minst en rot i varje intervall (x'_{k+1}, x'_k), där $k=0,\dots,n$. Polynomet $q(x)$ har minst $n+1$ st. rötter i $[-1,1]$. Men gradtalet av q är högst n, ty både $P(x)$ och $T_{n+1}(x)$ har ledande koefficient 1. Då måste $q(x)\equiv 0$ och $P(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$ för varje $x\in[-1,1]$. Detta ger en motsägelse, och därmed är antitesen falsk och satsen bevisad.

För att minimera uttrycket

$$\max_{-1\le x\le 1} |(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)|$$

skall $x_0, x_1, \dots, x_n$ väljas till Tjebysjev-abskissor. Felet är då 2^{-n}.

För att erhålla Tjebysjevpolynom $\hat{T}_n(t)$ på intervallet $[a,b]$ görs variabelbytet

$$t = \varphi(x) = \tfrac{1}{2}(b+a) + \tfrac{1}{2}(b-a)x,$$

$$\hat{T}_n(t) = T_n(\varphi^{-1}(t))$$

Den ledande koefficienten för $\hat{T}_{n+1}(t)$ är: $\dfrac{2^{2n+1}}{(b-a)^{n+1}}$,

och Tjebysjevabskissorna t_i, $i=0,\dots,n$, på $[a,b]$ erhålls genom

$$t_i = \tfrac{1}{2}(b+a) + \tfrac{1}{2}(b-a)\cdot x_i, \quad i=0,\dots,n,$$

där x_i är Tjebysjevabskissorna på $[-1,1]$. Då gäller:

$$\max_{a\le t\le b} |(t-t_0)(t-t_1)\cdot\ldots\cdot(t-t_n)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Ex (Runges exempel). Betrakta $[-5,5]$ med $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Nedan till vänster har vi interpolerat ekvidistant med $n=4$, 6 och 8, och nere till höger i Tjebysjevabskissorna med $n = 4, 6, 8$.

n	$\|L_n\|_\infty$ vid ekvidistant intp.	$\|L_n\|_\infty$ Tjebysjev.
4	2,21	1,57
6	4,55	1,78
8	10,95	1,94