13. B ri-funktioner

13.1 Grundläggande egenskaper.

Antag att vi har en oändlig mängd med knutpunkter

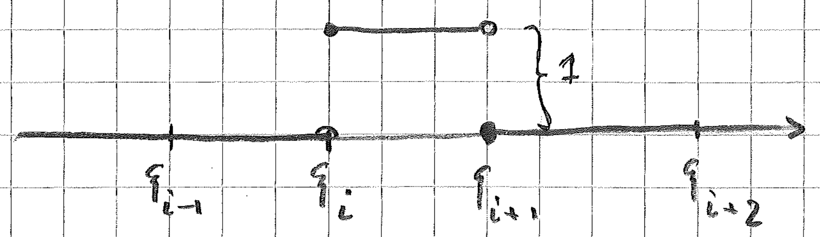
$$\ldots < \xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots,$$

så dan att $\lim_{i\to\infty} \xi_i = \infty$, $\lim_{i\to-\infty} \xi_i = -\infty$.

I praktiken är vi kanske endast intresserade av $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Våra B ri-funktioner blir beroende av valet av knutpunkter.

B ri-funktionerna av gradtal 0 definieras genom:

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & \xi_i \le x < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



$B_i^0(x)$ är diskontinuerlig, men högerkontinuerlig i varje punkt.

Vi noterar att $B_i^0(x)$ är en ri-funktion av gradtal 0, och att $B_1^0(x), \ldots, B_{n-1}^0(x)$ utgör en bas för $S(0; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, ty om

$$S(x) = b_i, \quad \xi_i \le x < \xi_{i+1}, \quad b_i = 0, \ i \notin \{1, \ldots, n\}$$

så kan vi skriva

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i B_i^0(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i B_i^0(x).$$

Definition. Med stödet av f avses den mängd av punkter x för vilka $f(x) \neq 0$.

Stödet för $B_i^0(x)$ är $[\xi_i, \xi_{i+1})$. Vidare noterar vi att

$$B_i^0(x) \ge 0 \quad \text{för alla } x \text{ och alla } i,$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1 \quad \text{för alla } x.$$

Om $x \in [\xi_n, \xi_{n+1})$ gäller $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = B_n^0(x) = 1$.

Utgående från B ri-funktioner av gradtal 0 kan man rekursivt generera B ri-funktioner av gradtal k.

Definition. Funktionerna $B_i^k(x)$ kallas B ri-funktioner av gradtal k och genereras rekursivt genom:

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k} - \xi_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\xi_{i+k+1} - x}{\xi_{i+k+1} - \xi_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x),$$

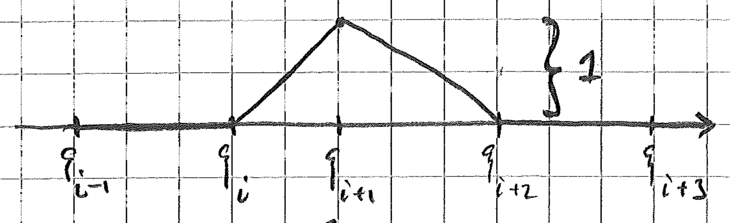
$$k = 1, 2, \ldots \quad \text{och} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Av definitionen inses att $B_i^1(x)$ är styckevis linjär, $B_i^2(x)$ är styckevis kvadratisk, ..., $B_i^k(x)$ består av styckvisa polynom av gradtal k. För $k=1$ erhålls då:

$$B_i^1(x) = \left(\frac{x - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}\right) B_i^0(x) + \left(\frac{\xi_{i+2} - x}{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}}\right) B_{i+1}^0(x)$$

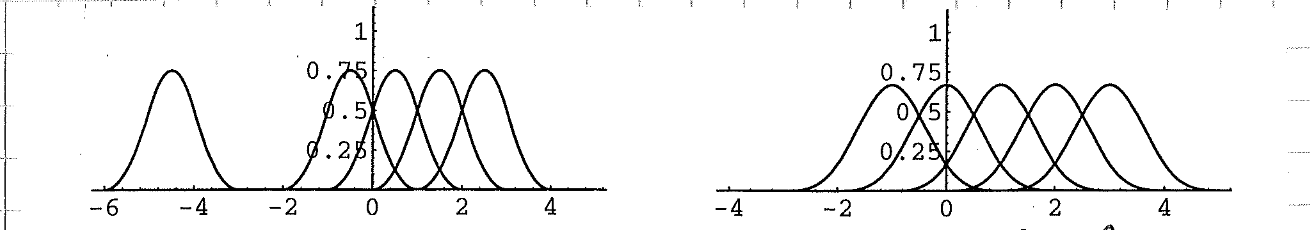
$$= \begin{cases} 0, & x \le \xi_i \text{ eller } x \ge \xi_{i+2} \\ \dfrac{x - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}, & \xi_i < x < \xi_{i+1} \\ \dfrac{\xi_{i+2} - x}{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}}, & \xi_{i+1} \le x < \xi_{i+2}. \end{cases}$$

$$\left(B_i^1(\xi_j) = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1, & i = j-1 \\ 0, & i \neq j-1 \end{cases} \right)$$



$B_i^1(x)$

Om vi väljer knutpunkterna till $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ erhåller vi följande utseende på $B_i^2(x)$ och $B_i^3(x)$:



$B_{-6}^2, B_{-2}^2, B_{-1}^2, B_0^2, B_1^2$ $\qquad$ $B_{-3}^3, B_{-2}^3, B_{-1}^3, B_0^3, B_1^3$

Vi visar att $B_i^k(x) = 0$ då $x \notin [\xi_i, \xi_{i+k+1})$, $k \geq 0$. Detta gäller för $k=0$. Antag att påståendet gäller för $k-1$, $k \geq 1$. Då gäller:

$$B_i^{k-1}(x) = 0, \quad \text{då } x \notin [\xi_i, \xi_{i+k})$$
$$B_{i+1}^{k-1}(x) = 0, \quad \text{då } x \notin [\xi_{i+1}, \xi_{i+k+1}).$$

Med stöd av rekursionsformeln för $B_i^k(x)$ erhålls då

$$x \notin [\xi_i, \xi_{i+k}) \cup [\xi_{i+1}, \xi_{i+k+1}) = [\xi_i, \xi_{i+k+1})$$
$$\Rightarrow B_i^k(x) = 0.$$

Induktion ger att påståendet gäller för alla k och i. Att $B_i^k(\xi_i) = 0$ följer direkt ur rekursionsformeln. Vi har alltså att

$$B_i^k(x) = 0 \quad \text{då } x \notin (\xi_i, \xi_{i+k+1}),$$

då $k \geq 1$. Vi skall visa att $B_i^k(x) > 0$ då

$x \in (\xi_i, \xi_{i+k+1})$, $k \geq 0$. Detta gäller för $k=0$. Antag att påståendet gäller för $k-1$, $k \geq 1$. Då gäller:

$$B_i^{k-1}(x) > 0, \quad \text{då } x \in (\xi_i, \xi_{i+k})$$
$$B_{i+1}^{k-1}(x) > 0, \quad \text{då } x \in (\xi_{i+1}, \xi_{i+k+1}).$$

I rekursionsformeln för $B_i^k(x)$ är koefficienterna

$$\frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k}-\xi_i} > 0, \quad \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} > 0,$$

då $x \in (\xi_i, \xi_{i+k+1})$. Vidare är antingen $B_i^{k-1}(x)$ eller $B_{i+1}^{k-1}(x)$ positiv för $x \in (\xi_i, \xi_{i+k+1})$. Alltså gäller:

$$B_i^k(x) > 0, \quad \text{då } x \in (\xi_i, \xi_{i+k+1}).$$

Fullständig induktion ger att påståendet gäller för alla $k \geq 0$ och alla i.

Tidigare har vi resonerat oss fram till att $B_i^k(x)$ består av styckevisa polynom av gradtal $\leq k$. Vi skall visa att $B_i^k(x)$ är en ν-funktion av gradtal k. Innan vi gör detta skall vi bevisa en viktig sats om derivatan av $B_i^k(x)$.

Sats 13.1.1. Derivatan av $B_i^k(x)$, $k \geq 1$, kan uttryckas i formen

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = \left(\frac{k}{\xi_{i+k}-\xi_i}\right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x).$$

Bevis: För $k=1$ erhålls

$$\frac{d}{dx} B_i^1(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi_i \\ \frac{1}{\xi_{i+1}-\xi_i}, & x = \xi_i \\ \frac{1}{\xi_{i+1}-\xi_i}, & \xi_i < x < \xi_{i+1} \\ -\frac{1}{\xi_{i+2}-\xi_{i+1}}, & \xi_{i+1} \leq x < \xi_{i+2} \\ 0, & x \geq \xi_{i+2}, \end{cases}$$

där vi har beräknat högerderivatan då $\begin{cases} x = \xi_i \\ x = \xi_{i+1} \end{cases}$ och $x = \xi_{i+2}$. Vidare gäller:

$$\frac{1}{\xi_{i+1}-\xi_i} B_i^0(x) - \frac{1}{\xi_{i+2}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^0(x) = \begin{cases} 0 \,, & x < \xi_i \\ \frac{1}{\xi_{i+1}-\xi_i} \,, & \xi_i \le x < \xi_{i+1} \\ -\frac{1}{\xi_{i+2}-\xi_{i+1}} \,, & \xi_{i+1} \le x < \xi_{i+2} \\ 0 \,, & x \ge \xi_{i+2} \end{cases}$$

Alltså gäller påståendet för $k = 1$.
Antag att påståendet gäller för $k-1$, $k \ge 2$.
Med stöd av rekursionsformeln för $B_i^k(x)$ erhåller vi då att

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k}-\xi_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\xi_{i+k}-\xi_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k}-\xi_i}\left(\frac{k-1}{\xi_{i+k-1}-\xi_i} B_i^{k-2}(x) - \frac{k-1}{\xi_{i+k}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-2}(x) \right) - \frac{1}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-1} + \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} \left(\frac{k-1}{\xi_{i+k}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-2}(x) - \frac{k-1}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+2}} B_{i+2}^{k-2}(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\xi_{i+k}-\xi_i}\left(\frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k-1}-\xi_i} B_i^{k-2}(x) + \frac{\xi_{i+k}-x}{\xi_{i+k}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-2}(x) \right) + \frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k}-\xi_i}\left(\qquad \right) - \frac{1}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}}\left(\frac{x-\xi_{i+1}}{\xi_{i+k}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-2}(x) + \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+2}} \cdot B_{i+2}^{k-2}(x) \right) + \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} \left(\qquad \right)$$

$$= \frac{k}{\xi_{i+k}-\xi_i} \cdot \frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k-1}-\xi_i} B_i^{k-2}(x) + \left[\frac{\xi_{i+k}-x}{(\xi_{i+k}-\xi_i)(\xi_{i+k}-\xi_{i+1})} - \frac{(k-1)(x-\xi_i)}{(\xi_{i+k}-\xi_i)(\xi_{i+k}-\xi_{i+1})} - \frac{(x-\xi_{i+1})}{(\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1})(\xi_{i+k}-\xi_{i+1})} + \frac{(\xi_{i+k+1}-x)(k-1)}{(\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1})(\xi_{i+k}-\xi_{i+1})} \right] B_{i+1}^{k-2}(x) - \frac{k}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+2}} \cdot \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} B_{i+2}^{k-2}(x)$$

$$=$$

$$= \frac{k}{\xi_{i+k}-\xi_i}\left(\frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k-1}-\xi_i} \cdot B_i^{k-2}(x) + \frac{\xi_{i+k}-x}{\xi_{i+k}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-2}(x) \right) - \frac{k}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} \cdot \left(\frac{x-\xi_{i+1}}{\xi_{i+k}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-2}(x) + \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+2}} \cdot B_{i+2}^{k-2}(x) \right)$$

$$= \frac{k}{\xi_{i+k}-\xi_i} B_i^{k-1}(x) - \frac{k}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) .$$

Genom fullständig induktion är då satsens påstående bevisat.

Nu kan vi visa att $B_i^k(x)$ är en ri-funktion av gradtal k. Av våra tidigare utredningar är det klart att $B_i^1(x)$ är en ri-funktion av gradtal 1, dvs. $B_i^1(x)$ är kontinuerlig, styckevis linjär och har kontinuerliga derivator av ordning 0. Antag nu att $B_i^{k-1}(x)$ är en ri-funktion av gradtal $k-1$, dvs. $B_i^{k-1}(x)$ är kontinuerlig och har kontinuerliga derivator av ordning $k-2$. Ur rekursionsformeln är det då klart att $B_i^k(x)$ är kontinuerlig och består av styckevisa k:te grads polynom. Sats 13.1.1 ger att

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = \frac{k}{\xi_{i+k}-\xi_i} \cdot B_i^{k-1}(x) - \frac{k}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} \cdot B_{i+1}^{k-1}(x),$$

vars högra led har kontinuerliga derivator av ordning $k-2$ på grund av induktionsantagandet. Alltså har $B_i^k(x)$ kontinuerliga derivator upp till ordning $k-1$.
Fullständig induktion ger då att $B_i^k(x)$ är en ri-funktion av gradtal k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Vårt nästa mål är att visa att $\{B_i^k(x),\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ utgör en bas för ri-funktionerna av gradtal k med knutpunkterna $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \ldots$.

Vi skall visa att $\{B_i^k(x),\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ är linjärt oberoende.

Låt C_i^k vara reella koefficienter, vi bildar linjär kombinationen

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k \left(\frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k}-\xi_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{\xi_{i+k+1}-x}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \right)$$

$$(*) \qquad = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[C_i^k \cdot \frac{x-\xi_i}{\xi_{i+k}-\xi_i} + C_{i-1}^k \cdot \frac{\xi_{i+k}-x}{\xi_{i+k}-\xi_i} \right] B_i^{k-1}(x)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^{k-1} B_i^{k-1}(x),$$

där

$$(**) \qquad C_i^{j-1} = \frac{C_i^j \cdot (x-\xi_i) + C_{i-1}^j (\xi_{i+j}-x)}{\xi_{i+j}-\xi_i}.$$

Med hjälp av $(*)$ och $(**)$ erhåller vi i k steg följande formel:

$$(***) \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k B_i^k(x) = \dots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^0 B_i^0(x),$$

varav framgår att $\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k B_i^k(x) = 0$ för alla x om och endast om $C_i^k = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
Alltså är $\{B_i^k(x),\ i = 0, \pm 1, \dots\}$ linjärt oberoende.
Varje ri-funktion $S(x)$ av gradtal k med avseende på knutpunkterna $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \dots$ kan skrivas som en linjärkombination av formen

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k B_i^k(x).$$

En ri-funktion $S(x)$ av gradtal k med knutpunkterna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ kan skrivas som en linjär kombination

$$S(x) = \sum_{i=-k+1}^{n-1} C_i^k B_i^k(x)$$

$\therefore$ $S(k; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ är av dimension $n+k-1$.

Observera att C_i^k i $(*)$ är oberoende av x, medan $C_i^{k-1}, C_i^{k-2}, \dots, C_i^0$ blir beroende av x.
Ur $(***)$ ser vi att om $\xi_m \le x < \xi_{m+1}$ så gäller:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k B_i^k(x) = C_m^0,$$

där C_m^0 kan beräknas ur $(**)$ om man känner $C_m^k, C_{m-1}^k, \dots, C_{m-k}^k$.

$$\begin{array}{ccccccc}
C_m^k & - & C_m^{k-1} & \cdots & C_m^1 & - & C_m^0 \\
C_{m-1}^k & - & C_{m-1}^{k-1} & & C_{m-1}^1 & & \\
C_{m-2}^k & & \vdots & \cdots & & & \\
\vdots & & C_{m-k+1}^{k-1} & & & & \\
C_{m-k}^k & & & & & &
\end{array}$$

Vi skall nu visa att $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = 1$ för alla x och alla $k \ge 0$.
Vi har noterat att detta gäller för $k = 0$.

Om vi väljer alla $C_i^k = 1$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så ser vi med stöd av $(**)$ att

$$C_i^{k-1} = \frac{1 \cdot (x-\xi_i) + 1 \cdot (\xi_{i+k}-x)}{\xi_{i+k}-\xi_i}$$

$$= 1, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ för alla } x.$$

Upprepad användning av $(**)$ ger att

$$C_i^k = C_i^{k-1} = \dots = C_i^0 = 1, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Alltså erhåller vi med stöd av $(***)$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1,$$

för alla x och alla $k \ge 0$.

Derivatan av en linjär kombination av $B_i^k(x)$ kan med stöd av Sats 13.1.1 uttryckas som:

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \frac{d}{dx} B_i^k(x)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i\left[\frac{k}{\xi_{i+k}-\xi_i}B_i^{k-1}(x) - \frac{k}{\xi_{i+k+1}-\xi_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x)\right]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[\frac{c_i k}{\xi_{i+k}-\xi_i} - \frac{c_{i-1}k}{\xi_{i+k}-\xi_i}\right]B_i^{k-1}(x)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i B_i^{k-1}(x),$$

där

$$d_i = k\cdot\frac{c_i-c_{i-1}}{\xi_{i+k}-\xi_i}.$$

B ri-funktionerna är användbara vid numerisk integration.

Sats 13.1.2. Följande integrationsformel gäller för $k \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{x} B_i^k(s)\,ds = \left(\frac{\xi_{i+k+1}-\xi_i}{k+1}\right)\sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x).$$

Bevis: Vi deriverar båda leden:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} B_i^k(s)\,ds = B_i^k(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\xi_{i+k+1}-\xi_i}{k+1}\right)\sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x)\right]$$

$$= \frac{\xi_{i+k+1}-\xi_i}{k+1}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{d}{dx}B_j^{k+1}(x)$$

$$=$$

$$= \frac{\xi_{i+k+1}-\xi_i}{k+1}\sum_{j=i}^{\infty}\left[\frac{k+1}{\xi_{j+k+1}-\xi_j}B_j^k(x) - \frac{k+1}{\xi_{j+k+2}-\xi_{j+1}}B_{j+1}^k(x)\right]$$

$$= (\xi_{i+k+1}-\xi_i)\left(\frac{B_i^k(x)}{\xi_{i+k+1}-\xi_i} + \sum_{j=i}^{\infty}\left[\frac{B_{j+1}^k(x)}{\xi_{j+k+2}-\xi_{j+1}} - \frac{B_{j+1}^k(x)}{\xi_{j+k+2}-\xi_{j+1}}\right]\right)$$

$$= B_i^k(x).$$

Derivatan av båda leden är lika. För $x \leq \xi_i$ är båda leden lika med noll, alltså gäller satsens påstående.

Nu erhåller vi en bekväm formel för obestämda integralen av en ri-funktion $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x)$, av gradtal k.

$$\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(t)\,dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i\int_{-\infty}^{x} B_i^k(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(c_i\cdot\frac{\xi_{i+k+1}-\xi_i}{k+1}\sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x)\right)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i B_i^{k+1}(x),$$

där

$$e_i = \frac{1}{k+1}\cdot\sum_{j=-\infty}^{i} c_j(\xi_{j+k+1}-\xi_j).$$

En bestämd integral kan evalueras genom att välja ett specifikt värde på x. Om man väljer $x = \xi_m$ erhålls:

$$\int_{-\infty}^{\xi_m}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(t)\,dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i B_i^{k+1}(\xi_m)$$

$$= \sum_{i=m-k-1}^{m-1} e_i B_i^{k+1}(\xi_m).$$

13.2 Interpolation med B ri-funktioner

(207)

Vi ställer oss frågan hur skall koefficienterna A_i bestämmas så att

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i B^k_{i-k}(x)$$

interpolerar datat (ξ_i, y_i), $i=1,\dots,n$, dvs

$$S(\xi_i) = y_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Om $k=0$ så ser vi direkt att

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i B_i^0(x)$$

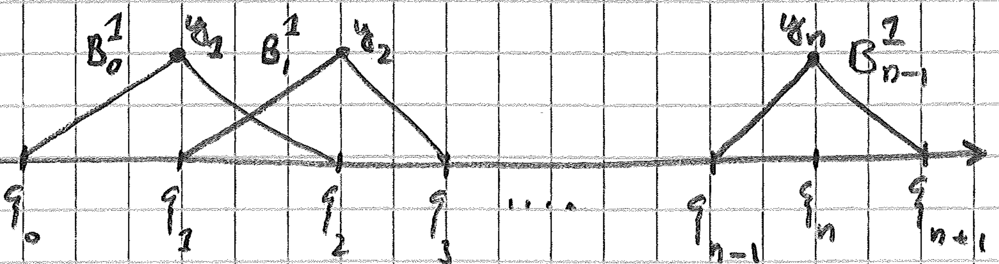
uppfyller interpolationsvillkoret, ty $B_i^0(\xi_i)=1$, och $B_j^0(\xi_i)=0$, om $i \neq j$.

Om $k=1$ så gäller $B^1_{i-1}(\xi_i)=1$ och $B^1_{i-1}(\xi_j)=0$ om $i\neq j$. Då erhåller vi $S(x)$ entydigt genom

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i B^1_{i-1}(x),$$

och interpolationsvillkoren är uppfyllda. Notera att vi använder $B_0^1,\dots,B^1_{n-1}$, och därmed behövs knutpunkterna $\xi_0,\dots,\xi_{n+1}$.

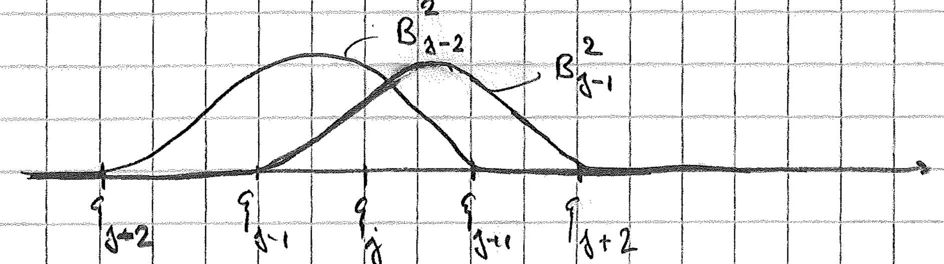
Om ξ_0 och ξ_{n+1} inte är givna kan dessa väljas så att ξ_1 är mittpunkt i intervallet $[\xi_0,\xi_2]$ och ξ_n är mittpunkt i $[\xi_{n-1},\xi_{n+1}]$.



(208)

I fallen $k=0,1$ bestäms A_i entydigt av interpolationsvillkoren. Detta gäller inte längre för $k \geq 2$.

I fallet $k=2$ skall vi först beräkna $S(\xi_j)$, $j=1,\dots,n$. Vi utnyttjar rekursionsformeln för B rö-funktioner:



$$(*)\quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i B^2_{i-2}(\xi_j) = A_j B^2_{j-2}(\xi_j) + A_{j+1} B^2_{j-1}(\xi_j)$$

$$= A_j\left(\frac{\xi_j-\xi_{j-2}}{\xi_j-\xi_{j-2}} \underbrace{B^1_{j-2}(\xi_j)}_{=0} + \frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{\xi_{j+1}-\xi_{j-1}} \underbrace{B^1_{j-1}(\xi_j)}_{=1}\right)$$

$$+ A_{j+1}\left(\frac{\xi_j-\xi_{j-1}}{\xi_{j+1}-\xi_{j-1}} \underbrace{B^1_{j-1}(\xi_j)}_{=1} + \frac{\xi_{j+2}-\xi_j}{\xi_{j+2}-\xi_j} \underbrace{B^1_j(\xi_j)}_{=0}\right)$$

$$= \frac{1}{\xi_{j+1}-\xi_{j-1}}\left[A_j(\xi_{j+1}-\xi_j) + A_{j+1}(\xi_j-\xi_{j-1})\right],$$

$$j = 1,\dots,n.$$

Om vi nu pålägger interpolationskraven $S(\xi_i)=y_i$, $i=1,\dots,n$ erhåller vi med stöd av (*) ekvationerna

$$(**)\quad A_j(\xi_{j+1}-\xi_j) + A_{j+1}(\xi_j-\xi_{j-1}) = y_j(\xi_{j+1}-\xi_{j-1}), \quad j=1,\dots,n.$$

Vi erhåller ett ekvationssystem med n st. ekvationer och $(n+1)$ st. obekanta $A_1,\dots,A_{n+1}$.

Ett sätt att lösa (**) är att tilldela A_1 ett värde och rekursivt lösa ut $A_2,\dots,A_{n+1}$.

Då erhålls rekursionsformeln:

$$A_{j+1} = \alpha_j + \beta_j A_j, \quad j = 1,\dots,n,$$

där

$$(***)\quad \begin{cases} \alpha_j = y_j \cdot \dfrac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \\[2ex] \beta_j = \dfrac{\xi_j - \xi_{j+1}}{\xi_j - \xi_{j-1}}, \quad j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Eftersom vi använder $B^2_{-1}(x),\dots,B^2_{n-1}(x)$ behövs även en $\xi_{-1}, \xi_0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}$. Om dessa ej är givna kan man välja ξ_0 så att ξ_1 är mittpunkt i $[\xi_0, \xi_2]$, ξ_{-1} så att ξ_0 är mittpunkt i $[\xi_{-1}, \xi_1]$ och likadant för ξ_{n+1} och ξ_{n+2}.

Vi noterar att

$$A_2 = \alpha_1 + \beta_1 A_1 = \gamma_1 + \delta_1 A_1, \quad \begin{cases} \gamma_1 := \alpha_1 \\ \delta_1 := \beta_1 \end{cases}$$

$$A_3 = \alpha_2 + \beta_2 A_2 = \alpha_2 + \beta_2 \gamma_1 + \beta_2 \delta_1 A_1 = \gamma_2 + \delta_2 A_1, \quad \begin{cases} \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 \gamma_1 \\ \delta_2 = \beta_2 \delta_1 \end{cases}.$$

Antag att $A_k = \gamma_{k-1} + \delta_{k-1} A_1$, $\begin{cases} \gamma_{k-1} = \alpha_{k-1} + \beta_{k-1}\gamma_{k-2} \\ \delta_{k-1} = \beta_{k-1}\delta_{k-2} \end{cases}$.

Då erhålls:

$$A_{k+1} = \alpha_k + \beta_k A_k = \alpha_k + \beta_k \gamma_{k-1} + \beta_k \delta_{k-1} A_1$$

Vi erhåller alltså rekursivt att:

$$(****)\quad A_{j+1} = \gamma_j + \delta_j A_1, \quad 1 \le j \le n,$$

där γ_j och δ_j ges av:

$$\begin{cases} \gamma_1 := \alpha_1 \\ \gamma_j = \alpha_j + \beta_j \gamma_{j-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta_1 := \beta_1 \\ \delta_j = \beta_j \delta_{j-1} \end{cases}, \quad 2 \le j \le n.$$

Nu bör man välja A_1 så att uttrycket

$$F(A_1,\dots,A_{n+1}) = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_{n+1}^2,$$

blir så litet som möjligt. Detta för att koefficienterna A_i till beloppet skall bli små.

På basen av (***) erhåller vi då att:

$$F(A_1,\dots,A_{n+1}) = A_1^2 + (\gamma_1 + \delta_1 A_1)^2 + \dots + (\gamma_n + \delta_n A_1)^2$$

Derivatans nollställe ges av

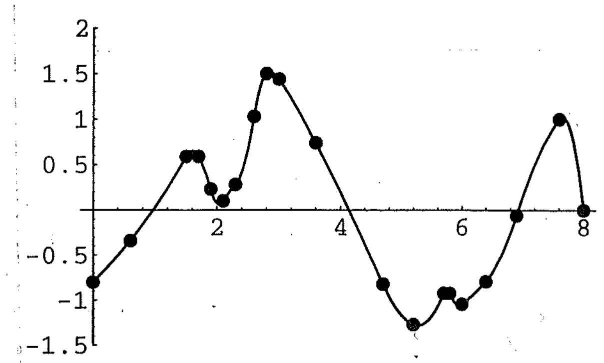
$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 2A_1 + 2(\gamma_1 + \delta_1 A_1)\delta_1 + \dots + 2(\gamma_n + \delta_n A_1)\delta_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A_1 = -\frac{\gamma_1\delta_1 + \dots + \gamma_n\delta_n}{1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_n^2}.$$

Vi kan alltså bestämma $S(x) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i B^2_{i-2}(x)$ genom att beräkna α_j, β_j ur (***), γ_i, δ_i ur (****), A_1 som ovan och $A_2,\dots,A_{n+1}$ ur (****).

Ex: Vi betraktar samma exempel som finns på sida 188.



$$S(x) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i \cdot B^2_{i-2}(x) = \sum_{i=1}^{27} A_i B^2_{i-2}(x)$$

13.3 Approximering med B ri-funktioner. Schoenberg's process.

En icke-interpolerande process för approximering av funktioner, eller utjämning av data, presenterades 1967 av Schoenberg. I den kvadratiska versionen definierar vi ri-funktionen $S(x)$ genom

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i) B_i^2(x),$$

$$\tau_i = \frac{1}{2}(\xi_{i+1} + \xi_{i+2}).$$

Mätvärden tas mitt emellan knutpunkterna.

Man kan visa att $S(x)$ har följande egenskaper:

1] Om $f(x) = ax + b$, så är $S(x) = f(x)$.

2] Om $f(x) \geq 0$ för alla x, så är $S(x) \geq 0$ för alla x.

3] $\max_x |S(x)| \leq \max_x |f(x)|$

4] Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och om $\delta = \max |\xi_{i+1} - \xi_i|$, så gäller för $x \in [a,b]$

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \max_{a \leq u \leq v \leq u+\delta \leq b} |f(u) - f(v)|.$$

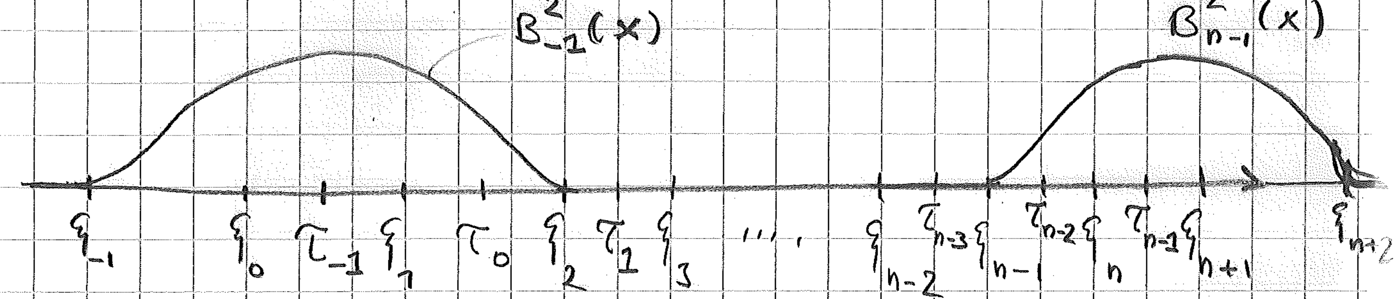
5] Grafen av S skär inte någon linje i planet flera gånger än grafen av f.

Egenskap 5] uttrycker en formbevarande egenskap. S borde inte "svänga mera än f".

Om vi har knutpunkterna $\xi_1, \ldots, \xi_n$ som är av intresse och önskar bestämma $S(x)$ på $[\xi_1, \xi_n]$, så behövs även ξ_{-1}, ξ_0 och ξ_{n+1}, ξ_{n+2}.

Vi erhåller då $S(x)$ genom

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n-1} f(\tau_i) B_i^2(x), \quad \tau_i = \frac{1}{2}(\xi_{i+1} + \xi_{i+2}).$$



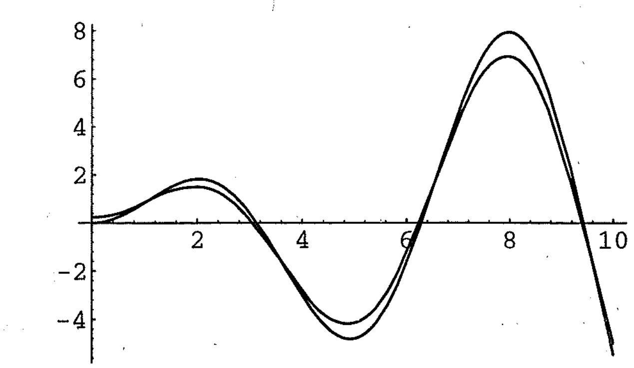
Ex] Vi tillämpar Schoenberg's process på $f(x) = x \cdot \sin x$ på intervallet $[0,10]$.

$\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 2$, …, $\xi_{10} = 9$, $\xi_{11} = 10$. $n = 11$.

$\xi_0 = -1$, $\xi_{-1} = -2$, $\xi_{12} = 11$, $\xi_{13} = 12$.

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{10} f(\tau_i) B_i^2(x) =$$

$$= \sum_{i=-1}^{10} \frac{1}{2}(\xi_{i+1} + \xi_{i+2}) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\xi_{i+1} + \xi_{i+2})\right) \cdot B_i^2(x).$$



Ex] $S(x) = \sum_{i=-2}^{n-1} f(\tau_i) B_i^3(x)$, $\tau_i = \frac{1}{3}(\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \xi_{i+3})$