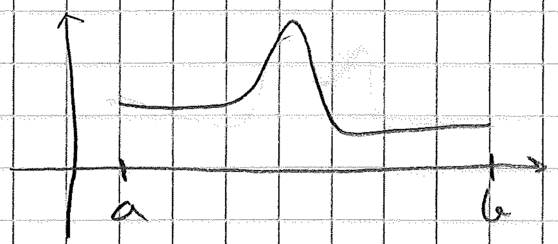
12. Ri-funktioner

12.1 Inledning

Om man vill approximera en funktion f för $-\infty < x < \infty$ eller en funktion av nedanstående typ:



Så är det ofta svårt att åstadkomma en bra approximation om man kräver att approximanten skall vara ett n:te gradspolynom, eftersom varje polynom $\neq 0$ blir obegränsat då $|x| \to \infty$.
Om man har givet m stycken mätvärden $f(x_i)$, $i = 1,\dots,m$, och vill approximera f med en interpolerande funktion så är approximation med ett enda polynom ofta olämpligt, speciellt om m är stort. Då kan man vänta sig att polynomet oscillerar kraftigt mellan datapunkterna.

En lösning på ovanstående problem är att approximera f med en funktion $S \in C[a,b]$ som består av styckvisa polynom. Speciellt Ri-funktioner har visat sig användbara.

Definition. $S \in C[a,b]$ är en ri-funktion av gradtal k om det finns knutpunkter $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ sådana att

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b,$$

och S är ett polynom av gradtal $\leq k$ i varje intervall $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 0,\dots,n-1$, och om $S \in C^{k-1}[a,b]$.
Mängden av ri-funktioner av gradtal k med knutpunkterna $\xi_0,\dots,\xi_n$ betecknas $S(k; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$.

12.2 Linjära ri-funktioner

Låt $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$ vara givna knutpunkter i intervallet $[a,b]$. Låt $f_0,\dots,f_n$ vara funktionsvärden

$$f_i = f(\xi_i), \quad i = 0,\dots,n.$$

En linjär ri-funktion $S(x)$ uppfyller kraven:

$$S \in C[a,b],$$
$$S(\xi_i) = f_i, \quad i = 0,\dots,n,$$
$$S(x) = a_i(x - \xi_i) + b_i, \quad x \in [\xi_i, \xi_{i+1}].$$

Interpolationsvillkoret ger:

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} \\ b_i = f_i \end{cases}, \quad i = 0,\dots,n-1.$$

$S(1; \xi_0, \dots, \xi_n)$ är av dimension $n+1$. Basfunktioner $l_0, \dots, l_n$ erhålls genom att sätta

$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\xi_1 - x}{\xi_1 - \xi_0}, & \xi_0 \leq x \leq \xi_1, \\ 0, & \xi_1 \leq x \leq \xi_n \end{cases}$$

$\vdots$

$$l_i(x) = \begin{cases} 0, & \xi_0 \leq x \leq \xi_{i-1} \\ \dfrac{x - \xi_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}, & \xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i \\ \dfrac{\xi_{i+1} - x}{\xi_{i+1} - \xi_i}, & \xi_i \leq x \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \xi_{i+1} \leq x \leq \xi_n \end{cases}, \quad 0 < i < n$$

$\vdots$

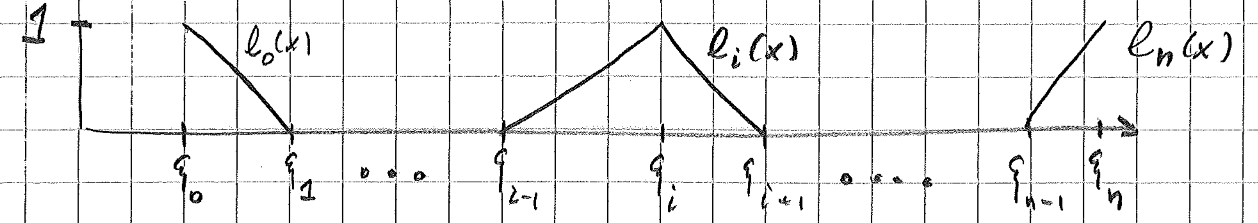
$$l_n(x) = \begin{cases} 0, & \xi_0 \leq x \leq \xi_{n-1} \\ \dfrac{x - \xi_{n-1}}{\xi_n - \xi_{n-1}}, & \xi_{n-1} \leq x \leq \xi_n \end{cases}.$$

Då gäller

$$l_i(\xi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

och

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i(x).$$



Basfunktionerna $l_i(x)$ är linjära B-ri-funktioner.

Om $f \in C^2[\xi_0, \xi_n]$ så gäller med stöd av sats 4.3.1 att

$$f(x) - S(x) = \frac{f''(\eta_i)}{2}(x-\xi_i)(x-\xi_{i+1}), \quad x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \ \eta_i \in (\xi_i, \xi_{i+1}).$$

Alltså bör knutpunkter ξ_i placeras ut tätare i intervall där f har stor variation ($|f''(x)|$ är stor).

Sats 12.2.1. Givet knutpunkterna $\xi_0, \dots, \xi_n$. Om g är en funktion som interpolerar f, $g(\xi_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, och $\int_{\xi_0}^{\xi_n} (g'(x))^2 dx$ är begränsad, så gäller för den linjära ri-funktionen $S(x)$ att:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} (S'(x))^2 dx \leq \int_{\xi_0}^{\xi_n} (g'(x))^2 dx.$$

Bevis: Sätt $h(x) = g(x) - S(x)$. Då gäller:

$$h(\xi_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Vidare gäller:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} (g'(x))^2 dx = \int_{\xi_0}^{\xi_n} (S'(x))^2 dx + \int_{\xi_0}^{\xi_n} (h'(x))^2 dx + 2\int_{\xi_0}^{\xi_n} S'(x) h'(x) dx$$

beviset är klart om $\int_{\xi_0}^{\xi_n} S'(x) h'(x) dx = 0$.

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} S'(x) h'(x) dx = \underbrace{\left[S'(x) \cdot h(x)\right]_{\xi_0}^{\xi_n}}_{=0} - \int_{\xi_0}^{\xi_n} \underbrace{S''(x)}_{=0} h(x) dx = 0. \square$$

12.3 Kvadratiska ri-funktioner

En kvadratisk ri-funktion $S(x)$ med knutpunkterna $a = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = b$ uppfyller kraven:

$$\begin{aligned}
&S \in C[a,b] \\
&S(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 0, \dots, n \\
&S' \in C[a,b] \\
&\lim_{x \to \xi_{i+1}^-} S_i'(x) = \lim_{x \to \xi_{i+1}^+} S_{i+1}'(x), \quad i = 0, \dots, n-2 \\
&S_i(x) = \alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i, \quad x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \ i = 0, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Vi har n delintervall $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ och därmed $3n$ parametrar $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ att bestämma.

$S_0(\xi_0) = f_0$, $S_{n-1}(\xi_n) = f_n$, $S_i(\xi_{i+1}) = f_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-2$
$S_{i+1}(\xi_{i+1}) = f_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-2$ ger totalt $2n$ villkor.

$$\lim_{x \to \xi_{i+1}^-} S_i'(x) = \lim_{x \to \xi_{i+1}^+} S_{i+1}'(x), \quad i = 0, \dots, n-2$$

ger $n-1$ villkor.

Totalt har vi alltså $3n-1$ villkor och $3n$ parametrar att bestämma. För att bestämma $S(x)$ entydigt måste vi då tillföra ett extra villkor på S. Man kan t.ex. sätta

$$\lim_{x \to \xi_0^+} S_0'(x) = f'(\xi_0),$$

eller något annat värde, t.ex. en uppskattning av $f'(\xi_0)$.

Vi skall rekursivt konstruera $S(x)$. Sätt (177)

$$S(x) = S_i(x), \quad \xi_i \le x \le \xi_{i+1}, \quad i = 0,\dots,n-1.$$

Då gäller $S(x_i) = f_i$, $i = 0,\dots,n$. Eftersom $S \in C^1[a,b]$ kan vi sätta

$$z_i := S'(\xi_i), \quad i = 0,\dots,n,$$

där värdena $z_1, z_2, \dots, z_n$ är obekanta och där z_0 kan ges ett godtyckligt värde, t.ex. $z_0 = f'(\xi_0)$. Nu kan S_i, $i = 0,\dots,n$, uttryckas i formen:

$$(*)\quad \begin{cases} S_i(x) = \dfrac{z_{i+1} - z_i}{2(\xi_{i+1} - \xi_i)}(x - \xi_i)^2 + z_i(x - \xi_i) + f_i, \\[2ex] S_i'(x) = \dfrac{z_{i+1} - z_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}(x - \xi_i) + z_i, \end{cases}$$

ty

$$S_i(\xi_i) = f_i$$

$$S_i'(\xi_i) = z_i$$

$$S_i'(\xi_{i+1}) = z_{i+1},$$

bestämmer entydigt $S_i(x)$. Kravet $S_i(\xi_{i+1}) = f_{i+1}$ ger:

$$\frac{(z_{i+1} - z_i)}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) + z_i(\xi_{i+1} - \xi_i) + f_i = f_{i+1}$$

$$\iff$$

$$(**)\quad z_{i+1} = -z_i + 2\cdot\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}\right), \quad i = 0,\dots,n-1.$$

Eftersom z_0 kan väljas godtyckligt erhåller vi följande algoritm för beräkning av $S(x)$.

(178)

1° Välj z_0 godtyckligt, t.ex. $z_0 = f'(\xi_0)$.

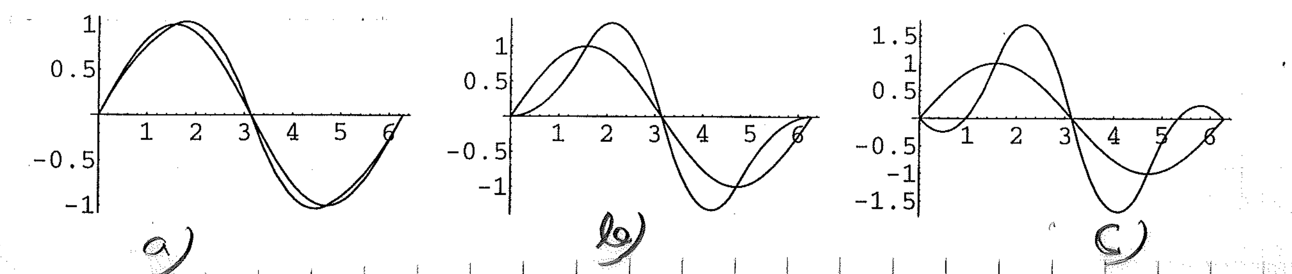
2° Beräkna $z_1,\dots,z_n$ ur $(**)$

3° Bestäm $S_i(x)$, $i = 0,\dots,n-1$, ur $(*)$.

Ex: Låt $(\xi_0,\dots,\xi_4) = (0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

$y_i = \sin(\xi_i)$, $i = 0,\dots,4$, $y = (0, 1, 0, -1, 0)$

Vi väljer a) $z_0 = 1$ b) $z_0 = 0$, c) $z_0 = -1$



a) b) c)

L_∞-felet stort då z_0 avviker mycket från $f'(\xi_0)$!

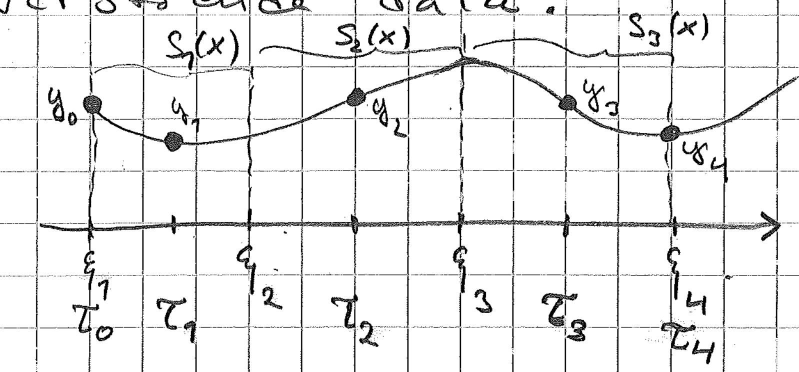
12.4 Subbotins kvadratiska ri-funktion (1967)

Antag att vi har knutpunkterna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ och känner $y_i = f(\tau_i)$, $i = 0,\dots,n$, där

$$\tau_0 = \xi_1, \quad \tau_n = \xi_n,$$

$$\tau_i = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_{i+1}), \quad 1 \le i \le n-1.$$

Vi vill anpassa en kvadratisk ri-funktion till ovanstående data.



Vi har $n-1$ st. kvadratiska polynom $S_i(x)$, (179)
$i=1,\dots,n-1$ att bestämma. Alltså $3(n-1)$ parametrar.

Kraven $S_i(\tau_i)=y_i$, $i=1,\dots,n-1$ och $S_1(\tau_0)=y_0$, $S_{n-1}(\tau_n)=y_n$ ger totalt $n+1$ villkor

Kravet $\lim\limits_{x\to\xi_{i+1}^-} S_i(x)=\lim\limits_{x\to\xi_{i+1}^+} S_{i+1}(x)$, $i=1,\dots,n-2$

ger $n-2$ villkor.

Kravet $\lim\limits_{x\to\xi_{i+1}^-} S_i'(x)=\lim\limits_{x\to\xi_{i+1}^+} S_{i+1}'(x)$, $i=1,\dots,n-2$

ger $n-2$ villkor.

Totalt erhålls $n+1+2(n-2)=3(n-1)$ villkor. Då kan parametrarna för $S(x)$ bestämmas entydigt utan extra villkor.

Sätt $h_i=\xi_{i+1}-\xi_i$, $i=1,\dots,n-1$ och $z_i=S'(\xi_i)$, $i=1,\dots,n$. Värdena z_i är obekanta och skall bestämmas. $S_i(x)$, $i=1,\dots,n-1$, kan skrivas:

$$(*)\quad S_i(x)=y_i+\frac{1}{2}(z_{i+1}+z_i)(x-\tau_i)+\frac{1}{2h_i}(z_{i+1}-z_i)(x-\tau_i)^2,$$

ty

$$S_i(\tau_i)=y_i,$$

$$S_i'(\xi_i)=\frac{1}{2}(z_{i+1}+z_i)+\frac{1}{h_i}(z_{i+1}-z_i)(\xi_i-\tau_i)$$

$$=\frac{1}{2}(z_{i+1}+z_i)+\frac{1}{\xi_{i+1}-\xi_i}(z_{i+1}-z_i)\left(\xi_i-\frac{1}{2}(\xi_i+\xi_{i+1})\right)$$

$$=z_i$$

$$S_i'(\xi_{i+1})=\dots=z_{i+1},$$

vilket entydigt bestämmer $S_i(x)$.
Kravet $S_1(\tau_0)=y_0$ ger ekvationen

$$y_1+\frac{1}{2}(z_2+z_1)(\tau_0-\tau_1)+\frac{1}{2h_1}(z_2-z_1)(\tau_0-\tau_1)^2=y_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y_1+\frac{1}{2}(z_2+z_1)\left(-\frac{h_1}{2}\right)+\frac{1}{2h_1}(z_2-z_1)\left(-\frac{h_1}{2}\right)^2=y_0$$

$$\Leftrightarrow$$

(180)

$$y_1-\frac{h_1}{4}z_1-\frac{h_1}{4}z_2+\frac{h_1}{8}z_2-\frac{h_1}{8}z_1=y_0 \quad \Big|\cdot 8$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(**)\quad 3h_1z_1+h_1z_2=8(y_1-y_0)$$

Kravet $S_{n-1}(\tau_n)=y_n$ ger med liknande utredningar att

$$(***)\quad h_{n-1}z_{n-1}+3h_{n-1}z_n=8(y_n-y_{n-1})$$

Kravet $S_{i-1}(\xi_i)=S_i(\xi_i)$, $i=2,\dots,n-1$ ger efter långa uträkningar ekvationerna

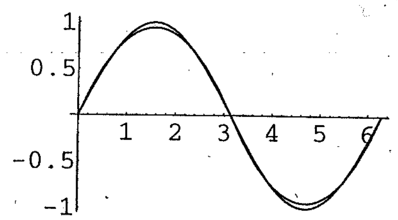
$$(****)\quad h_{i-1}z_{i-1}+3(h_{i-1}+h_i)z_i+h_iz_{i+1}=8(y_i-y_{i-1}),\ 2\le i\le n-1.$$

Vi kan nu med $(**)$, $(***)$ och $(****)$ ställa upp ett tridiagonalt ekvationssystem för beräkning av de obekanta $z_1,\dots,z_n$.

$$\begin{bmatrix} 3h_1 & h_1 & 0 & \cdots & & & \\ h_1 & 3(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & & \\ 0 & h_2 & 3(h_2+h_3) & h_3 & 0 & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & h_{n-2} & 3(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 0 & h_{n-1} & 3h_{n-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}=8\begin{bmatrix} y_1-y_0 \\ y_2-y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n-y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$S_i(x)$, $i=1,\dots,n-1$, erhålls sedan ur $(*)$.

Ex $\xi_1,\dots,\xi_5=\left(0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
$\tau_0,\dots,\tau_5=\left(0,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$
$y_i=\sin\tau_i$, $i=0,\dots,5$. $y=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0\right)$

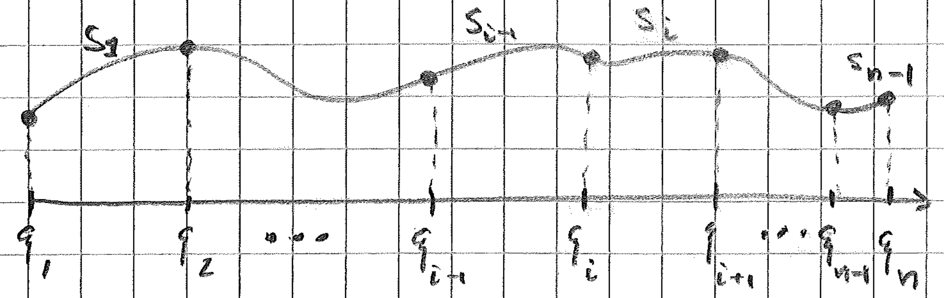


Om man vill använda kvadratiska ri-funktioner är Subbotins ri-funktion att föredra.

12.5 Kubiska ri-funktioner

Låt $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$ vara givna knutpunkter och $f_i = f(\xi_i)$, $i = 1,\ldots,n$, n st. mätvärden.
$S(x)$ är en interpolerande kubisk ri-funktion om:

1. $S \in C^2[\xi_1, \xi_n]$
2. $S(\xi_i) = f_i$, $i = 1,\ldots,n$
3. $S(x) = S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$.



$S(x)$ är sammansatt av $(n-1)$ st. kubiska polynom.
Vi har $4(n-1)$ st. parametrar att bestämma.

Kraven $S_i(\xi_i) = f_i$, $i = 1,\ldots,n-1$ och $S_i(\xi_{i+1}) = f_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1$ ger totalt $2(n-1)$ villkor.

Kraven $S_i'(\xi_{i+1}) = S_{i+1}'(\xi_{i+1})$, $i = 1,\ldots,n-2$ och $S_i''(\xi_{i+1}) = S_{i+1}''(\xi_{i+1})$, $i = 1,\ldots,n-2$ ger totalt $2(n-2)$ villkor.

Vi har totalt $2(n-1) + 2(n-2) = 4n-6$ villkor.
För att få $S(x)$ entydigt bestämd måste vi ange 2 extra villkor.

Vanligen kräver man:

$S''(\xi_1) = 0$, $S''(\xi_n) = 0$, naturlig ri-funktion,

eller

$$\begin{cases} S'(\xi_1) = f'(\xi_1) \\ S'(\xi_n) = f'(\xi_n) \end{cases} \quad \text{rätta randvillkor.}$$

Om man känner $f'(\xi_1)$ och $f'(\xi_n)$, eller kan uppskatta värdena, så ger en kubisk ri-funktion med rätta randvillkor en bättre approximation av f i närheten av ξ_1 och ξ_n, (ifall inte $f'' \approx 0$ i ξ_1 och ξ_n).

För att bestämma $S_i(x)$ gör vi ansatsen

$$S_i(x) = f_i + S_i'(\xi_i)(x-\xi_i) + \frac{S_i''(\xi_i)}{2}(x-\xi_i)^2 + \frac{S_i'''(\xi_i)}{6}(x-\xi_i)^3 .$$

$S_i'(x)$ och $S_i''(x)$ blir då:

$$S_i'(x) = S_i'(\xi_i) + S_i''(\xi_i)(x-\xi_i) + \frac{S_i'''(\xi_i)}{2}(x-\xi_i)^2$$

$$S_i''(x) = S_i''(\xi_i) + S_i'''(\xi_i)(x-\xi_i) .$$

Vi inför beteckningen

$$h_i = \xi_{i+1} - \xi_i \quad , \; i = 1,\ldots,n-1,$$

för avståndet mellan knutpunkterna. Kravet att S'' skall vara kontinuerlig i de inre knutpunkterna ger

$$S_i''(\xi_{i+1}) = S_{i+1}''(\xi_{i+1}) \quad , \; i = 1,\ldots,n-2$$

Enligt ovan erhålls då

$$S_i''(\xi_i) + S_i'''(\xi_i) \cdot h_i = S_{i+1}''(\xi_{i+1}) + 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S_i'''(\xi_i) = \frac{S_{i+1}''(\xi_{i+1}) - S''(\xi_i)}{h_i} \quad , \; i = 1,\ldots,n-2.$$

Vi inför beteckningen:

$$\begin{cases} z_i = S_i''(\xi_i) \quad , \; i = 1,\ldots,n-1. \\ z_n = S_{n-1}''(\xi_n) \end{cases}$$

(183)

Vi kan nu skriva $S_i(x)$ i formen:

$$(*)\quad S_i(x) = f_i + S_i'(\xi_i)(x-\xi_i) + \frac{z_i}{2}(x-\xi_i)^2 + \frac{z_{i+1}-z_i}{6h_i}(x-\xi_i)^3,$$
$$i = 1,\dots,n-1.$$

Derivatan av $S_i(x)$ blir då

$$S_i'(x) = S_i'(\xi_i) + z_i(x-\xi_i) + \frac{z_{i+1}-z_i}{2h_i}(x-\xi_i)^2$$
$$i = 1,\dots,n-1$$

Nu är $S_i'(\xi_i)$ och z_i obekanta. Kravet $S_i(\xi_i) = f_i$ ser vi att uppfylls av $(*)$. Nu kräver vi att $S_i(\xi_{i+1}) = f_{i+1}$, vilket ger:

$$f_i + S_i'(\xi_i)\cdot h_i + \frac{z_i}{2}h_i^2 + \frac{z_{i+1}-z_i}{6}\cdot h_i^2 = f_{i+1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(**)\quad S_i'(\xi_i) = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(z_{i+1}+2z_i\right),\ i=1,\dots,n-1.$$

Vi har alltså uttryckt $S_i'(\xi_i)$ med hjälp av z_i. Då återstår att bestämma z_i. Kravet

$$S_i'(\xi_{i+1}) = S_{i+1}'(\xi_{i+1}),\quad i=1,\dots,n-2$$

ger

$$S_i'(\xi_i) + z_i\cdot h_i + \frac{z_{i+1}-z_i}{2}\cdot h_i = S_{i+1}'(\xi_{i+1})$$

(184)

Nu använder vi $(**)$ och erhåller:

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(z_{i+1}+2z_i) + z_i h_i + \frac{z_{i+1}-z_i}{2}h_i =$$
$$= \frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(z_{i+2}+2\cdot z_{i+1}).$$

Ovanstående kan förenklas till

$$(***)\quad h_i z_i + 2(h_i+h_{i+1})z_{i+1} + h_{i+1}z_{i+2} = 6\left(\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}\right)$$
$$i = 1,2,\dots,n-2$$

För bestämning av en naturlig kubisk ri-funktion, med $z_1 = z_n = 0$, erhåller vi med stöd av $(***)$ följande diagonalt dominanta tridiagonala ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & 0 & \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 0 \\ k_2-k_1 \\ k_3-k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1}-k_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

där vi har infört beteckningen:

$$k_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i},\quad i = 1,\dots,n-1.$$

Den naturliga kubiska ri-funktionen $S(x)$ kan då bestämmas genom att

1° Bestämma $z_2, \dots, z_{n-1}$ genom lösning av det tridiagonala ekvationssystemet. (kan göras med den algoritm som delats ut)

2° Bestämning av $S_i'(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ ur $(**)$

3° Bestämning av $S_i(x)$, $i = 1, \dots, n-1$ ur $(*)$.

Ett alternativt sätt att lösa ekvationssystemet 1° ges av följande algoritm:

A. Beräkna för $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{cases} h_i = \xi_{i+1} - \xi_i \\ k_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \end{cases}$$

B. Sätt

$$\begin{cases} u_2 = 2 \cdot (h_1 + h_2) \\ v_2 = 6 \cdot (k_2 - k_1) \end{cases}$$

och beräkna rekursivt för $i = 3, 4, \dots, n-1$

$$\begin{cases} u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - \dfrac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} \\ v_i = 6(k_i - k_{i-1}) - \dfrac{h_{i-1} v_{i-1}}{u_{i-1}} \end{cases}$$

C. Sätt $z_n = 0$, $z_1 = 0$ och beräkna rekursivt för $i = n-1, n-2, \dots, 2$.

$$z_i = \frac{v_i - h_i z_{i+1}}{u_i}.$$

Om vi bestämmer en kubisk ri-funktion med rätta randvillkor så kan vi utnyttja ekvationerna $(***)$ och så ger kraven $S_1'(\xi_1) = f'(\xi_1)$, $S_{n-1}'(\xi_n) = f'(\xi_n)$ med stöd av $(**)$ och uttrycket för $S_i(x)$ ekvationerna

$$\begin{cases} h_1(z_2 + 2z_1) = 6(k_1 - f'(\xi_1)) \\ h_{n-1}(z_{n-1} + 2z_n) = 6(f'(\xi_n) - k_{n-1}) \end{cases}$$

För bestämning av en kubisk ri-funktion med rätta randvillkor erhåller vi då följande diagonalt dominanta tridiagonala ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} k_1 - f'(\xi_1) \\ k_2 - k_1 \\ k_3 - k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} - k_{n-2} \\ f'(\xi_n) - k_{n-1} \end{bmatrix}$$

Den kubiska ri-funktionen med rätta randvillkor bestäms då genom att:

1] Bestämma $z_1, \dots, z_n$ genom lösning av ovanstående tridiagonala ekvationssystem

2] Bestämning av $S_i'(\xi_i)$, $i = 2, \dots, n-1$, ur $(**)$

3] Bestämning av $S_i(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, ur $(*)$.

För en kubisk ri-funktion med rätta randvillkor kan man visa att följande sats gäller

Sats 12.5.1. Låt $f \in C^4[\xi_1, \xi_n]$ och låt

$$M = \max_{\xi_1 \le x \le \xi_n} |f^{(4)}(x)|.$$

Om $S(x)$ är den entydigt bestämda kubiska ri-funktionen med rätta randvillkor som interpolerar $f(x)$ i punkterna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, så gäller

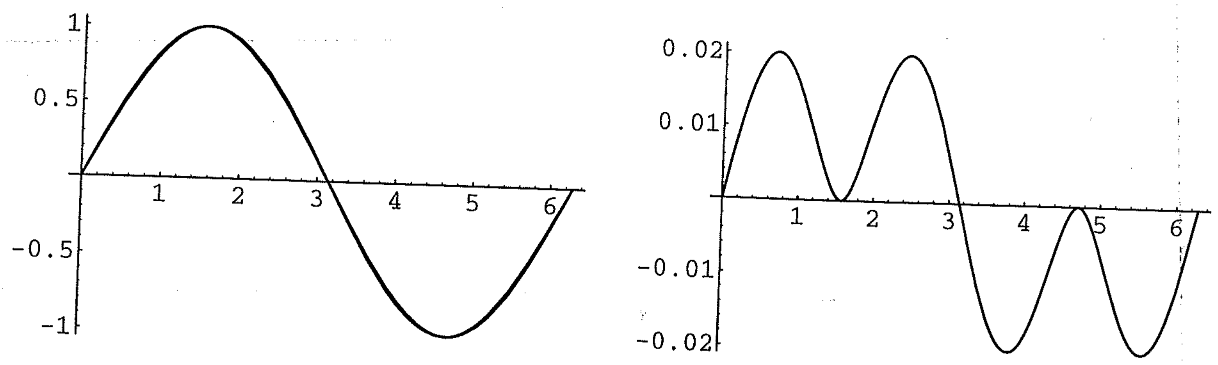
$$\max_{\xi_1 \le x \le \xi_n} |f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384} \cdot \max_{1 \le j \le n-1} |\xi_{j+1} - \xi_j|^4 .$$

Om vi halverar den längsta intervallängden h_i (och även övriga intervall vid behov), så erhålls en 16 faldig reduktion av den övre gränsen för L_∞-felet i ovanstående sats.

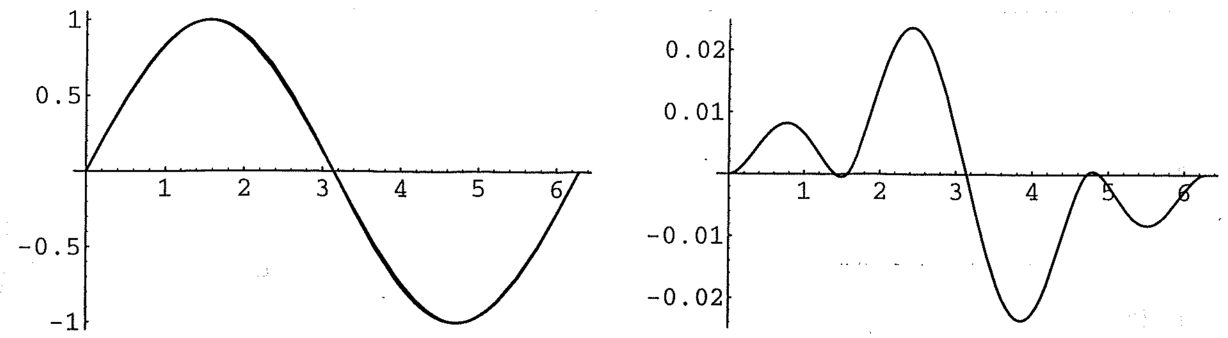
Ex) Låt $(\xi_1, \dots, \xi_5) = (0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

$y_i = \sin(\xi_i)$, $i = 1, \dots, 5$, $\quad y = (0, 1, 0, -1, 0)$

Vi bestämmer a) en naturlig kubisk ri-funktion b) en kubisk ri-funktion med rätta randvillkor.



a) $S(x)$, $\sin(x)$ $\qquad$ $\sin(x) - S(x)$



b) $S(x)$, $\sin x$ $\qquad$ $\sin x - S(x)$

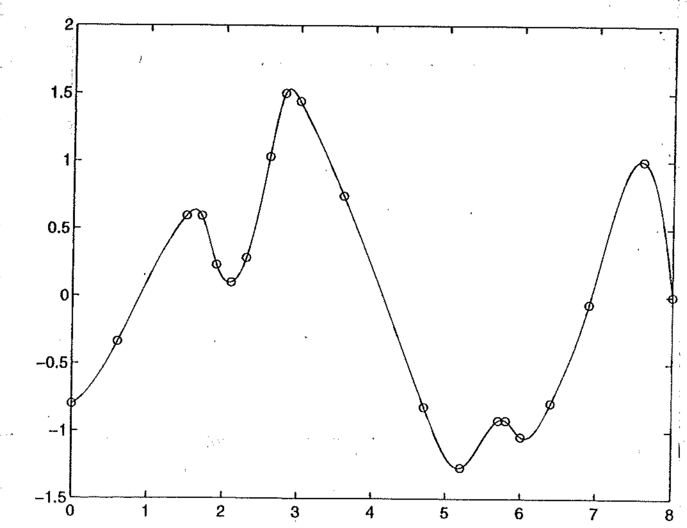
Ex) Om man vill bestämma en naturlig kubisk ri-funktion till datat f_i, $i = 1, \dots, n$ med abskissorna x_i, $i = 1, \dots, n$, och plotta ut resultatet över $[x_1, x_n]$, så kan man i Matlab använda spline-kommandot. Man bör då i en vektor x diskretisera $[x_1, x_n]$ med lämplig noggrannhet.

OBS! Matlab använder inte naturlig kubisk ri-funktion

```
>> y = spline(xi, fi, x)
```

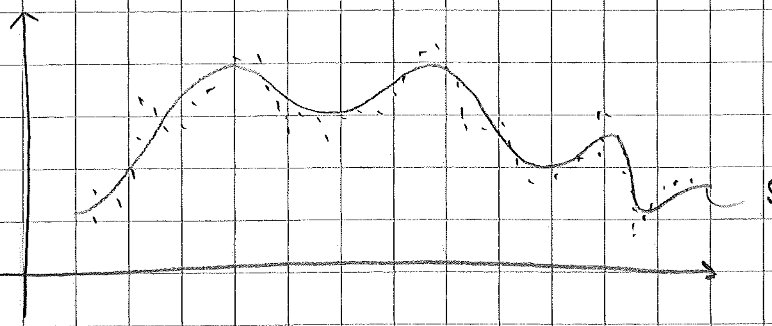
$x_i = [0, 0.6, 1.5, 1.7, 1.9, 2.1, 2.3, 2.6, 2.8, 3.0, 3.6, 4.7, 5.2, 5.7, 5.8, 6.0, 6.4, 6.9, 7.6, 8.0]$

$f_i = [-0.8, -0.34, +0.59, 0.59, 0.23, 0.1, 0.28, 1.03, 1.5, 1.44, 0.74, -0.82, -1.27, -0.92, -0.92, -1.04, -0.79, -0.06, 1.0, 0.0]$



12.6 Utjämning av data med kubiska ri-funktioner

Vi betraktar problemet att givet en stor mängd datapunkter, eventuellt behäftade med mätfel, hitta en kubisk rifunktion som inte behöver interpolera datat men som ansluter sig till datat på ett hyfsat sätt.



Följande egenskap för naturliga kubiska ri-funktioner gör dem välanpassade för interpolation av data.

Sats 12.6.1. Antag att datat (ξ_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$ är givet och att $S(x)$ är en interpolerande naturlig kubisk ri-funktion. Om $g \in C^2[\xi_1, \xi_n]$ väljs så att $g(\xi_i) = f_i$, $i = 1, \ldots, n$, så gäller:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_n} (S''(x))^2\,dx \leq \int_{\xi_1}^{\xi_n} (g''(x))^2\,dx.$$

Bevis: Sätt $h(x) = g(x) - S(x)$. Då gäller

$$h(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$
$$g''(x) = S''(x) + h''(x).$$

Då erhålls

$$\int_{\xi_1}^{\xi_n} (g''(x))^2\,dx = \int_{\xi_1}^{\xi_n} (S''(x))^2\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_n} (h''(x))^2\,dx + $$
$$+ 2\int_{\xi_1}^{\xi_n} S''(x)h''(x)\,dx.$$

Om vi kan visa att $\int_{\xi_1}^{\xi_n} S''(x)h''(x)\,dx = 0$, så är beviset klart. Partiell integration ger:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_n} S''(x)h''(x)\,dx = \left[S''(x)h'(x)\right]_{\xi_1}^{\xi_n} - \int_{\xi_1}^{\xi_n} S'''(x)h'(x)\,dx$$
$$= -\int_{\xi_1}^{\xi_n} S'''(x)h'(x)\,dx, \quad (S''(\xi_1) = S''(\xi_n) = 0)$$

Eftersom S är en kubisk ri-funktion är $S'''(x) = c_i$ då $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$. Vi erhåller:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_n} S'''(x)h'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} S'''(x)h'(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} h'(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} c_i \left[h(x)\right]_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}$$
$$= 0, \quad \text{ty } h(\xi_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Därmed är satsen bevisad.

Eftersom "liten andraderivata $\approx$> liten krökning" säger ovanstående sats att den interpolerande naturliga kubiska ri-funktionen ger en approximation "som i medeltal oscillerar minst" av alla funktioner i $C^2[\xi_1, \xi_n]$ som interpolerar datat.

I det som följer skall vi presentera en metod för utjämning av data som bygger på en kombination av minsta kvadrat approximation och approximering med naturlig kubisk ri-funktion.

Antag att vi har datat (191)

$$\begin{cases}(\xi_i, y_i), & i = 1,\dots,n,\\ d_i\end{cases}$$

där d_i är en vikt associerad till mätvärdet y_i. Om alla mätvärden är likvärdiga kan man t.ex. välja $d_i = 1$, $i = 1,\dots,n$. Om man har en uppskattning på variansen av mätfelet i punkten ξ_i kunde man välja d_i så att $\frac{1}{d_i}$ är lika med variansen.

Vi låter $S(x) \in C[\xi_1, \xi_n]$ och bestämmer S så att

1° $S(x) = S_i(x)$ då $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1,\dots,n-1$, S_i kubiskt polynom

2° $S(\xi_i) = \overline{y}_i$, $i = 1,\dots,n$.

3° $\lim\limits_{x\to\xi_i^-} S^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to\xi_i^+} S^{(k)}(x)$, $k = 1,2$, $i = 2,\dots,n-1$.
($\therefore\ S \in C^2[\xi_1, \xi_n]$)

4° $S''(\xi_1) = S''(\xi_n) = 0$.

$S(x)$ är tydligen en naturlig kubisk ri-funktion.
Observera att vi inte kräver att $\overline{y}_i = y_i$.

Vi inför beteckningarna

$$\begin{cases} h_i = \xi_{i+1} - \xi_i, & i = 1,\dots,n-1\\ z_i = S''(\xi_i), & i = 2,\dots,n-1\\ z_1 = z_n = 0. \end{cases}$$

$S_i''(x)$ är en linjär funktion som kan skrivas:

$$(*)\quad S_i''(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - \xi_i) + \frac{z_i}{h_i}(\xi_{i+1} - x), \quad i = 1,\dots,n-1,$$

ty $S_i''(\xi_i) = z_i$ och $S_i''(\xi_{i+1}) = z_{i+1}$, vilket entydigt bestämmer $S_i''(x)$.

(192) Vi är intresserade av $\int_{\xi_1}^{\xi_n} (S''(x))^2\,dx$, och erhåller med stöd av $(*)$:

$$(**)\quad \int_{\xi_1}^{\xi_n} (S''(x))^2\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left(\frac{z_{i+1}^2}{h_i^2}(x-\xi_i)^2 + \frac{z_i^2}{h_i^2}(\xi_{i+1}-x)^2 + \frac{2 z_i z_{i+1}}{h_i^2}(x-\xi_i)(\xi_{i+1}-x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{3}\left(z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2\right).$$

Nu kan vi skriva $S_i(x)$ i formen:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - \xi_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(\xi_{i+1} - x)^3 + c_i(x - \xi_i) + d_i(\xi_{i+1} - x),$$
$$i = 1,\dots,n-1,$$

där kraven $S_i(\xi_i) = \overline{y}_i$ och $S_i(\xi_{i+1}) = \overline{y}_{i+1}$ bestämmer c_i och d_i, $i = 1,\dots,n-1$.
Vi erhåller då följande uttryck för $S_i(x)$

$$(***)\quad S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-\xi_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(\xi_{i+1}-x)^3 + \left(\frac{\overline{y}_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1}\right)(x - \xi_i) + \left(\frac{\overline{y}_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i\right)(\xi_{i+1} - x), \quad i = 1,\dots,n-1.$$

För derivatan $S_i'(x)$ erhålls uttrycket

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x-\xi_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(\xi_{i+1}-x)^2 + \frac{\overline{y}_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1} - \frac{\overline{y}_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} z_i, \quad i = 1,\dots,n-1.$$

För $S_i'(\xi_i)$ får vi då:

$$S_i'(\xi_i) = -\frac{h_i}{6} z_{i+1} - \frac{h_i}{3} z_i + \frac{1}{h_i}(\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i), \quad i = 1,\dots,n-1.$$

Kravet $S_i'(\xi_i) = S_{i-1}'(\xi_i)$, $i = 2,\dots,n-1$ ger följande ekvationer: (193)

$$0 = S_i'(\xi_i) - S_{i-1}'(\xi_i) = h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i) z_i + h_i z_{i+1} - 6\left(\frac{1}{h_i}(\bar{y}_{i+1}-\bar{y}_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})\right),$$
$$i = 2,\dots,n-1.$$

Vi inför en objektfunktion F som beror av de obekanta $z_1,\dots,z_n,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$.

$$F(z_1,z_2,\dots,z_n,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\dots,\bar{y}_n) = k_1\cdot\int_{\xi_1}^{\xi_n}(S''(x))^2\,dx + k_2\cdot\sum_{i=1}^{n} d_i(\bar{y}_i-y_i)^2$$
$$= k_1\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i}{3}(z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2) + k_2\cdot\sum_{i=1}^{n} d_i(\bar{y}_i - y_i)^2.$$

Parametern k_1 uttrycker hur viktigt det är att $S(x)$ oscillerar litet på $[\xi_1,\xi_n]$.
Parametern k_2 uttrycker hur viktigt det är att $S(x)$ "nästan interpolerar" datat.
Parametern d_i uttrycker hur viktigt det är med interpolation i punkten ξ_i.
Vi bestämmer de obekanta genom att lösa följande optimeringsproblem:

<u>Minimera</u> $F(z_1,\dots,z_n,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n) = k_1\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i}{3}(z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2) + k_2\cdot\sum_{i=1}^{n} d_i(\bar{y}_i-y_i)^2$

<u>under bivillkoren:</u>

$$\begin{cases} S_i'(\xi_i) - S_{i-1}'(\xi_i) = 0, & i = 2,\dots,n-1 \\ z_1 = 0 \\ z_n = 0 \end{cases}$$

Vi kan lösa problemet med Lagranges multiplikator metod.

(194) Vi bildar $G(z_1,\dots,z_n,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ genom

$$G(z_1,\dots,z_n,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n) =$$
$$= F(z_1,\dots,z_n,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n) + \lambda_1 z_1 + \lambda_n z_n + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_i\left(S_i'(\xi_i) - S_{i-1}'(\xi_i)\right)$$

<u>De stationära punkterna för G ges av:</u>

$$\frac{\partial G}{\partial z_1} = \frac{h_1}{3}\cdot k_1(2z_1+z_2) + \lambda_1 + h_1\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_n} = \frac{h_{n-1}}{3}\cdot k_1(2z_n + z_{n-1}) + \lambda_n + h_{n-1}\lambda_{n-1} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_2} = \frac{k_1}{3}\left[h_1(2z_2+z_1) + h_2(2z_2+z_3)\right] + 2(h_1+h_2)\lambda_2 + h_2\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_{n-1}} = \frac{k_1}{3}\left[h_{n-2}(2z_{n-1}+z_{n-2}) + h_{n-1}(2z_{n-1}+z_n)\right] + h_{n-2}\lambda_{n-2} + 2(h_{n-2}+h_{n-1})\lambda_{n-1} = 0$$

$3 \le i \le n-2$: $$\frac{\partial G}{\partial z_i} = \frac{k_1}{3}\left[h_{i-1}(2z_i+z_{i-1}) + h_i(2z_i+z_{i+1})\right] + h_{i-1}\lambda_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)\lambda_i + h_i\lambda_{i+1} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{y}_1} = 2k_2 d_1(\bar{y}_1 - y_1) - \frac{6}{h_1}\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{y}_n} = 2k_2 d_n(\bar{y}_n - y_n) - \frac{6}{h_{n-1}}\lambda_{n-1} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{y}_2} = 2k_2 d_2(\bar{y}_2 - y_2) + 6\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_1}\right)\lambda_2 - \frac{6}{h_2}\lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{y}_{n-1}} = 2k_2 d_{n-1}(\bar{y}_{n-1} - y_{n-1}) - \frac{6}{h_{n-2}}\lambda_{n-2} + 6\left(\frac{1}{h_{n-1}}+\frac{1}{h_{n-2}}\right)\lambda_{n-1} = 0$$

$3 \le i \le n-2$: $$\frac{\partial G}{\partial \bar{y}_i} = 2k_2 d_i(\bar{y}_i - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}\lambda_{i-1} + 6\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i-1}}\right)\lambda_i - \frac{6}{h_i}\lambda_{i+1} = 0$$

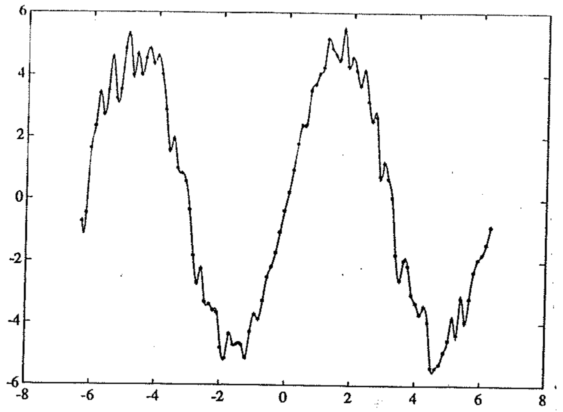
$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_1} = z_1 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda_n} = z_n = 0$$

$2 \le i \le n-1$: $$\frac{\partial G}{\partial \lambda_i} = h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)z_i + h_i z_{i+1} - 6\left[\frac{1}{h_i}(\bar{y}_{i+1}-\bar{y}_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})\right] = 0$$

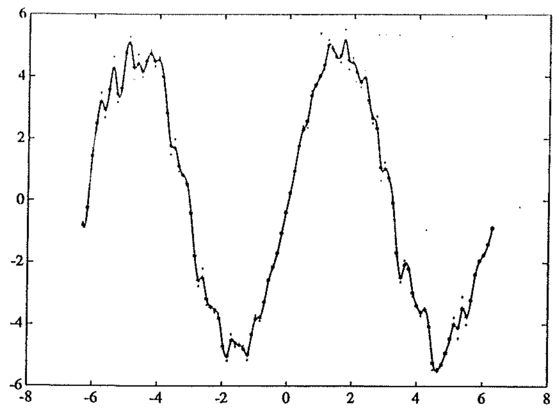
(195)

Vi erhåller ett linjärt ekvationssystem med $3n$ ekvationer och $3n$ obekanta. Vi erhåller en entydigt bestämd lösning på vårt minimeringsproblem genom att lösa ekvationssystemet. Vi erhåller också $z_1, \dots, z_n$ och $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ och kan med stöd av (***) bilda $S(x)$.

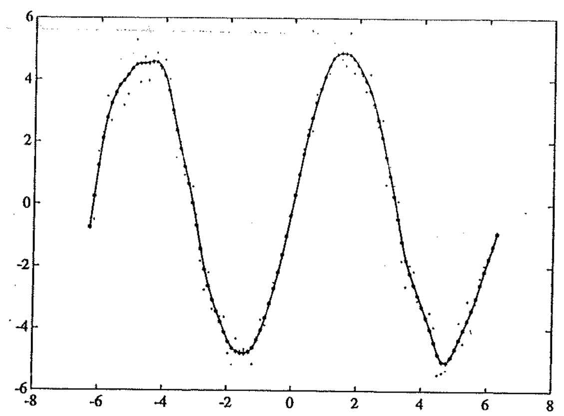
$\boxed{\text{Ex}}$ Vi bildar 100 datapunkter med $y_i = 5 \sin(x_i) +$ mätfel.



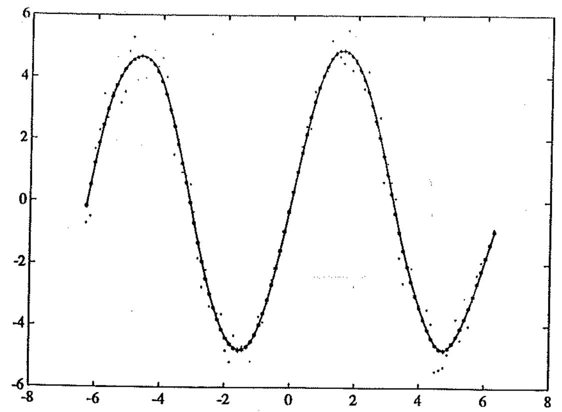
$\begin{cases} 100 \text{ data ptr.} \\ k_1 = 1 \\ k_2 = 100\,000 \\ d_i = 1 \end{cases}$



$\begin{cases} 100 \text{ data ptr.} \\ k_1 = 1 \\ k_2 = 10\,000 \\ d_i = 1 \end{cases}$



$\begin{cases} 100 \text{ data ptr.} \\ k_1 = 1 \\ k_2 = 100 \\ d_i = 1 \end{cases}$



100 d.ptr.
$k_1 = 1 \quad k_2 = 10$
$d_i = 1$

(196)

12.7 Approximering av parametriska kurvor med ri-funktioner

Antag att vi har en plan kurva given av en parameterframställning

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Antag att vi diskretiserar parameterintervallet:

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

Nu kan vi anpassa en ri-funktion $S(t)$ till datat $\{(t_i, x(t_i))\}$, $i = 1, \dots, n$ och en ri-funktion $\bar{S}(t)$ till datat $\{(t_i, y(t_i))\}$, $i = 1, \dots, n$.

Då erhåller vi en approximativ parameterframställning av kurvan genom

$$\begin{cases} x = S(t) \\ y = \bar{S}(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Helt analogt kan vi approximera en rymdkurva med 3 st. ri-funktioner.

$\boxed{\text{Ex}}$ Vi anpassar 2 st. naturliga kubiska ri-funktioner till datat:

t	−1,25	−1	−0.75	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	0,75	1	1.25
x	−2,8125	−2	−1,3125	−0,75	−0,3125	0	0,1875	0,25	0,1875	0	−0,3125
y	−0,5625	0	0,4375	0,75	0,9375	1	0,9375	0,75	0,4375	0	−0,5625