

14. Bézier kurvor och -ytor (213)

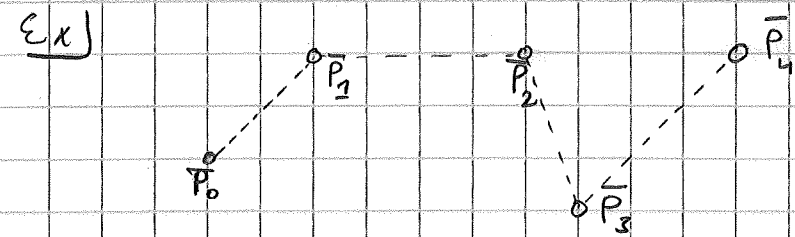
14.1 Inledning

Avsikten med detta kapitel är att presentera ett designredskap med vilket användaren interaktivt kan konstruera kurvor och ytor, antingen enskilda eller sammansatta, med ett "mjukt" förlopp.

Man skall inte behöva ange derivatavärden eller andra karakteristika för kurvan eller ytan som skall konstrueras. Ytan / kurvan skall skapas genom inläsning och manipulering av ett ändligt antal kontrollpunkter.

Antag att vi har $(n+1)$ st. ordnade punkter, kontrollpunkter, $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$

i \mathbb{R}^2 , dessa kan även tolkas som vektorer. Punkterna definierar en karakteristisk polygon i planet.



Vi önskar erhålla en parametrikurva som i stora drag imiterar polygon föget $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_n$. Parametrikurvan skall framställas i formen:

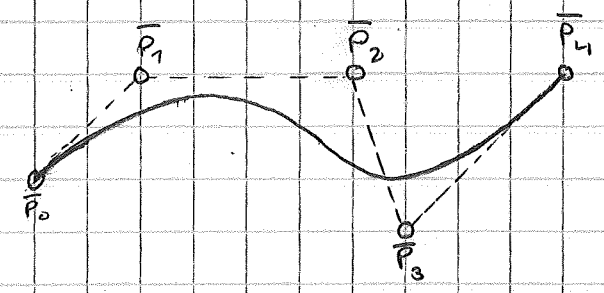
$$\bar{P}(u) = \sum_{i=0}^n \bar{P}_i \cdot f_i(u), \quad u \in [0, 1],$$

där f_0, \dots, f_n är $(n+1)$ st. reellvärda funktioner. Funktionerna kallas för angelsta blending functions.

(214) Vi ställer följande krav på $\bar{P}(u)$ och $f_i(u)$.

1. $\bar{P}(0) = \bar{P}_0$ och $\bar{P}(1) = \bar{P}_n$. Parametrikurvan $\bar{P}(u)$ skall starta i \bar{P}_0 och sluta i \bar{P}_n . I övrigt ställer vi inga krav på interpolation i de inre punkterna $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{n-1}$.
2. Det är önskvärt att $\bar{P}(u)$, för $0 \leq u \leq 1$, ligger i det konvexa höljat av $\bar{P}_0, \dots, \bar{P}_n$.
3. Tangenten till $\bar{P}(u)$ för $u=0$, dvs. i \bar{P}_0 , måste ges av vektorn $\bar{P}_1 - \bar{P}_0$ och för $u=1$, dvs. i \bar{P}_n , måste tangenten ges av vektorn $\bar{P}_n - \bar{P}_{n-1}$. Vi måste alltså kunna kontrollera kurvans tangent i start- och slutpunkten.
4. Vidare krävs att den rite derivatan av $\bar{P}(u)$ i \bar{P}_0 bestäms av $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ och att den rite derivatan av $\bar{P}(u)$ i \bar{P}_n bestäms av $\bar{P}_{n-2}, \bar{P}_{n-1}, \dots, \bar{P}_n$. Detta gör att vi kan "skarva ihop" kurvor med hög ordning av derivatkontinuitet i skarvpunkterna.

Ex) För ett visst val av $f_i, i=0, \dots, 4$, som uppfyller ovanstående krav kunde $\bar{P}(u)$ anta följande utseende:



14.2 Bernsteinpolynom

(215)

I avsnitt 6.3 behandlades Bernsteins operator B_n , som avbildar $f \in C[0,1]$ på ett n te gradspolynom

$$\begin{aligned} (B_n f)(s) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot s^k \cdot (1-s)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \phi_k(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \end{aligned}$$

där
$$\phi_k(s) = \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

B_n är en linjär operator, men inte en projektion, dvs. $f \in \mathcal{P}_n \Rightarrow B_n f = f$. Vi visade också att $B_n f$ konvergerar likformigt mot f då $n \rightarrow \infty$, och vi konstaterade att om $f \in C^p[0,1]$ så kan man visa att även de p första derivatorna av $B_n f$ likformigt mot derivatorna av f .

Vi skall nu undersöka funktionerna $\phi_k(s)$, $k=0, \dots, n$. Man kontrollerar lätt att

$$\begin{aligned} \phi_0(0) &= 1, \quad \phi_k(0) = 0, \quad k=1, \dots, n, \\ \phi_n(1) &= 1, \quad \phi_k(1) = 0, \quad k=0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Alltså gäller:

$$\begin{aligned} (B_n f)(0) &= f(0) \\ (B_n f)(1) &= f(1). \end{aligned}$$

Vi skall undersöka derivatorna av $\phi_k(x)$. Enligt Leibnitz formel gäller:

$$\frac{d^p}{ds^p} (u(s)v(s)) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{d^j}{ds^j} (u(s)) \cdot \frac{d^{p-j}}{ds^{p-j}} (v(s)).$$

(216)

Om vi tillämpar Leibnitz formel erhålls

$$\frac{d^p}{ds^p} \phi_k(s) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{d^j}{ds^j} (s^k) \cdot \frac{d^{p-j}}{ds^{p-j}} ((1-s)^{n-k})$$

Nu gäller ju:

$$\frac{d^j}{ds^j} s^k = \begin{cases} k(k-1) \cdots (k-j+1) s^{k-j} = \frac{k!}{(k-j)!} s^{k-j}, & k \geq j \\ 0, & k < j \end{cases}$$

$$\frac{d^{p-j}}{ds^{p-j}} (1-s)^{n-k} = \begin{cases} (-1)^{p-j} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k-p+j)!} (1-s)^{n-k-p+j}, & n-k \geq p-j \\ 0, & n-k < p-j \end{cases}$$

Vi erhåller alltså:

$$\frac{d^p}{ds^p} \phi_k(s) = \binom{n}{k} \sum_{j=\max(0, p+k-n)}^{\min(k, p)} (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{k!(n-k)!}{(k-j)!(n-k-p+j)!} s^{k-j} (1-s)^{n-k-p+j}$$

För $p=0, 1, \dots, n-1$ gäller:

$$\begin{aligned} \phi_0^{(p)}(1) &= \binom{n}{0} \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{0!n!}{j!(n-p+j)!} \cdot 1^{-j} \cdot \underbrace{(1-1)^{n-p+j}}_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

För $k=1, 2, \dots, n-1$, $p=0, 1, \dots, k-1$ gäller:

$$\begin{aligned} \phi_k^{(p)}(0) &= \binom{n}{k} \sum_{j=\max(0, p+k-n)}^p (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{k!(n-k)!}{(k-j)!(n-k-p+j)!} \cdot \underbrace{0^{k-j}}_0 \cdot (1-0)^{n-k-p+j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

För $k=1, 2, \dots, n-1$ gäller:

$$\begin{aligned} \phi_k^{(k)}(0) &= \binom{n}{k} \sum_{j=\max(0, 2k-n)}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{k!(n-k)!}{(k-j)!(n-2k+j)!} \cdot \underbrace{0^{k-j}}_{\substack{0, j < k \\ 1, j = k}} \cdot (1-0)^{n-2k+j} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{0!(n-2k+k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

För $k = 1, 2, \dots, n-1$, $p = 0, 1, \dots, n-k-1$ gäller: (217) (218)

$$\phi_k^{(p)}(1) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{\min(k,p)} (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{k!(n-k)!}{(k-j)!(n-k-p+j)!} \cdot 1^{k-j} \cdot 0^{n-k-p+j} = 0 \text{ för } j \geq 0$$

$$= 0$$

För $k = 1, 2, \dots, n-1$ gäller:

$$\phi_k^{(n-k)}(1) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{\min(k,n-k)} (-1)^{n-k-j} \binom{n-k}{j} \frac{k!(n-k)! \cdot 1^{k-j} \cdot 0^j}{(k-j)!(n-k-p+j)!}$$

$$= \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot 1 \cdot \frac{k!(n-k)!}{k! \cdot 0!}$$

$$= (-1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!}$$

För $p = 0, 1, \dots, n-1$ gäller:

$$\phi_n^{(p)}(0) = \binom{n}{n} \sum_{j=p}^n (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{n!(n-n)!}{(n-j)!(n-n-p+j)!} \cdot 0^{n-j} \cdot (1-0)^{n-p+j}$$

$$= 0$$

Med stöd av ovanstående utredningar kan vi beräkna derivatorna i intervall ändpunkterna av Bernsteinpolynom.

$$\frac{d^p}{ds^p} (B_n f)(s) \Big|_{s=0} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \phi_k^{(p)}(s) \Big|_{s=0}$$

$$= \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{n}\right) \phi_k^{(p)}(s) \Big|_{s=0}$$

$$= \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \sum_{j=\max(0,p+k-n)}^k (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{k!(n-k)!}{(k-j)!(n-k-p+j)!} \cdot 0^{k-j} \cdot (1-0)^{n-k-p+j}$$

$$= \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \cdot (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{k!(n-k)!}{0!(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Vi ser alltså att derivatan av ordning p i $s=0$ ges av de $(p+1)$ första funktionsvärdena $f\left(\frac{0}{n}\right), f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{p}{n}\right)$.
S speciellt för $p=1$ för vi att

$$(B_n f)'(0) = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0},$$

vilket betyder att linjen genom $(0, f(0))$, $\left(\frac{1}{n}, f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ är tangent till $(B_n f)(s)$ i $s=0$.

Derivatorna för $s=1$ erhålls genom

$$\frac{d^p}{ds^p} (B_n f)(s) \Big|_{s=1} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \phi_k^{(p)}(s) \Big|_{s=1}$$

$$= \sum_{k=n-p}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \phi_k^{(p)}(s) \Big|_{s=1}$$

$$= \sum_{k=n-p}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \sum_{j=p+k-n}^{\min(k,p)} (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \frac{k!(n-k)!}{(k-j)!(n-k-p+j)!} \cdot 1^{k-j} \cdot 0^{n-k-p+j}$$

$$= \sum_{k=n-p}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} (-1)^{p-k} \binom{p}{p+k-n} \frac{k!(n-k)!}{(n-p)! \cdot 0!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=n-p}^n (-1)^{p-k} \binom{p}{p+k-n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} f\left(\frac{k+n-p}{n}\right)$$

Vi ser alltså att derivatan av ordning p i $s=1$ ges av de $(p+1)$ sista funktionsvärdena $f\left(\frac{p-p}{n}\right), f\left(\frac{p-p+1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{p-1}{n}\right), f\left(\frac{p}{n}\right)$.

Speciellt för $p=1$ erhåller vi

$$(B_n f)'(1) = \frac{f(1) - f(\frac{n-1}{n})}{1 - \frac{n-1}{n}},$$

Vilket betyder att linjen genom $(\frac{n-1}{n}, f(\frac{n-1}{n}))$, $(1, f(1))$ är tangent till $(B_n f)(s)$ i $s=1$.

För varje $s \in [0, 1]$ gäller att $\phi_k(s) \geq 0, k=0, \dots, n$.
Vidare gäller

$$\sum_{k=0}^n \phi_k(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k} = (s+1-s)^n = 1.$$

Men detta betyder att för varje $s \in [0, 1]$ är

$$(B_n f)(s) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \phi_k(s)$$

en konvex kombination av $f(\frac{k}{n}), k=0, \dots, n$.

Detta medför att Bernsteinpolynom för $s \in [0, 1]$ ligger i det konvexa höljet av punkterna $(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n})), k=0, \dots, n$.

Alltså kan vi förmoda att funktionerna $\phi_k(x)$ lämpar sig väl som "blending functions".

Man kan visa att Bernsteinpolynom till en funktion $f \in C[0, 1]$ inte "oscillerar" mera än f i den mening att antalet gånger $(B_n f)(s)$ skär en godtycklig linje $y = a + bs$ i $[0, 1]$ inte är större än antalet gånger $f(s)$ skär linjens.

(219)

(220)

14.3 Bézier kurvor

Definition: Låt $P_k, k=0, 1, \dots, n$, vara $n+1$ ordnade punkter i \mathbb{R}^m , (vanligen \mathbb{R}^2), och betrakta den polygon som erhålls genom att förbinda dessa punkter. Bézier kurvan associerad med denna polygon är det vektorvärda Bernsteinpolynom $B_n(P_0, P_1, \dots, P_n)$, som ges av

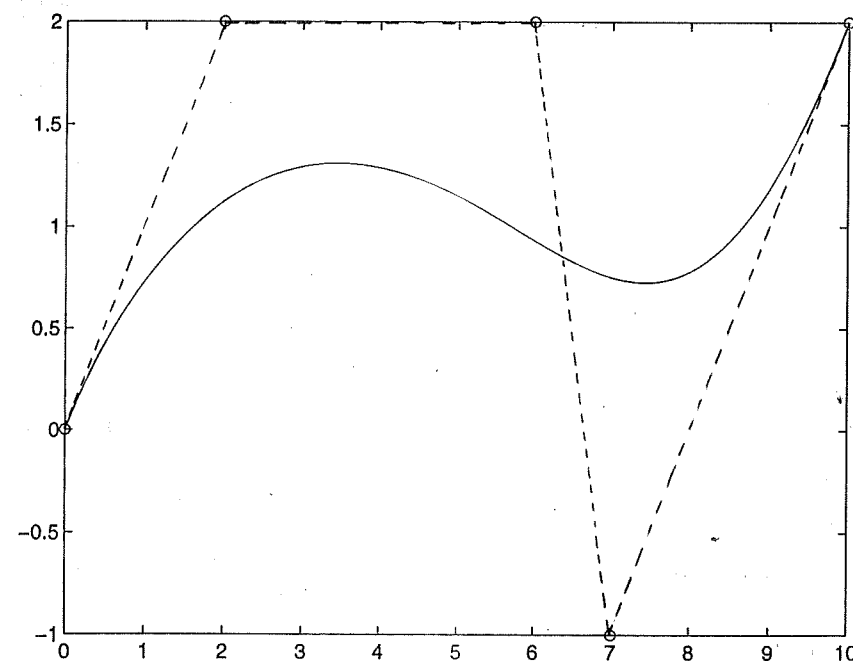
$$B_n(P_0, \dots, P_n) = \sum_{k=0}^n P_k \phi_k(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

där
$$\phi_k(s) = \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k}.$$

Ex Låt P_0, \dots, P_4 ges av $P_0 = (0, 0)$,

$P_1 = (2, 2), P_2 = (6, 2), P_3 = (7, -1)$ och $P_4 = (10, 2)$.

DS erhåller vi nedanstående polygon och Bézier kurva.



Bézier har även anfört en geometrisk konstruktion som leder till Bézierkurvan. (22)

Antag att vi har givet kontrollpunkterna $P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$. För att erhålla den punkt på kurvan som svarar mot parametervärdet $s \in [0, 1]$ gör vi på följande sätt:

Bilda $P_0^{(1)}$ genom en förflyttning med s av sträckan $P_0^{(0)}P_1^{(0)}$ från $P_0^{(0)}$ till $P_0^{(1)}$. Analogt bildas $P_1^{(1)}, \dots, P_{n-1}^{(1)}$. Vi erhåller $n-1$ st. nya punkter.

Om denna procedur itereras får vi slutligen en enda punkt $P_0^{(n)}$. Förfarandet illustreras i nedanstående figur.

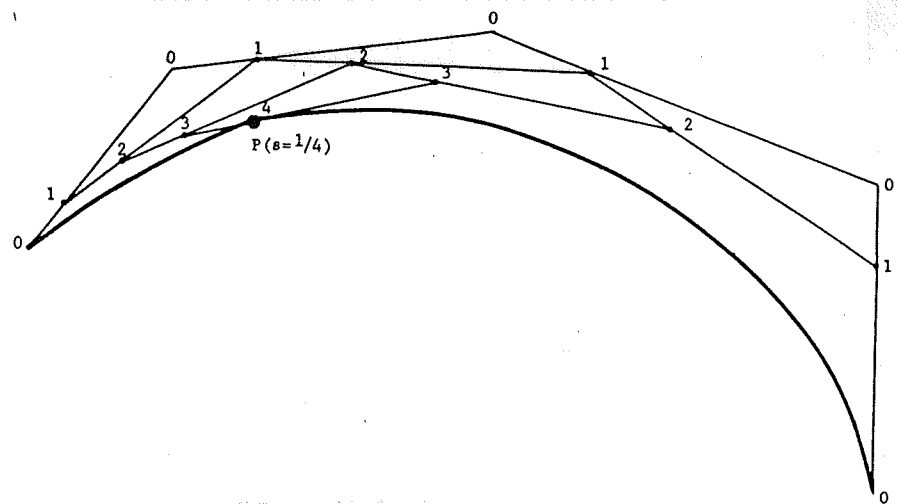


Fig. 4. The geometric construction, by proportioning, of a Bézier curve. The actual construction illustrated is that of the point on the curve corresponding to parameter value $s = \frac{1}{4}$.

Vi erhåller rekursionsformeln:

$$P_k^{(m)} = P_k^{(m-1)} + s(P_{k+1}^{(m-1)} - P_k^{(m-1)}), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Då kan $P_0^{(n)}$ uttryckas med hjälp av de ursprungliga kontrollpunkterna $P_0^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$.

$$\begin{aligned} P_0^{(n)} &= (1-s)P_0^{(n-1)} + sP_1^{(n-1)} \\ &= (1-s)[P_0^{(n-2)} + s(P_1^{(n-2)} - P_0^{(n-2)})] + s[P_1^{(n-2)} + s(P_2^{(n-2)} - P_1^{(n-2)})] \\ &= (1-s)^2 P_0^{(n-2)} + 2(1-s)s P_1^{(n-2)} + s^2 P_2^{(n-2)} \\ &= \dots \end{aligned}$$

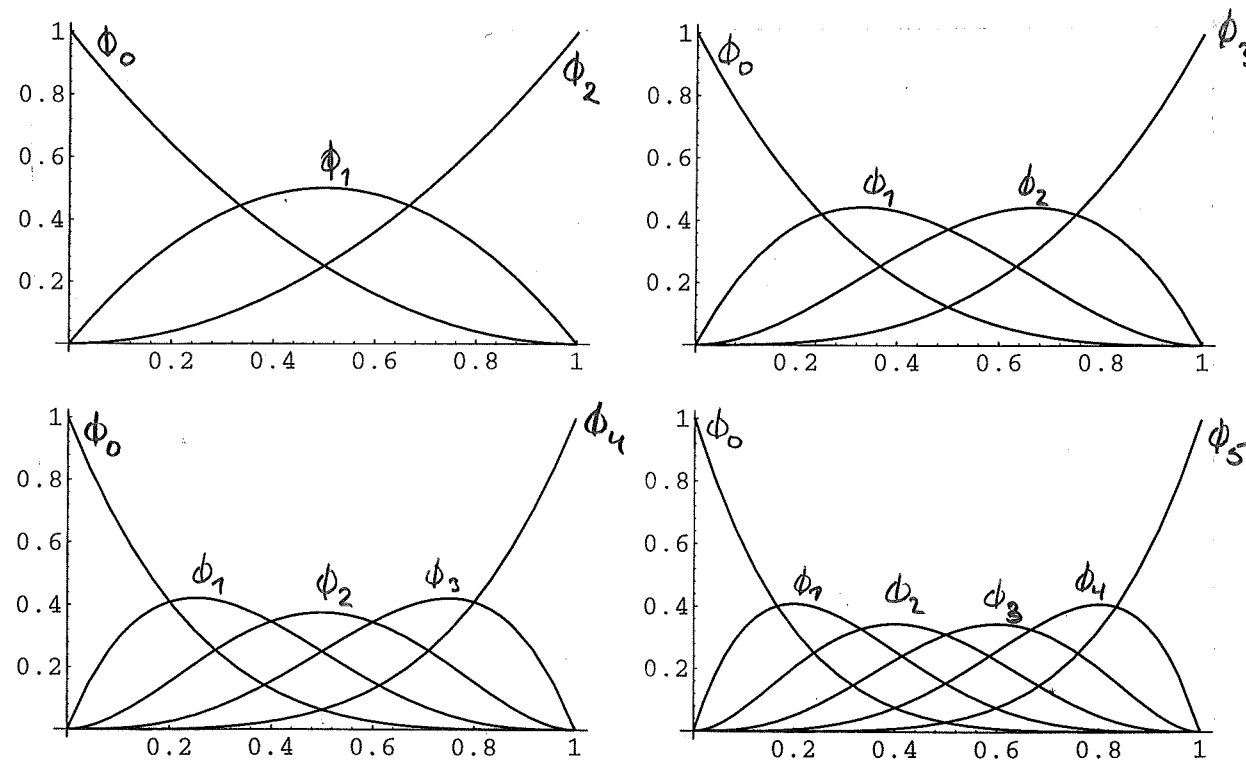
(22)

$$\begin{aligned} &= (1-s)^2 [P_0^{(n-3)} + s(P_1^{(n-3)} - P_0^{(n-3)})] + \\ &\quad + 2s(1-s) [P_1^{(n-3)} + s(P_2^{(n-3)} - P_1^{(n-3)})] + \\ &\quad + s^2 [P_2^{(n-3)} + s(P_3^{(n-3)} - P_2^{(n-3)})] \\ &= (1-s)^3 P_0^{(n-3)} + 3s(1-s)^2 P_1^{(n-3)} + 3s^2(1-s) P_2^{(n-3)} + s^3 P_3^{(n-3)} \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k} P_k^{(0)} = B_n(P_0^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}) \end{aligned}$$

Hur mycket kontrollpunkten P_i inverkar på Bézierkurvan för ett visst parametervärde s bestäms av viktfunktionen $\phi_i(s)$.

för $s = \frac{i}{n}$ antar ϕ_i sitt maximum, så i denna punkt är bidraget från P_i störst.

Nedan är ϕ_k s utritade för $n = 2, 3, 4$ och 5 .



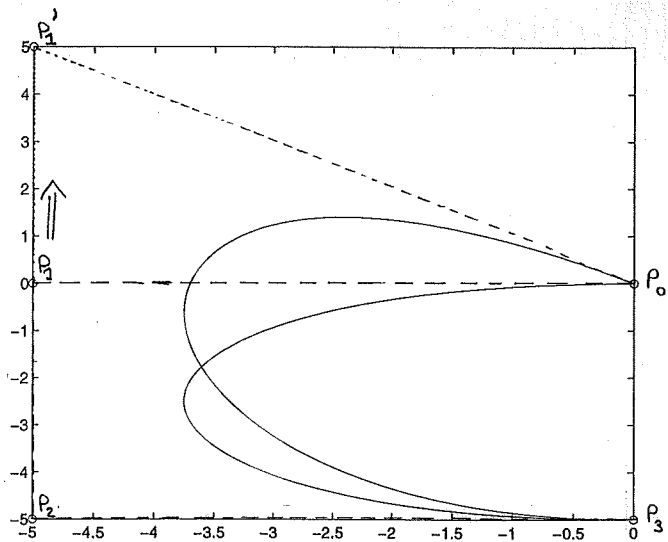
14.4 Styrning av Bézierkurvan

(223)

Bézierkurvans utseende kan i princip styras på 2 sätt:

1. Man kan förskjuta en eller flera av de ursprungliga kontrollpunkterna.

Ex | Vi startar med $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (-5,0)$, $P_2 = (-5,-5)$ och $P_3 = (0,-5)$. Därefter förskjuts $P_1 \rightarrow P'_1 = (-5,5)$.

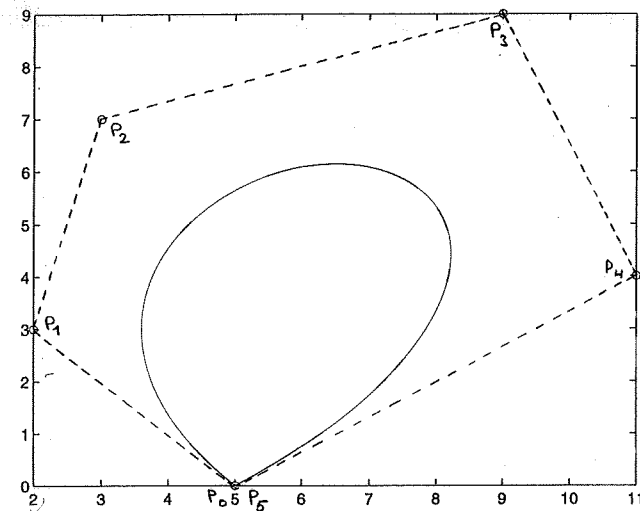


(224)

14.5 Slutna Bézierkurvor.

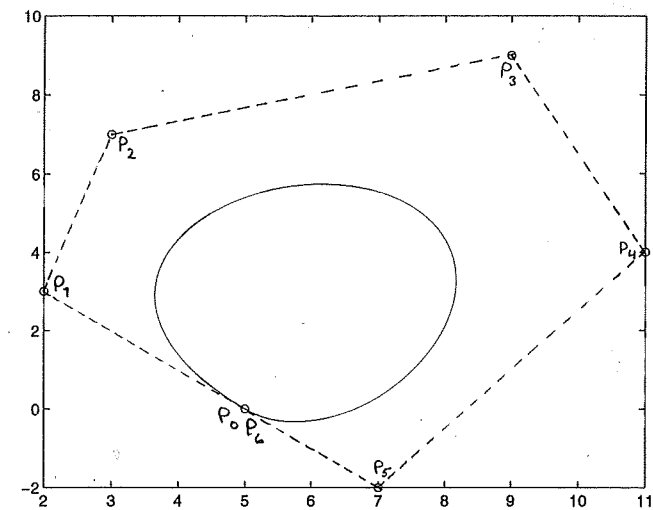
En Bézierkurva blir sluten i fall kontrollpunkterna P_0 och P_n sammanfaller.

Ex |

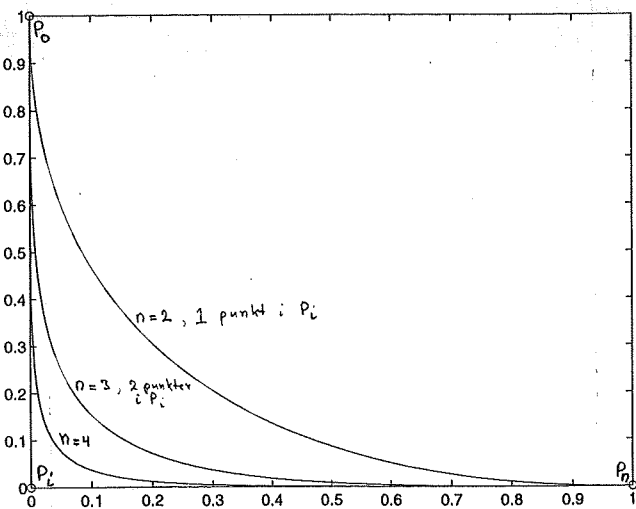


Vi ser att derivatan inte är kontinuerlig i P_0 i ovanstående exempel. En sluten kurva "utan hörn" erhålls om P_0, P_1, P_{n-1} och P_n ligger på en rät linje och $P_0 = P_n$.

Ex |



2. Man kan ta med samma kontrollpunkt flera gånger.



Metoderna 1. och 2. kan givetvis kombineras.

14.6 Sammansatta Bézierkurvor

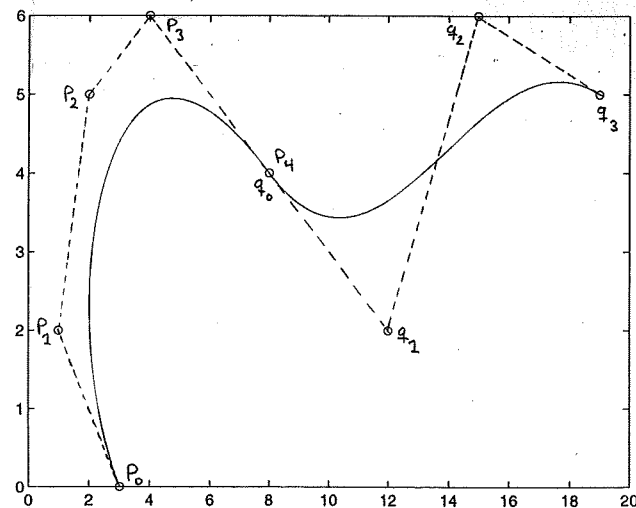
(225)

I praktiken utförs design med Bézierkurvor så att man först för hand gör en skiss över den kurva som man vill åstadkomma. Därefter väljer man kontrollpunkter som man antar att kan generera en Bézierkurva som liknar den önskade kurvan. Vanligen är den första Bézierkurvan inte tillräckligt bra. Följande steg blir att lägga till kontrollpunkter, ta bort eller flytta kontrollpunkter och eventuellt lägga till multipla kontrollpunkter.

Enligt Bézier kan en van designers åstadkomma en godtagbar Bézierkurva efter 3 eller 4 iterationer av processen.

Om kontrollpunkterna är många blir gradtalet på Bézierkurvan högt, och det kan löna sig att istället modellera kurvan med hjälp av flera Bézierkurvor. Då bör "ihopskärningen" ske så att derivatan blir kontinuerlig.

Ex) Vi skarvar ihop en fjärdegrads Bézierkurva med kontrollpunkterna P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 och en kubisk Bézierkurva med kontrollpunkterna Q_0, \dots, Q_3 .

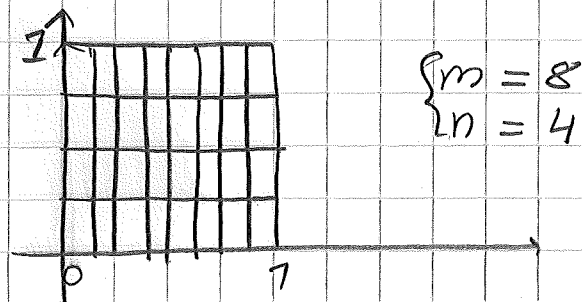


(226)

14.7 Bézierytor.

Antag att vi delar upp $[0,1] \times [0,1]$ i ett nätverk av punkter $(\frac{k}{m}, \frac{l}{n})$,

$k = 0, \dots, m$, och $l = 0, \dots, n$



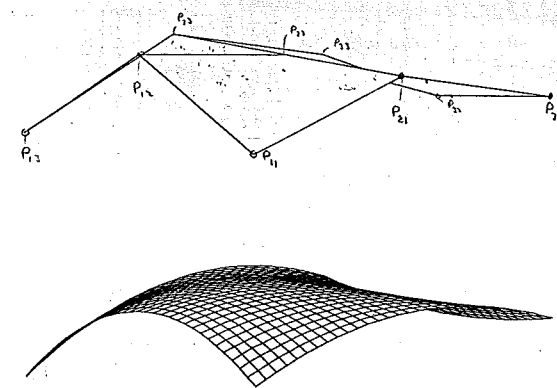
Till varje punkt $(\frac{k}{m}, \frac{l}{n})$ associeras ett värde $F(\frac{k}{m}, \frac{l}{n})$. Då ges Bézierytan av

$$(B_{m,n}F)(s,t) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \phi_k(s) \psi_l(t) F(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}),$$

där $\phi_k(s) = \binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k}$, $\psi_l(t) = \binom{n}{l} t^l (1-t)^{n-l}$, och $0 \leq s, t \leq 1$.

Interpolation erhålls i hörnpunkterna $(0,0), (0,1), (1,1)$ och $(1,0)$.

Ex) $m = n = 2$, 9 kontrollpunkter



Referenser:

(227)

- [1] Björck, A., Dahlquist, G.: "Numeriska metoder", 1969, Gleerup bokförlag, Lund.
- [2] Cheney, E.W.: "Introduction to Approximation theory", 1966, McGraw-Hill.
- [3] Cheney, E.W., Kincaid, D.: "Numerical Mathematics and Computing", second edition, 1985, Wadsworth.
- [4] Davis, P.J.: "Interpolation and Approximation", 1963, Blaisdell.
- [5] Eldén, L., Wittmeyer-Koch, L.: "Numerisk analys - en introduktion", 1987, Studentlitteratur.
- [6] Gordon, W.J., Riesenfeld, R.F.: "Bernstein-Bézier Methods for the Computer-Aided Design of Free-Form Curves and Surfaces", Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 21, No. 2, April 1974, pp. 293 - 310.
- [7] Lundquist, E., Sjöberg, A.: "Numerisk analys II", 1969, Studentlitteratur.
- [8] Mortenson, M.E.: "Geometric modelling", 1985, John Wiley & Sons.
- [9] Powell, M.J.D.: "Approximation theory and methods", 1981, Cambridge University Press.
- [10] Sjöberg, B.: "Hilbertrum", 1977, kompendium, Sigma.
- [11] — " —: "Funktionalanalys", 1978, — " —
- [12] — " —: "Inledning till den högre analysen", 1985, kompendium, Sigma.