3. Approximationsoperatörer

(37)

3.1 Operatorer och operatornorm.

Definition: Låt E och F vara normerade vektorrum. En funktion $X : E \to F$ kallas en operator.
Om för varje $x, y \in E$ och varje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gäller att

$$X(\lambda x + \mu y) = \lambda X(x) + \mu X(y),$$

så är X en linjär operator.

Sats: För linjära operatorer gäller att kontinuitet i en punkt $x_0 \in E$ medför kontinuitet i hela E.

Bevis: Antag att $X : E \to F$ är kontinuerlig i $x_0 \in E$. Tag godtycklig punkt $y_0 \in E$. För varje $y \in E$ sätter vi

$$x = y - y_0 + x_0$$

Alltså har vi

$$x - x_0 = y - y_0$$

och därmed är

$$X(x) - X(x_0) = X(y) - X(y_0).$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|X(x) - X(x_0)\| < \varepsilon$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|y - y_0\| < \delta \Rightarrow \|X(y) - X(y_0)\| < \varepsilon$$

$\therefore$ X är kontinuerlig i y_0 och därmed i E. □

(38)

Definition: Den linjära operatorn $X : E \to F$ är begränsad, om det existerar en konstant M, sådan att

$$\|X(x)\| \leq M \|x\|$$

för varje $x \in E$.

Sats: En linjär operator $X : E \to F$ är begränsad om och endast om den är kontinuerlig.

Bevis: 1) Antag att X är begränsad och välj $\varepsilon > 0$. Då finns det en reell konstant M:

$$\therefore M\|x\| < \varepsilon \Rightarrow \|X(x)\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\|x - 0\| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \|X(x - 0)\| = \|X(x) - X(0)\| < \varepsilon$$

$\therefore$ X är kontinuerlig i $0 \in E$.
$\therefore$ X är kontinuerlig i hela E enligt föregående sats.

2) Antag att X är kontinuerlig.
Antites: X är inte begränsad.
Då kan vi konstruera en följd $\{x_n\}$ i E sådan att

$$\|X(x_n)\| > n \|x_n\|.$$

Sätt

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}.$$

$$\therefore \|y_n\| = \left\| \frac{x_n}{n\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \cdot \|x_n\| = \frac{1}{n}.$$

Alltså gäller det att $y_n \to 0$ då $n \to \infty$.
Vidare gäller för varje n att

$$\|X(y_n)\| = \left\| X\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right) \right\| = \frac{\|X(x_n)\|}{n\|x_n\|} > 1.$$

Å andra sidan är X kontinuerlig i 0. (39)

$\therefore \|y_n\| = \|y_n - 0\| < \delta \Rightarrow \|X(y_n) - X(0)\| = \|X(y_n - 0)\|$
$= \|X(y_n)\| < \varepsilon$.

Detta ger en motsägelse. $\therefore$ <u>X är begränsad</u> $\square$.

<u>Sats</u>: En <u>linjär operator</u> $X : E \to F$, där <u>E är ett ändligt dimensionellt normerat vektorrum</u> och F är ett <u>normerat vektorrum</u>, är alltid begränsad och kontinuerlig.

<u>Bevis</u>: Antag att E är n-dimensionellt och att $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ är en bas i E.
För godtyckligt $x \in E$ finns $\xi_1, .., \xi_n \in \mathbb{R}$:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + .. + \xi_n x_n.$$

Låt $\|\cdot\|$ vara den givna normen i E.
Vi definierar en annan norm $\|\cdot\|_0$ i E:

$$\|x\|_0 = |\xi_1| + |\xi_2| + .. + |\xi_n|.$$

Sätt $K = \max_{1 \le \nu \le n} \|X(x_\nu)\|$. Då gäller:

$$\|X(x)\| = \|X(\xi_1 x_1 + .. + \xi_n x_n)\|$$
$$= \|\xi_1 X(x_1) + .. + \xi_n X(x_n)\|$$
$$\le |\xi_1| \|X(x_1)\| + .. + |\xi_n| \|X(x_n)\|$$
$$\le (|\xi_1| + .. + |\xi_n|) K = K \cdot \|x\|_0$$

Operatorn X är begränsad med avseende på normen $\| \|_0$ i E. Men $\| \|$ och $\| \|_0$ i E är ekvivalenta, ty E är ändligt-dimensionellt. Det finns en reell konstant b:

$\therefore \quad \|x\|_0 \le b \|x\|$, för alla $x \in E$.

(40) Alltså får vi att

$$\|X(x)\| \le b \cdot K \|x\|, \quad \text{för alla } x \in E.$$

Därmed är X begränsad och kontinuerlig. $\square$.

<u>Ex</u> Låt X vara en linjär operator från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$. Då kan X alltid uttryckas med hjälp av en $(n \times m)$ matris $\overline{X}$,

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

Så att $y = X(x) = \overline{X} x$ ges av

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + .. + a_{1m} x_m \\ \vdots \\ y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nm} x_n \end{cases},$$

där $x = (x_1, .., x_m)$ och $y = (y_1, .., y_n)$.

Operatorn X är begränsad och kontinuerlig oberoende av vilka normer som används i $\mathbb{R}^m$ och $\mathbb{R}^n$.

<u>Definition</u>: Låt $\mathcal{B}$ vara ett normerat vektorrum och $\mathcal{A}$ en delmängd av approximanter i $\mathcal{B}$. En funktion $X : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ kallas en <u>approximationsoperator</u>.
X är en <u>linjär approximationsoperator</u> om $\forall x, y \in \mathcal{B}$ och $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gäller:

$$X(\lambda x + \mu y) = \lambda X(x) + \mu X(y).$$

X är en <u>projektion</u> om för varje $x \in \mathcal{B}$:

$$X(X(x)) = X(x).$$

Av definitionen framgår det att X är en projektion om

$$X(a) = a \quad \text{för alla } a \in \mathcal{A}.$$

Definition: Låt E, F och $\mathcal{B}$ vara normerade vektorrum och $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Antag att $X: E \to F$ eller $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Om X är obegränsad, dvs. det existerar ingen konstant M sådan att

$$\| X(x) \| \leq M \|x\| \quad , \quad \forall \, x \in E, (\mathcal{B}),$$

så säger vi att operatornormen $\|X\|$ är obegränsad, $\|X\| = \infty$.

Om X är begränsad, så låter vi $\mathcal{M}$ vara mängden av alla M sådana att

$$\|X(x)\| \leq M \|x\|$$

för alla $x \in E, (\mathcal{B})$.
Operatornormen $\|X\|$ definieras då som

$$\|X\| = \inf \mathcal{M}.$$

Operatornormen blir beroende av den norm som vi har valt i $E, (\mathcal{B})$.
Vi kan också definiera operatornormen genom

$$\|X\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|X(x)\|}{\|x\|}$$

Om X är en linjär operator kan vi sätta $y = \frac{x}{\|x\|}$ för $x \neq 0$. Då erhålls

$$\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Vidare erhåller vi då:

$$\frac{\|X(x)\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} X(x) \right\| = \left\| X\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|X(y)\|.$$

Då får vi att

$$\|X\| = \sup_{\|x\|=1} \|X(x)\|.$$

För varje operator X gäller att:

$$\|X(x)\| \leq \|X\| \cdot \|x\|$$

Följande sats kan vara användbar vid bestämning av operatornormer:

Sats: Låt E, F och $\mathcal{B}$ vara normerade vektorrum och $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Låt $X: E \to F$ eller $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Om det existerar en konstant $M \geq 0$, så att

a) $\|X(x)\| \leq M \|x\|$ för varje $x \in E, (\mathcal{B})$

b) $\|X(x_0)\| = M \|x_0\|$ för något $\begin{cases} x_0 \in E, (\mathcal{B}), \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$

då är operatornormen $\|X\| = M$.

Bevis: Av a) och definitionen på operatornorm får vi att

$$\|X\| \leq M.$$

Av b) och $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|X(x)\|}{\|x\|} = \|X\|$ följer att $\|X\| \geq M$

$$\therefore \ \|X\| = M. \ \square$$

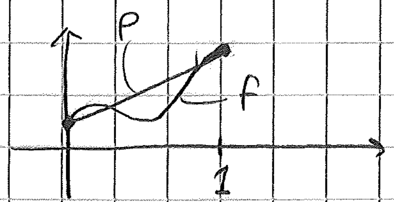
Definition: Operatornormen $\|X\|$ för en approximationsoperator $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, kallas Lebesgue konstanten.

Ex) $\mathcal{B} = C[0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1 = \{$polynom av gradtal $\leq 1\}$.

$\mathcal{P}_1$ är ett 2-dimensionellt linjärt underrum av $\mathcal{B}$.

För varje $f \in \mathcal{B}$ väljer vi den entydigt bestämda linjen $p \in \mathcal{P}_1$ som ges av interpolationsvillkoren

$$\begin{cases} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \end{cases}$$



Vi definierar $X: \mathcal{B} \to \mathcal{P}_1$ genom $X(f) = p$.
X är en approximationsoperator.

1° $X(p) = p$ för alla $p \in \mathcal{P}_1$.
$\therefore$ X är en projektion

2° Låt $f, g \in \mathcal{B}$ och $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$X(\lambda f + \mu g) = p_1 \in \mathcal{P}_1, \text{ där } \begin{cases} p_1(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) \\ p_1(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) \end{cases}$$

$$\lambda \cdot X(f) = p_2 \in \mathcal{P}_1, \text{ där } \begin{cases} p_2(0) = \lambda \cdot f(0) \\ p_2(1) = \lambda \cdot f(1) \end{cases}$$

$$\mu \cdot X(g) = p_3 \in \mathcal{P}_1, \text{ där } \begin{cases} p_3(0) = \mu g(0) \\ p_3(1) = \mu \cdot g(1) \end{cases}$$

$\therefore$ $p_1(x) = p_2(x) + p_3(x)$

$\therefore$ $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$

$\therefore$ X är en linjär projektion.

3° Operatornormen av X.

a) Betrakta $C[0,1]$ med L_p-normen, $1 \leq p < \infty$.
Välj:

$$f_n(x) = x^n.$$

$$X(f_n) = p_n \in \mathcal{P}_1, \quad \begin{cases} p_n(0) = 0 \\ p_n(1) = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ $p_n(x) = x$ för varje n.

$$\|X(f_n)\|_p = \|p_n\|_p = \left(\int_0^1 |x|^p dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} \text{ för alla } n.$$

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |x^n|^p dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{np+1}\right)^{1/p}$$

$$\therefore \|X\|_p \geq \frac{\|X(f_n)\|_p}{\|f_n\|_p} = \frac{\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}}{\left(\frac{1}{np+1}\right)^{1/p}} \longrightarrow \infty, \text{ då } n \to \infty.$$

$\therefore$ Operatornormen $\|X\|_p$ är obegränsad.

b) Vi byter L_p normen i a) mot L_∞-normen. Nu betraktar vi en godtycklig funktion $f \in \mathcal{B}$.

$$\|X(f)\|_\infty = \|p\|_\infty, \quad \text{där } \begin{cases} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \end{cases}, \quad p \in \mathcal{P}_1.$$

$$= \max(|p(0)|, |p(1)|)$$
$$= \max(|f(0)|, |f(1)|)$$
$$\leq \|f\|_\infty$$

$$\therefore \|X\|_\infty = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Xf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq 1.$$

Välj nu $f(x) = x$. Då är $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |x| = 1$.

$$\therefore \|X(f)\|_\infty = \max(|f(0)|, |f(1)|) = 1 = \|f\|_\infty$$

$$\therefore \frac{\|Xf\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1.$$

$\therefore$ Operatornormen $\|X\|_\infty = 1$.

Ex Om approximationsoperatorn $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ är en projektion, och $\mathcal{A} \neq \{0\}$, så är

$$\|X\| \geq 1.$$

Tag $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$.

$$\frac{\|X(a)\|}{\|a\|} = \frac{\|a\|}{\|a\|} = 1.$$

$$\therefore \quad \|X\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|X(x)\|}{\|x\|} \geq 1.$$

Sats 3.1.1: Låt $\mathcal{A}$ vara ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$, och låt $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ vara en linjär projektion. För $f \in \mathcal{B}$ låter vi d^* vara det kortaste avståndet till $\mathcal{A}$,

$$d^* = \min_{a \in \mathcal{A}} \|f - a\|.$$

Då uppfyller felet för approximationen $X(f)$ olikheten:

$$\|f - X(f)\| \leq (1 + \|X\|)\, d^*.$$

Bevis: Låt f^* vara bästa approximationen till f ur $\mathcal{A}$. Eftersom X är en linjär projektion gäller:

$$\begin{aligned} f - X(f) &= f - X(f^*) + X(f^*) - X(f) \\ &= (f - f^*) - X(f - f^*) \end{aligned}$$

Alltså får vi att:

$$\begin{aligned} \|f - X(f)\| &\leq \|f - f^*\| + \|X(f - f^*)\| \\ &\leq \|f - f^*\| + \|X\|\,\|f - f^*\| \\ &= (1 + \|X\|)\, d^*. \ \square \end{aligned}$$

Ex I vårt exempel med $\mathcal{B} = C[0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1$ och interpolationsoperatorn

$$X(f) = p, \quad \begin{cases} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \end{cases}, \quad p \in \mathcal{P}_1,$$

visade vi att X är en linjär projektion och $\|X\| = 1$.

För varje $f \in C[0,1]$ gäller då enligt Sats 3.1.1 att

$$\|f - X(f)\|_\infty = \|f - p\|_\infty \leq 2\,\|f - p^*\|_\infty,$$

där

$$\|f - p^*\|_\infty = \min_{p \in \mathcal{P}_1} \|f - p\|_\infty.$$

Betrakta $f(x) = x^2$. $\quad X(f) = p(x) = x$.

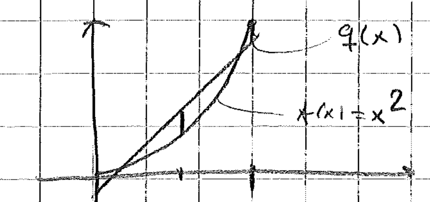
Sätt $g(x) = f(x) - p(x) = x^2 - x$. $\quad g(0) = g(1) = 0$.

$g'(x) = 2x - 1$, $\quad g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. $\quad g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad \|f - X(f)\|_\infty = \frac{1}{4}$$

Betrakta $q(x) = x - \frac{1}{8}$. Då gäller:

$$\begin{cases} f(0) - q(0) = \frac{1}{8} \\ f(\frac{1}{2}) - q(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \\ f(1) - q(1) = \frac{1}{8} \end{cases}$$



$$\therefore \quad q = p^* \in \mathcal{P}_1.$$

$$\therefore \quad \|x^2 - X(f)\|_\infty = 2\,\|f - p^*\|_\infty$$

$\therefore$ Vi kan ha likhet i sats 3.1.1.

(47)

Ex) Betrakta $C[a,b]$ med L_∞-normen.
P = mängden av polynom i $C[a,b]$.
$P_n = \{$polynom av gradtal $\leq n\}$.

Om vi tar en godtycklig funktion $f \in C[a,b]$ så kan vi för varje $\varepsilon > 0$ hitta ~~att~~ $p \in P$ sådant att
$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Om vi har en approximationsoperator $X : C[a,b] \curvearrowright P_n$ som är en linjär projektion, och om vi kan bestämma operatornormen $\|X\|_\infty$, så kan vi undersöka hur högt gradtal p måste ha. Är nämligen
$$\|f - X(f)\|_\infty > (1 + \|X\|_\infty)\cdot\varepsilon$$
så måste gradtalet på p vara större än n för att
$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon.$$

3.2 Approximation av kontinuerligt deriverbara funktioner med polynom

Det gäller att den bästa approximationen till $f \in C[a,b]$ mätt i L_∞-norm ur P_n är entydigt bestämd. Detta visas senare.

Definition: Låt $f \in C[a,b]$ och låt $X_n : C[a,b] \curvearrowright P_n$ vara en b.a. operator som avbildar $f \in C[a,b]$ på det entydigt bestämda polynomet $P_n^* \in P_n : \|f - P_n^*\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty$ för alla $p \in P_n$. Vi definierar $d_n^*(f)$ genom:
$$d_n^*(f) = \|f - X_n(f)\|_\infty = \|f - P_n^*\|_\infty.$$

(48)

Definition: Om f har kontinuerliga derivator av ordning $1, 2, \ldots, k$ i intervallet $[a,b]$, så betecknas detta med att $f \in C^k[a,b]$. $C^k[a,b]$ är ett oändligt dimensionellt vektorrum.

Följande sats följer ur teorin i kapitel 16 i boken.

Sats 3.2.1: Det finns en konstant $c \in \mathbb{R}$ sådan att för varje $f \in C^1[a,b]$ gäller att
$$d_n^*(f) \leq \left(\frac{c}{n}\right)\|f'\|_\infty$$
för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vidare gäller:

Sats 3.2.2: Det finns en konstant $c \in \mathbb{R}$ sådan att för varje $f \in C^k[a,b]$ gäller att
$$d_n^*(f) \leq \frac{(n-k)!\, c^k}{n!}\|f^{(k)}\|_\infty$$
för alla $n \geq k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Bevis: 1° Enligt sats 3.2.1 gäller olikheten för $k = 1$.
2° Vi gör induktionsantagandet att satsen gäller för $k-1$. Vi har då
$$d_n^*(f) \leq \frac{(n-k+1)!\, c^{k-1}}{n!}\|f^{(k-1)}\|_\infty.$$
Om $f \in C^k[a,b]$ så gäller: $f' \in C^{k-1}[a,b]$.
Alltså gäller det då att
$$d_{n-1}^*(f') \leq \frac{((n-1)-k+1)!\, c^{k-1}}{(n-1)!}\|f^{(k)}\|_\infty = \frac{(n-k)!\, c^{k-1}}{(n-1)!}\|f^{(k)}\|_\infty.$$

(19)

Låt P^*_{n-1} vara den bästa approximationen ur $\mathcal{P}_{n-1}$ till f'. Polynomet $q \in \mathcal{P}_n$ må vara en primitiv funktion för P^*_{n-1}. $q \in \mathcal{P}_n$ och

$$q(x) = \int P^*_{n-1}(x)\,dx .$$

Funktionen $f - q \in C^1[a,b]$ så enligt Sats 3.2.1 gäller:

$$\begin{aligned} d^*_n(f-q) &\leq \left(\frac{c}{n}\right)\|f' - q'\|_\infty \\ &= \left(\frac{c}{n}\right)\|f' - P^*_{n-1}\|_\infty \\ &= \left(\frac{c}{n}\right) d^*_{n-1}(f'). \end{aligned}$$

Låt $\|f - P^*_n\|_\infty = d^*_n(f)$.

$$\begin{aligned} d^*_n(f-q) &= \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|(f-q) - p\|_\infty \\ &= \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - (q+p)\|_\infty \\ &\geq d^*_n(f), \text{ ty } q+p \in \mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

Eftersom $P^*_n - q \in \mathcal{P}_n$ gäller:

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - (q+p)\|_\infty &\leq \|f - (q + (P^*_n - q))\|_\infty \\ &= \|f - P^*_n\|_\infty \\ &= d^*_n(f). \end{aligned}$$

Alltså gäller det att

$$d^*_n(f-q) = d^*_n(f).$$

(50)

Men då erhåller vi att

$$\begin{aligned} d^*_n(f) &= d^*_n(f-q) \\ &\leq \left(\frac{c}{n}\right) d^*_{n-1}(f') \\ &\leq \left(\frac{c}{n}\right) \cdot \frac{(n-k)!\, c^{k-1}}{(n-1)!} \|f^{(k)}\|_\infty \\ &= \frac{(n-k)!\, c^k}{n!} \|f^{(k)}\|_\infty . \end{aligned}$$

Satsens påstående erhålls genom fullständig induktion.

Satserna 3.2.1 och 3.2.2 gäller med samma konstant c även för funktioner $f \in C[a,b]$ med ~~ett~~ ändligt antal diskontinuiteter för $f^{(k)}$ i $[a,b]$.

Satserna ger också en övre gräns för hur snabbt approximationsfelet avtar med ökande gradtal på de approximerande polynomen.

3.3 Styckevis polynomiella approximationer.

Definition: $s \in C[a,b]$ är en kontinuerlig styckevis polynomiell funktion av gradtal k om det finns $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b,$$

och s är ett polynom av gradtal $\leq k$ i varje intervall $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Definition: $s \in C[a,b]$ är en rifunktion av gradtal k om s är en kontinuerlig styckevis polynomiell funktion av gradtal k, och om $s \in C^{k-1}[a,b]$. Punkterna $\xi_0, \ldots, \xi_n$ kallas knutpunkter. Mängden av rifunktioner av gradtal k med knutpunkterna $\xi_0, \ldots, \xi_n$ i $C[a,b]$ betecknas $S(k, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$.

"spline"

"knots"

Man kan visa att $S(k,\xi_0,\dots,\xi_n)$ är ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$ med dimensionstalet $(n+k)$.

Varje $s\in S(k,\xi_0,\dots,\xi_n)$ kan skrivas i formen

$$s(x)=\sum_{j=0}^{k}c_j x^j+\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n-1}d_j(x-\xi_j)_+^k,\quad a\le x\le b,$$

där

$$(x-\xi_j)_+=\max(0,x-\xi_j),$$

och parametrarna $c_0,\dots,c_k$ och $d_1,\dots,d_{n-1}$ är reella.

$\boxed{Ex}$ Betrakta $C[0,1]$ med L_∞-normen och $\mathcal{A}=S(1,x_0,x_1,\dots,x_n)$, där $x_0=0$, $x_n=1$, $x_i<x_{i+1}$.

$s\in S(1,x_0,\dots,x_n)$.

$$\begin{cases} s(x)=a_i x+b_i & \text{då } x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,\dots,n-1.\\ s\in C[a,b]\end{cases}$$

Tag $s_1,s_2\in S(1,x_0,\dots,x_n)$.

$(\alpha s_1+\beta s_2)\in C[a,b]$ för alla $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} s_1(x)&=a_i^1x+b_i^1 \quad i\ [x_i,x_{i+1}],\ i=0,\dots,n-1.\\ s_2(x)&=a_i^2x+b_i^2 \quad i\ [x_i,x_{i+1}]\end{aligned}$$

$$(\alpha s_1+\beta s_2)(x)=(a_i^1+a_i^2)x+(b_i^1+b_i^2)\ i\ [x_i,x_{i+1}],\quad i=0,\dots,n-1.$$

$\therefore$ $S(1,x_0,\dots,x_n)$ är ett linjärt underrum av $C[a,b]$.

Tag $s\in S(1,x_0,\dots,x_n)$, $s_i=s(x_i)$, $i=0,\dots,n$.
Antag att $x\in[x_i,x_{i+1}]$.

Linjär interpolation ger att

$$s(x)=s_i\cdot\underbrace{\frac{(x_{i+1}-x)}{(x_{i+1}-x_i)}}_{=\begin{cases}1, & x=x_i\\0, & x=x_{i+1}\end{cases}}+s_{i+1}\underbrace{\frac{(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}}_{=\begin{cases}1, & x=x_{i+1}\\0, & x=x_i\end{cases}}$$

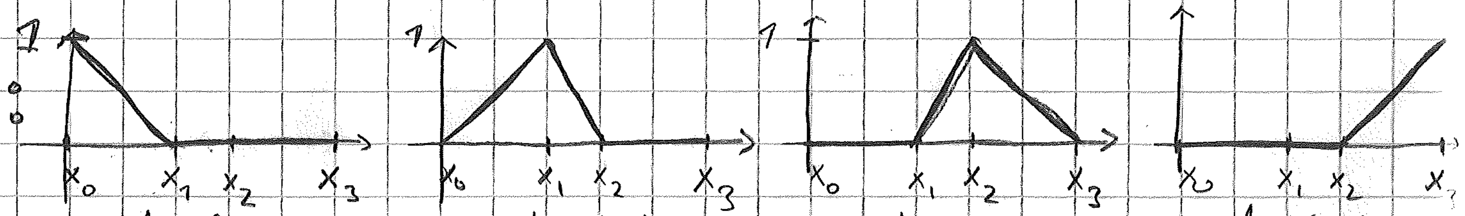
Om vi definierar $b_i(x)\in S(1,x_0,\dots,x_n)$ genom

$$b_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\ne j\end{cases},$$

så är $\{b_0(x),b_1(x),\dots,b_n(x)\}$ en bas för $S(1,x_0,\dots,x_n)$ och

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n}s_i\cdot b_i(x).$$

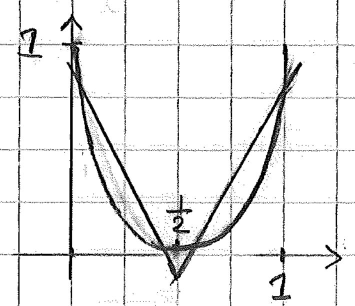
$n=3$:



$b_0(x)$ $b_1(x)$ $b_2(x)$ $b_3(x)$

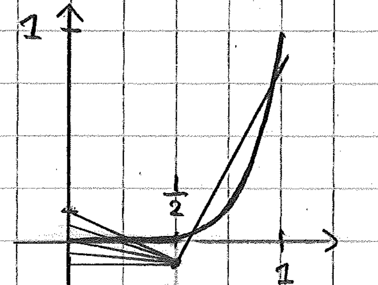
$\therefore$ Dimensionstalet för $S(1,x_0,\dots,x_n)$ är $n+1$.

Vi kan alltid hitta en bästa approximation s^*. Om L_p-normen används då $1<p<\infty$ är s^* entydig. Om L_∞-normen används behöver inte s^* vara entydig.
Betrakta $C[0,1]$ och $S(1,0,\frac12,1)$ med L_∞-normen.
Betrakta $f_1(x)=4(x-\frac12)^2$ och $f_2(x)=\begin{cases}4(x-\frac12)^2, & \frac12\le x\le 1\\ 0, & 0\le x\le\frac12\end{cases}$



$f_1(x)$

s^* entydig.



$f_2(x)$

s^* inte entydigt bestämd.