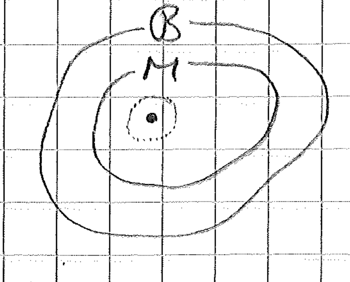
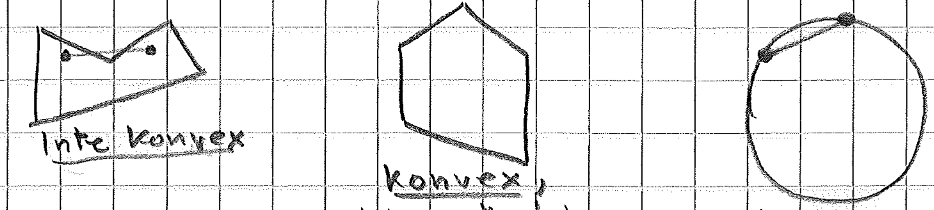
2. Entydighet av $a^* \in \mathcal{A}$

2.1 Konvexa mängder

Definition: Låt M vara en delmängd av ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$. $x \in M$ är en inre punkt i M om det existerar en öppen sfär $S(x,r) = \{y \in \mathcal{B} : \|x-y\| < r, r>0\}$, så den att $S(x,r) \subseteq M$.



Definition: Mängden M är konvex om $x_0, x_1 \in M \Rightarrow \theta x_0 + (1-\theta)x_1 \in M$ då $0 \le \theta \le 1$. Om $\theta x_0 + (1-\theta) x_1$ är en inre punkt i M då $0 < \theta < 1$, så är M strängt konvex.



Sats: Om mängderna M_1 och M_2 är konvexa så är $M = M_1 \cap M_2$ en konvex mängd.

Bevis: Tag $x_0, x_1 \in M$. $\because$ $x_0, x_1 \in M_1 \wedge x_0, x_1 \in M_2$.

Låt $0 \le \theta \le 1$ och sätt $x = \theta x_0 + (1-\theta) x_1$.

$x \in M_1 \wedge x \in M_2$ ty M_1, M_2 är konvexa.

$\therefore$ $x \in M_1 \cap M_2 = M$

$\therefore$ M är en konvex mängd $\square$.

Sats 2.1.1: Låt $\mathcal{B}$ vara ett normerat vektorrum. För varje $f \in \mathcal{B}$ och för varje $r > 0$ är den slutna sfären $\mathcal{N}(f,r) = \{x : \|f-x\| \le r, x \in \mathcal{B}\}$ en konvex mängd.

Bevis: Tag $x_0, x_1 \in \mathcal{N}(f,r)$. För $0 < \theta < 1$ gäller:

$$\|(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) - f\| = \|\theta x_0 - \theta f + (1-\theta)x_1 - (1-\theta) f\|$$

$$\le \|\theta(x_0 - f)\| + \|(1-\theta)(x_1 - f)\|$$

$$= |\theta|\,\|x_0 - f\| + |1-\theta|\,\|x_1 - f\|$$

$$\le \theta r + (1-\theta) r = r$$

$\therefore$ $\theta x_0 + (1-\theta)x_1 \in \mathcal{N}(f,r)$ för $0 \le \theta \le 1$.

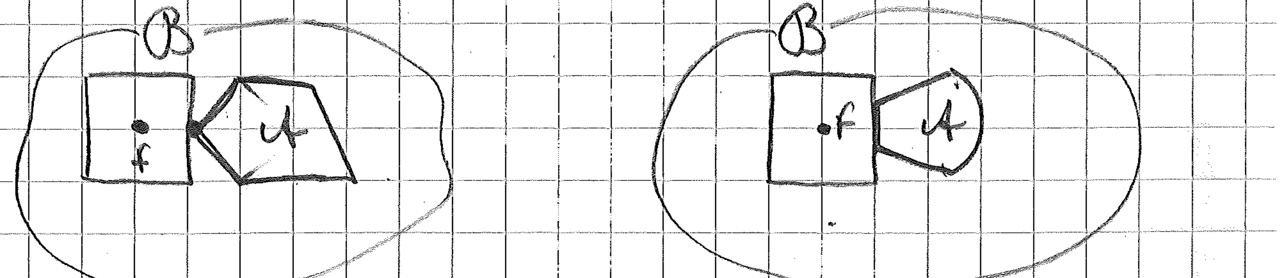
$\therefore$ $\mathcal{N}(f,r)$ är en konvex mängd $\square$.

Definition: Normen i det normerande vektorrummet $\mathcal{B}$ är strängt konvex om den slutna sfären $\mathcal{N}(f,r) = \{x \in \mathcal{B} : \|f-x\| \le r\}$ är strängt konvex för varje $f \in \mathcal{B}$, $r > 0$.

Sats 2.1.2: Antag att $\mathcal{A}$ är en konvex mängd i ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$ och antag att det existerar en bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$ för vektorn $f \in \mathcal{B}$. Då är mängden av bästa approximationer i $\mathcal{A}$ konvex.

Bevis: Sätt $h^* = \min_{a \in \mathcal{A}} \|f - a\| = \|f - a^*\|$.

Det icke-tomma snittet $\mathcal{A} \cap \mathcal{N}(f, h^*)$ är en konvex mängd vars element utgörs av alla bästa approximationer till f ur $\mathcal{A}$. $\square$.



Sats: Om $\mathcal{A}$ är ett linjärt underrum av ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$, så är $\mathcal{A}$ en konvex mängd.

Bevis: Tag $x_0, x_1 \in \mathcal{A}$. För alla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gäller

$$x = \lambda x_0 + \mu x_1 \in \mathcal{A}.$$

Speciellt för $\lambda = \theta$, $\mu = (1-\theta)$, $0 \le \theta \le 1$, gäller det att $x \in \mathcal{A}$.
$\therefore$ $\mathcal{A}$ är en konvex mängd.

Sats: Om $\mathcal{A}$ är ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$, så är för varje $f \in \mathcal{B}$ mängden av bästa approximationer ur $\mathcal{A}$ en konvex mängd.

2.2 Entydiga approximationer

Sats 2.2.1: Låt $\mathcal{A}$ vara en kompakt och strängt konvex mängd i ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$. För varje $f \in \mathcal{B}$ finns det då en entydig bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$.

Bevis: Tag $f \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ är ett metriskt rum, $(d(x,y) = \|x-y\|)$, så enligt sats 1.2.1 finns det en vektor $a^* \in \mathcal{A}$:

$$h^* = \|f - a^*\| \le \|f - a\| \quad \text{för } a \in \mathcal{A}.$$

Vi kan anta att $f \notin \mathcal{A}$, ty om $f \in \mathcal{A}$ så är $a^* = f$ den entydiga bästa approximationen. Då $f \notin \mathcal{A}$ har vi att $h^* > 0$.

Antag som antites att vi har två olika bästa approximationer $a_0^*, a_1^* \in \mathcal{A}$.

Eftersom $\mathcal{A}$ är (strängt) konvex så ger sats 2.1.2 att även $\frac{1}{2}a_0^* + \frac{1}{2}a_1^*$ är en bästa approximation till f.

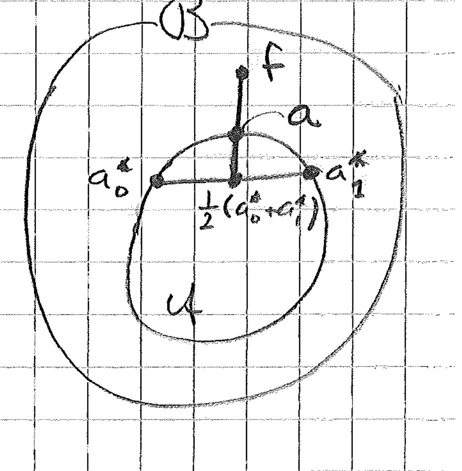
$\therefore$ $\|\frac{1}{2}(a_0^* + a_1^*) - f\| = h^* > 0$.

Låt λ vara det största talet i intervallet $[0,1]$ sådant att

$$a = \frac{1}{2}(a_0^* + a_1^*) + \lambda\left[f - \frac{1}{2}(a_0^* + a_1^*)\right] \in \mathcal{A}.$$

Ett dylikt λ existerar, ty $\mathcal{A}$ är kompakt.

Då gäller:

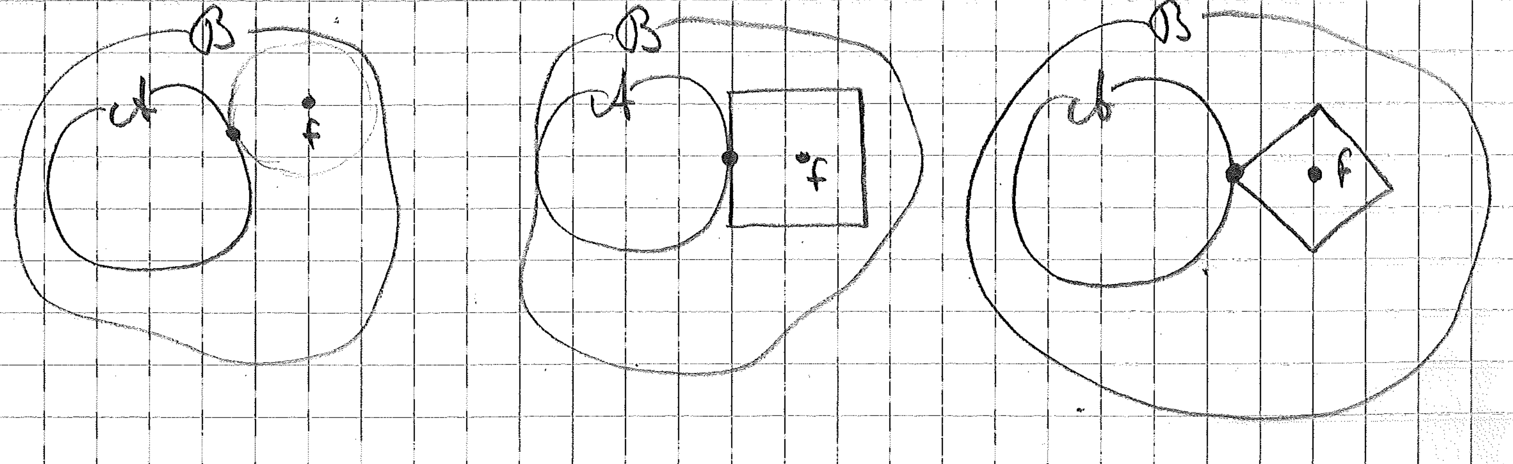


$$\begin{aligned}
\|a - f\| &= \left\|\tfrac{1}{2}(a_0^* + a_1^*) + \lambda\left[f - \tfrac{1}{2}(a_0^* + a_1^*)\right] - f\right\| \\
&= \left\|(1-\lambda)\left(\tfrac{1}{2}(a_0^* + a_1^*) - f\right)\right\| \\
&= |1-\lambda|\, \left\|\tfrac{1}{2}(a_0^* + a_1^*) - f\right\| \\
&= (1-\lambda)\, h^* < h^*,
\end{aligned}$$

ty $\lambda > 0$ eftersom $\mathcal{A}$ är strängt konvex. Men detta ger en motsägelse.

$\therefore$ $a_0^* = a_1^*$.

$\therefore$ $a^* \in \mathcal{A}$ är entydigt bestämd $\blacksquare$.



Sats 2.2.2: Låt $\mathcal{A}$ vara en konvex mängd i ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$ vars norm är strängt konvex. För $f \in \mathcal{B}$ finns det då högst en bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$.

(25)

Bevis: Antites: a_0^* och a_1^* är två olika bästa approximationer ur $\mathcal{A}$.

$\therefore \ \|f - a_0^*\| = \|f - a_1^*\| = h^*$.

Vidare gäller att $a_0^*, a_1^* \in \mathcal{N}(f, h^*)$.

Sätt
$$a = \tfrac{1}{2} a_0^* + \tfrac{1}{2} a_1^* \in \mathcal{A}.$$

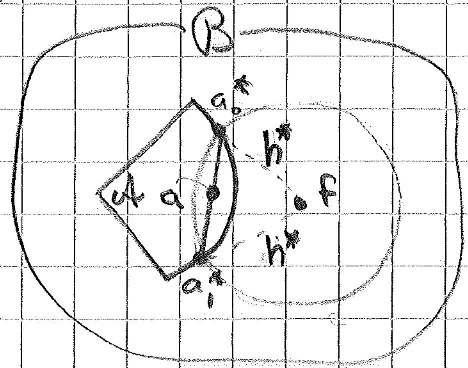
a är en bästa approximation till f, eftersom mängden av bästa approximationer är konvex enligt sats 2.1.2.

$\therefore \ \|f - a\| = h^*$.

Vidare är a en inre punkt i $\mathcal{N}(f, h^*)$, eftersom normen är strängt konvex. Men då gäller det att

$\|f - a\| < h^*$,

vilket ger en motsägelse.



$\therefore$ antitesen är falsk

$\therefore \ a_0^* = a_1^*$

$\therefore$ Det finns högst en bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$. $\square$

(26)

Sats 2.2.3: Låt $\mathcal{A}$ vara en konvex och kompakt mängd i ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$ vars norm är strängt konvex. För $f \in \mathcal{B}$ finns det då en entydigt bestämd bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$.

Bevis: Enligt föregående sats finns det högst en bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$ till f. $\mathcal{B}$ är ett metriskt rum ($d(x,y) = \|x - y\|$) och $\mathcal{A}$ är en kompakt mängd i $\mathcal{B}$, alltså finns det åtminstone en bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$.

$\therefore$ Det finns en entydigt bestämd bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$.

2.3 L_p-normerna

Definition: Avbildningen $(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kallas skalärprodukten av x och y, och definieras genom:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

I $C[a,b]$ definieras skalärprodukten (f,g) av $f, g \in C[a,b]$ genom

$$(f,g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx .$$

För skalärprodukterna gäller:

$$(x,x) = \|x\|_2^2$$

och

$$(f,f) = \|f\|_2^2 .$$

Vidare är det lätt att verifiera att följande identiteter gäller:

$$\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2(f,g)$$

$$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x,y)$$

$$(f+g,h) = (f,h)+(g,h), \quad (f,g+h) = (f,g)+(f,h)$$

$$(x+y,z) = (x,z)+(y,z), \quad (x,y+z) = (x,y)+(x,z)$$

$$(\lambda f, \mu g) = \lambda\mu (f,g), \quad (\lambda x, \mu y) = \lambda\mu(x,y), \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Sats 2.3.1: L_2-normen i de normerade vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $C[a,b]$ är strängt konvex.

Bevis: Betrakta den slutna enhetssfären $\mathcal{N}(0,1) = \{x \in \mathcal{B} : \|x\|_2 \leq 1\}$, där $\mathcal{B}$ är $\mathbb{R}^n$ eller $C[a,b]$.
Antag att $f \neq g$ och $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$.
Vi visar att $0 < \theta < 1 \Rightarrow \|\theta f + (1-\theta)g\|_2 < 1$, vilket innebär att $\theta f + (1-\theta)g$ är en inre punkt i $\mathcal{N}(0,1)$.
Det gäller att:

$$\theta(1-\theta)\|f-g\|_2^2 > 0,$$

ty $0<\theta<1$ och $f \neq g$. Då får vi

$$\|\theta f + (1-\theta)g\|_2^2 + \theta(1-\theta)\|f-g\|_2^2 =$$

$$= \|\theta f\|_2^2 + \|(1-\theta)g\|_2^2 + 2(\theta f, (1-\theta)g) + \theta(1-\theta)\cdot(\|f\|_2^2 + \|-g\|_2^2 + 2(f,-g)) =$$

$$= \theta^2 \cdot 1 + (1-\theta)^2 \cdot 1 + 2\theta(1-\theta)(f,g) + 2\theta(1-\theta) - 2\theta(1-\theta)(f,g)$$

$$= \theta^2 + 1 - 2\theta + \theta^2 + 2\theta - 2\theta^2 = 1$$

$\therefore$ $\|\theta f + (1-\theta)g\|_2 < 1$ då $0 < \theta < 1$.

$\therefore$ $\mathcal{N}(0,1)$ är en strängt konvex mängd.

$\mathcal{N}(f,r)$ för $f \in \mathcal{B}$ och $r > 0$ erhålls genom att translatera $\mathcal{N}(0,1)$ till $\mathcal{N}(f,1)$ och "blåsa upp" eller "krympa ner" $\mathcal{N}(f,1)$ till $\mathcal{N}(f,r)$, som också blir en strängt konvex mängd.

$\therefore$ L_2-normen i $\mathcal{B}$ är strängt konvex $\square$.

Man kan visa att:

Sats 2.3.2: L_p-normen för $1 < p < \infty$ i de normerade vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $C[a,b]$ är strängt konvex.

Sats 2.3.3: Låt $\mathcal{B}$ vara $\mathbb{R}^n$ eller $C[a,b]$, och $\mathcal{A}$ ett linjärt underrum i $\mathcal{B}$. Då är L_1-normen och L_∞-normen inte strängt konvexa, och om det finns en bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$, så behöver den inte vara entydigt bestämd.

Vi verifierar satsen genom att konstruera 2 exempel i $C[a,b]$ och 2 exempel i $\mathbb{R}^n$ som visar att a^* inte är entydigt bestämd.
Då kan vi på basen av sats 2.2.2. dra slutsatsen att L_1- och L_∞-normen inte är strängt konvexa normer.

Ex 1) Betrakta $\mathcal{B} = C[0,1]$, $\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{B} : a(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$

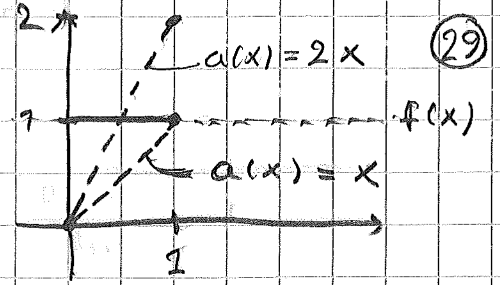
och $f(x) = 1$.

$\mathcal{A}$ är ett endimensionellt linjärt underrum av $\mathcal{B}$. Normen i $\mathcal{B}$ är L_∞-normen.

Nu gäller det att:

$$\|f-a\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |1-\lambda x| \geq 1,$$

för alla $a\in\mathcal{A}$, ty
$a(0)=0$ i $\mathcal{A}$.



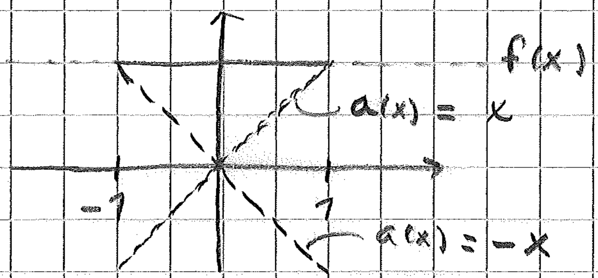
1° $\lambda > 2$. Då är $a(1) > 2$ och $\|f-a\|_\infty > 1$.

2° $\lambda < 0$. Då är $a(1) < 0$ och $\|f-a\|_\infty > 1$.

3° $0 \leq \lambda \leq 2$. Då är $\|f-a\|_\infty = 1$.

∴ En bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$ erhålls för varje $\lambda \in [0,2]$.

Ex 2 Betrakta $\mathcal{B} = C[-1,1]$, $f(x)=1$ och
$\mathcal{A} = \{a\in\mathcal{B} : a(x) = \lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
$\mathcal{B}$ är försett med L_1-normen.



1° $-1 \leq \lambda \leq 1$.

$$\|f-\lambda x\|_1 = \int_{-1}^{1} |1-\lambda x|\,dx = \int_{-1}^{1}(1-\lambda x)\,dx = \left[x-\frac{\lambda x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2$$

2° $\lambda > 1$.

$$\|f-\lambda x\|_1 = \int_{-1}^{1}|1-\lambda x|\,dx = \int_{-1}^{1/\lambda}(1-\lambda x)\,dx + \int_{1/\lambda}^{1}(\lambda x-1)\,dx$$

$$= \left[x-\frac{\lambda x^2}{2}\right]_{-1}^{1/\lambda} + \left[\frac{\lambda x^2}{2}-x\right]_{1/\lambda}^{1}$$

$$= \lambda + \frac{1}{\lambda} =: g(\lambda)$$

$g'(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$, $g'(\lambda)=0$ då $\lambda = 1$, $g'(\lambda) > 0$ då $\lambda > 1$.

∴ g str. väx. i $[1,\infty)$ och $g(1) = 2$.

∴ $\|f-\lambda x\|_1 > 2$, då $\lambda > 1$.

3° $\lambda < -1$.

$$\|f-\lambda x\|_1 = \int_{-1}^{1/\lambda}(\lambda x-1)\,dx + \int_{1/\lambda}^{1}(1-\lambda x)\,dx$$

$$= \left[\frac{\lambda x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1/\lambda} + \left[x-\frac{\lambda x^2}{2}\right]_{1/\lambda}^{1}$$

$$= -\lambda - \frac{1}{\lambda} =: g(\lambda)$$

$g'(\lambda) = -1 + \frac{1}{\lambda^2}$, $g'(\lambda) = 0$ då $\lambda = -1$
$g'(\lambda) < 0$ då $\lambda < -1$

∴ g str. avt. i $(-\infty,-1]$ och $g(-1) = 2$.

∴ $\|f-\lambda x\|_1 > 2$, då $\lambda < -1$.

∴ En bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$ erhålls för varje $\lambda \in [-1,1]$.

Ex 3 Betrakta $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ försett med L_∞-normen.
Låt $f = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{B}$, och
$\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{B} : a = \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\}$, där

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1 \quad \text{och} \quad x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n-1}.$$

$$\|f - a\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |1 - \lambda x_i| \ge 1 \quad \text{för alla } a \in \mathcal{A},$$
ty $|1 - \lambda x_1| = 1$.

1° För $0 \le \lambda \le 2$: $\|f - a\|_\infty = 1$

2° För $\lambda > 2$ är $|1 - \lambda \cdot x_n| > 1$, $\|f - a\|_\infty > 1$

3° För $\lambda < 0$ är $|1 - \lambda \cdot x_n| > 1$, $\|f - a\|_\infty > 1$.

$\therefore$ En bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$ erhålls för alla $\lambda \in [0, 2]$

Ex 4 $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ med L_1-normen. $f = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{B}$,
$\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{B} : a = \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
där

$$-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1 \quad \text{och} \quad x_{i+1} - x_i = \frac{2}{n-1}.$$

$$\|f - a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |1 - \lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} (1 + \lambda x_i - 2 \min(1, \lambda x_i))$$
$$= n + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - 2 \sum_{i=1}^{n} \min(1, \lambda x_i)$$
$$= n - 2 \sum_{i=1}^{n} \min(1, \lambda x_i)$$

1° $-1 \le \lambda \le 1$. $\min(1, \lambda x_i) = \lambda x_i$ för alla i.

$$\|f - a\|_1 = n - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i$$
$$= n - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$= n$$

2° $\lambda > 1$.

n udda: $\lambda x_i = 0$ för $i = \frac{n+1}{2}$.

$\exists$ ett index j : $\frac{n+1}{2} \le j < n$ och

$$\begin{cases} \min(1, \lambda x_i) = 1, & \text{då } j < i \le n \\ \min(1, \lambda x_i) = \lambda x_i, & \text{då } 1 \le i \le j. \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{i=n-j+1}^{j} \min(1, \lambda x_i) = \sum_{i=n-j+1}^{j} \lambda x_i = 0.$$

$\lambda x_i < -1$ då $1 \le i < n - j + 1$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-j} \underbrace{\min(1, \lambda x_i)}_{\lambda x_i} + \sum_{i=j+1}^{n} \underbrace{\min(1, \lambda x_i)}_{1} < 0$$

$\therefore$ $\|f - a\|_1 > n$ då n udda och $\lambda > 1$.

n jämnt:

$\exists$ ett index j : $\frac{n}{2} < j < n$ och

$$\begin{cases} \min(1, \lambda x_i) = 1, & \text{då } j < i \le n \\ \min(1, \lambda x_i) = \lambda x_i, & \text{då } 1 \le i \le j. \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{i=n-j+1}^{j} \min(1, \lambda x_i) = \lambda \sum_{i=n-j+1}^{j} x_i = 0$$

$\lambda x_i < -1$ då $1 \le i < n - j + 1$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \min(1, \lambda x_i) < 0$$

$\therefore$ $\|f - a\|_1 > n$.

3° $\lambda < -1$: Analogt med punkt 2° visas att $\|f - a\|_1 > n$.

$\therefore$ En bästa approximation $a^* \in \mathcal{A}$ erhålls för alla $\lambda \in [-1, 1]$.

Vi sammanfattar undersökningarna i följande tabell: (33)

$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	$a^* \in \mathcal{A}$
Metriskt rum eller normerat vektorrum	Kompakt delmängd	minst ett a^* (1, 2, 3, ...)
Normerat vektorrum	Linjärt underrum, ändligt dimensionellt	1 eller ∞ många $a^* \in \mathcal{A}$.
Metriskt rum eller normerat vektorrum	Kompakt och strängt konvex delmängd	a^* entydigt bestämd
Normerat vektorrum, strängt konvex norm	Konvex mängd	högst ett $a^* \in \mathcal{A}$
—— " ——	Kompakt och konvex mängd	a^* entydigt bestämd

2.4 Bästa approximationsoperatorn.

Antag att vi har ett metriskt rum $\mathcal{B}$ och en delmängd $\mathcal{A}$ av $\mathcal{B}$.

Om det för varje $f \in \mathcal{B}$ finns ett entydigt bestämt element $a^* = f^* \in \mathcal{A}$, ($a^*$ beror av f så vi föredrar beteckningen f^*), sådant att

$$d(f,f^*) \leq d(f,a), \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

så kan vi definiera en funktion $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ kallad bästa approximationsoperatorn, b.a. operatorn, med egenskaperna:

$$X(f) = f^* \text{ för alla } f \in \mathcal{B}.$$
$$(Xf = f^*)$$

Vi har då att $X(f) = f$ då $f \in \mathcal{A}$, dvs.

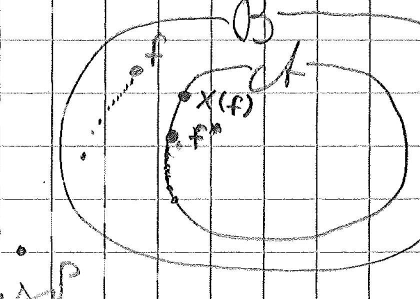
$$X(X(f)) = X(f) \text{ för alla } f \in \mathcal{B}.$$

X är då en projektion.

(34) **Sats 2.4.1:** Antag att $\mathcal{B}$ är ett metriskt rum och $\mathcal{A}$ är en kompakt delmängd av $\mathcal{B}$. Antag vidare att för varje $f \in \mathcal{B}$ finns det en entydig bästa approximation $X(f) \in \mathcal{A}$. Då är operatorn $X: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ kontinuerlig.

Bevis: Antites: X är inte kontinuerlig.

Då finns det en följd $\{f_i\} \in \mathcal{B}$ som konvergerar mot $f \in \mathcal{B}$, men följden $\{X(f_i)\}$ i $\mathcal{A}$ konvergerar inte mot $X(f)$.



$\mathcal{A}$ är kompakt. Då finns det en delföljd $\{f_{n_i}\}$ av $\{f_i\}$ sådan att följden $\{X(f_{n_i})\}$ konvergerar mot $f^* \in \mathcal{A}$, $f^* \neq X(f)$.

Vi visar att $f^* \in \mathcal{A}$ också är en bästa approximation till f, vilket ger en motsägelse.

För varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal I sådant att

$$\begin{cases} d(f^*, X(f_{n_i})) \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ d(f_{n_i}, f) \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}, \text{ så snart } i \geq I$$

Vidare gäller:

$$d(X(f_{n_i}), f_{n_i}) \leq d(X(f), f_{n_i}) \leq d(X(f), f) + d(f, f_{n_i})$$

För $i > I$ fås då:

$$d(X(f),f) < d(f^*,f) \leq d(f^*, f_{n_i}) + d(f_{n_i}, f)$$
$$\leq d(f^*, X(f_{n_i})) + d(X(f_{n_i}), f_{n_i}) + d(f_{n_i}, f)$$
$$\leq d(X(f),f) + \varepsilon$$

$\therefore$ $d(X(f),f) < d(f^*,f) \leq d(X(f),f)$ ↯

$\therefore$ Antitesen är falsk.

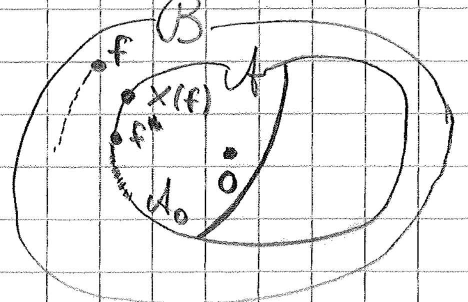
$\therefore$ X är kontinuerlig i $\mathcal{B}$. □

Komplettering till tabellen

$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	$a^* \in \mathcal{A}$
Normerat vektorrum	Linjärt underrum	0, 1 eller ∞ många
$\mathbb{R}^n$ eller $C[a,b]$, L_p-norm, $1 < p < \infty$	Linjärt underrum, ändligt dimensionellt	a^* entydigt bestämd
$C[a,b]$, L_1 eller L_∞-normen	$\mathcal{P}_n = \{$mängden av polynom av gradtal $\leq n\}$	a^* entydigt bestämd

Sats 2.4.2: Antag att $\mathcal{B}$ är ~~ett~~ normerat vektorrum och $\mathcal{A}$ är ~~ett~~ ändligt-dimensionellt linjärt underrum av $\mathcal{B}$. Antag vidare att för varje $f \in \mathcal{B}$ finns en entydigt bestämd bästa approximation $X(f) \in \mathcal{A}$. Då är operatorn $X : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ kontinuerlig. (35)

Bevis: antites: X är inte kontinuerlig. Då finns det en följd $\{f_i\}$ i $\mathcal{B}$ sådan att följden konvergerar mot $f \in \mathcal{B}$, men följden $\{X(f_i)\}$ i $\mathcal{A}$ konvergerar inte mot $X(f)$.



Låt $d > 0$ vara ~~ett~~ fixt tal. Sätt

$$\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} : \|f - x\| \le \|f\| + d\}.$$

$\mathcal{A}_0$ är inte tom, t. ex. $x = 0$ och $x = X(f)$ ligger i $\mathcal{A}_0$. Precis som i sats 1.3.1 inses att $\mathcal{A}_0$ är kompakt.

För $i > I_d$: $\|f - f_i\| \le \frac{d}{2}$.

$$\|f_i - 0\| \le \|f_i - f + f - 0\| \le \|f_i - f\| + \|f\|$$
$$\le \|f\| + \frac{d}{2}, \quad \text{då } i > I_d.$$

$$\therefore \|f_i - X(f_i)\| \le \|f_i - 0\| \le \|f\| + \frac{d}{2},$$

då $i > I_d$. Vidare gäller för $i > I_d$:

$$\begin{aligned}\|f - X(f_i)\| &\le \|f - f_i + f_i - X(f_i)\| \\ &\le \|f - f_i\| + \|f_i - X(f_i)\| \\ &\le \frac{d}{2} + \|f\| + \frac{d}{2} \\ &= \|f\| + d,\end{aligned}$$

(36) $\therefore$ $i > I_d \implies X(f_i) \in \mathcal{A}_0$.

Då finns det en oändlig delföljd $\{f_{n_i}\}$ av $\{f_i\}$ sådan att följden $\{X(f_{n_i})\}$ är i den kompakta mängden $\mathcal{A}_0$, och konvergerar mot $f^* \in \mathcal{A}_0$, $f^* \ne X(f)$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists I_\varepsilon > I_d$, sådant att

$$\begin{cases} \|f^* - X(f_{n_i})\| \le \frac{\varepsilon}{3} \\ \|f_{n_i} - f\| \le \frac{\varepsilon}{3}, \end{cases}$$

då $i > I_\varepsilon$. Vidare gäller:

$$\|X(f_{n_i}) - f_{n_i}\| \le \|X(f) - f_{n_i}\| \le \|X(f) - f\| + \|f - f_{n_i}\|$$

Alltså har vi:

$$\begin{aligned}\|X(f) - f\| < \|f^* - f\| &\le \|f^* - f_{n_i}\| + \|f_{n_i} - f\| \\ &\le \|f^* - X(f_{n_i})\| + \|X(f_{n_i}) - f_{n_i}\| + \|f_{n_i} - f\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \|X(f) - f\| + \|f - f_{n_i}\| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\le \|X(f) - f\| + \varepsilon\end{aligned}$$

$\therefore$ $\|X(f) - f\| < \|f^* - f\| \le \|X(f) - f\|$. Detta ger en motsägelse och antitesen är därmed falsk.

$\therefore$ X är kontinuerlig i $\mathcal{B}$. $\square$