11. Approximering av periodiska funktioner

11.1 Trigonometriska polynom.

Definition: $C_{2\pi}$ betecknar mängden av kontinuerliga funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som är periodiska med perioden 2π,

$$f(x+2\pi)=f(x), \quad -\infty<x<\infty.$$

Om en funktion f är periodisk med perioden $T\neq 2\pi$, kan man transformera om den genom att sätta $g(x)=f(\frac{T}{2\pi}x)$. Då gäller det att $g\in C_{2\pi}$.

Definition: Ett trigonometriskt polynom $q(x)$ av gradtal n är av formen

$$q(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)\right),$$

där $a_n\neq 0$ eller $b_n\neq 0$. Om $a_0=a_1=\dots=a_n=0$, kallas q ett sinuspolynom, om $b_1=b_2=\dots=b_n=0$, kallas q ett cosinuspolynom.

Vi låter $\mathcal{T}_n$ beteckna mängden av alla trigonometriska polynom av gradtal $\leq n$. $\mathcal{T}_n$ är ett linjärt underrum av $C_{2\pi}$ med dimensionstalet $(2n+1)$. En bas för $\mathcal{T}_n$ ges av

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}.$$

Man kan visa att nollfunktionen är den enda funktion i $\mathcal{T}_n$ som har mer än $2n$ stycken nollställen i $[0, 2\pi)$. Alltså kan vi använda utbytesalgoritmen för att bestämma en L_∞-optimal approximation ur $\mathcal{T}_n$ till $f\in C_{2\pi}$ på intervallet $[0,2\pi)$, och därmed på hela $\mathbb{R}$.

Sats 11.1.1. (Weierstrass sats i $C_{2\pi}$). Antag att $f\in C_{2\pi}$ och att $\varepsilon>0$ är givet. Då finns det ett trigonometriskt polynom q, med ändligt gradtal n, sådant att

$$\|f-q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Bevis. Vi skall senare i detta kapitel konstruera ett dylikt polynom q.

11.2 Fourierserien för f och partialsummorna S_nf

Vi inför skalärprodukten (f,g) för $f,g\in C_{2\pi}$ genom

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Sats 11.2.1. För funktionerna $\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ gäller det att

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(kx)\,dx=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 2\pi, & j=k=0\\ \pi, & j=k>0\end{cases} & j,k=0,1,2,\dots\\[2ex] \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)\sin(kx)\,dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ \pi, & j=k>0\end{cases} & j,k=1,2,3,\dots\\[2ex] \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\sin(kx)\,dx=0, & j=0,1,\dots,\ k=1,2,\dots\end{cases}$$

Bevis: Satsens påstående är lätt att verifiera om man utnyttjar de trigonometriska identiteterna:

$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta).$$

basen $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ är alltså ~~ett~~ ortogonalsystem i $C_{2\pi}$. En funktion $f \in C_{2\pi}$ kan således associeras med en formell ortogonal utveckling, (161)

$$(*) \quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta)),$$

som kallas Fourier serien för f, och där a_j, b_j ges av

$$(**) \begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{(f,1)}{\|1\|_2^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cdot 1 \, d\theta \quad \left(a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(0\cdot\theta)d\theta\right) \\ a_j = \frac{(f, \cos(jx))}{\|\cos(jx)\|_2^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(j\theta)\,d\theta, \quad j = 1,2,\dots \\ b_j = \frac{(f, \sin(jx))}{\|\sin(jx)\|_2^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(j\theta)\,d\theta, \quad j = 1,2,\dots . \end{cases}$$

Vi noterar ~~att~~ om f är en jämn funktion så är $b_j = 0$, $j = 1,2,\dots$, vi erhåller en cosinus serie. Om f är en udda funktion är $a_j = 0$, $j = 0,1,\dots$, och vi erhåller en sinus serie.

Vi kan bilda en operator $S_n : C_{2\pi} \to \mathcal{L}_n$ som ger den entydigt bestämda bästa approximationen $S_n f$ till $f \in C_{2\pi}$ ur mängden av trigonometriska polynom av gradtal $\leq n$ i minsta kvadrat mening.

$$(S_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)),$$

där a_j och b_j ges av $(**)$. Vi vet att

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0.$$

(Detta gäller även för en mätbar funktion som kan ha diskontinuiteter på en mängd med måttet noll. Dvs. vi har då $L_{2\pi}$)

(162) Vi kan igen fråga oss vad skall krävas av $f \in C_{2\pi}$ så att

1° $x_0 \in [-\pi, \pi)$, $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} (S_n f)(x_0)$?

2° Kan vi erhålla likformig konvergens med hjälp av partialsummorna $S_n f$?

Vi erhåller en integralrepresentation av $S_n f$.

Sats 11.2.2. $(S_n f)(x)$ kan beräknas genom

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} f(x+\theta)\,d\theta.$$

Bevis:
$$(S_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta + \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(j\theta)\,d\theta\right)\cdot\cos(jx) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(j\theta)\,d\theta\right)\sin(jx)\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}(\cos(jx)\cos(j\theta) + \sin(jx)\sin(j\theta))\right]d\theta$$
$$(\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}\cos(j(x-\theta))\right]d\theta$$
$$(\theta = x + t, \quad d\theta = dt)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}\cos(j(-t))\right]dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}\cos(jt)\right]dt$$

Vi bör visa att:

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}\cos(jt) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$$

Vi ser att likhet gäller för $n=0$. Antag att likhet gäller för $n-1 \geq 0$. Då erhålls:

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jt) = \frac{\sin[(n-\frac{1}{2})t]}{2\sin\frac{1}{2}t} + \cos(nt)$$

$$= \frac{\sin[(n-\frac{1}{2})t] + 2\sin(\frac{1}{2}t)\cos(nt)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$= \frac{\sin[(n-\frac{1}{2})t] + 2(\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}t+nt) + \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}t-nt))}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$= \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

Genom induktion gäller likheten och därmed satsen. □

Vi vet att $\|S_n\|_2 = 1$. Med stöd av den nyss bevisade satsen kan man erhålla:

$$\|S_n\|_\infty = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}\right| d\theta$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\tan\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right),$$

alltså samma operatornorm som för R_n operatorn vid utveckling i Tjebysjevserie, sida 154. Vi erhåller också en motsvarighet till sats 10.6.4.

Sats 11.2.3 (Dini-Lipschitz). Om $f \in C_{2\pi}$ och uppfyller Dini-Lipschitz villkor,

$$\left(\omega(\delta) = \max_{\substack{|x-y|\leq\delta,\\ x,y\in[-\pi,\pi]}} |f(x)-f(y)|\right) \quad \lim_{\delta\to 0}\omega(\delta)\cdot\ln(\delta) = 0,$$

så konvergerar följden $\{S_n f,\ n=1,2,\dots\}$ likformigt mot f.

Beviset överhoppas. Vi skall senare se att vi kan konstruera en följd med hjälp av partialsummorna $S_n f$, som konvergerar likformigt mot f under antagandet $f \in C_{2\pi}$.

11.3 Punktvis konvergens för partialsummorna av Fourierserien.

Vi frågar oss när $\lim_{n\to\infty}(S_n f)(x_0) = f(x_0)$ för ett fixt $x_0 \in [-\pi,\pi]$.

Sats 11.3.1. Antag att $f \in C_{2\pi}$ och att f är deriverbar i $x_0 \in [-\pi,\pi]$. Då gäller

$$\lim_{n\to\infty}(S_n f)(x_0) = f(x_0).$$

Bevis: $(S_n 1)(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\, d\theta = 1$. Vi undersöker felet

$$\varepsilon_n = (S_n f)(x_0) - f(x_0) = (S_n f)(x_0) - f(x_0)(S_n 1)(x_0)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+\theta) - f(x_0))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\, d\theta$$

Sätt $g(\theta) = (f(x_0+\theta) - f(x_0))/2\sin(\frac{1}{2}\theta)$. g är kontinuerlig, utom i $\theta = 0$.

$$\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\frac{f(x_0+\theta)-f(x_0)}{\theta}\cdot\frac{\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta} = f'(x_0).$$

Om vi sätter $g(0) := f'(x_0)$ så är g kontinuerlig.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\sin(n+\tfrac{1}{2})\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\sin(n\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \frac{(g(\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta),\ \sin(n\theta))}{\underbrace{\|\sin(n\theta)\|_2^2}_{\pi}} + \frac{(g(\theta)\sin\frac{1}{2}\theta,\ \cos(n\theta))}{\underbrace{\|\cos(n\theta)\|_2^2}_{\pi}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\sqrt{\frac{(g(\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta),\ \sin(n\theta))^2}{\pi}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{(g(\theta)\sin\frac{1}{2}\theta,\ \cos n\theta)^2}{\pi}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

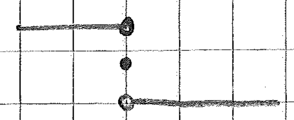
ty enligt Bessels olikhet gäller:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g(\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta),\ \sin(n\theta))^2}{\|\sin(n\theta)\|^2} \leq \|g(\theta)\cos(\tfrac{1}{2}\theta)\|_2^2 \quad \text{(analogt för ↑)}$$

$\therefore\ \varepsilon_n \to 0$; då $n\to\infty$ □

Anm. Man kan visa att satsen gäller (165) även om f har en språngdiskontinuitet, i fall man i diskontinuitetspunkten x_0 definierar

$$f(x_0) = \Big(\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\Big)/2.$$



11.4. Fejérs operator G_n.

Definition: Fejérs operator G_n definieras som Cesàro-medelvärdet av de n första partialsummorna av Fourierserien för $f \in C_{2\pi}$.

$$(G_nf)(x) = \frac{1}{n}\big[(S_0f)(x)+(S_1f)(x)+\dots+(S_{n-1}f)(x)\big].$$

Sats 11.4.1. Fejér operatorn G_n kan skrivas i formen

$$(G_nf)(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)^2 d\theta.$$

Bevis: Integralrepresentationen av $(S_nf)(x)$ ger:

$$(G_nf)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+x)\frac{\sin(k+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+1/2)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

Med induktion kan man visa att

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}n\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)^2.$$

Därmed är satsen bevisad.

Följande sats för monotona operatorer i $C_{2\pi}$ är en motsvarighet till sats 6.2.1 för linjära monotona operatorer på $C[a,b]$.

(166) Sats 11.4.2 (Korovkins sats). Låt $\{L_n\}$, $n=1,2,\dots$, vara en följd av linjära och monotona operatorer på $C_{2\pi}$. $L_n: C_{2\pi}\to C_{2\pi}$, $n=1,2,\dots$. Om (L_nf) konvergerar likformigt mot f då $n\to\infty$ för $f(x)=1$, $f(x)=\cos x$ och $f(x)=\sin x$, så konvergerar följden L_nf likformigt mot f för varje $f \in C_{2\pi}$.

Beviset överhoppas.

Sats 11.4.3. Följden G_nf, $n=1,2,\dots$, där G_n är Fejérs operator, konvergerar likformigt mot f för alla $f \in C_{2\pi}$.

Bevis: Det framgår av integralrepresentationen av G_nf i sats 11.4.1 att

$$f(x)\ge g(x)\ \forall x \Rightarrow (G_nf)(x)\ge (G_ng)(x)$$

för alla x.

Vidare är det lätt att verifiera att G_n är linjär. ∴ Vi kan tillämpa sats 11.4.2.

$$G_n1 = \frac{1}{n}(1+1+\dots+1) = 1 \to 1, \text{ då } n\to\infty.$$

$$(G_n\cos)(x) = \frac{1}{n}(0+\cos x+\dots+\cos x) = \frac{n-1}{n}\cos x \to \cos x, \text{ då } n\to\infty.$$

$$(G_n\sin)(x) = \frac{1}{n}(0+\sin x+\dots+\sin x) = \frac{n-1}{n}\sin x \to \sin x, \text{ då } n\to\infty.$$

Med stöd av sats 11.4.2 konvergerar då G_nf likformigt mot f för varje $f \in C_{2\pi}$. ∎

Men G_nf är ju ett trigonometriskt polynom av gradtal $n-1$. Alltså kan vi givet $\varepsilon>0$ hitta ett n så stort att

$$\|f-G_nf\|_\infty \le \varepsilon.$$

Därmed har vi bevisat Weierstrass sats, sats 11.1.1, för trigonometriska polynom.

11.5 Snabba Fouriertransformen (FFT)

Om $f \in C_{2\pi}$ så ges koefficienterna a_k, b_k i utvecklingen av f i Fourierserie av

$$(*)\quad \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta, & k = 0,1,\dots \\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta, & k = 1,2,\dots \end{cases}$$

Integralerna i $(*)$ kan vara omöjliga att lösa analytiskt, eller så känner vi f:s värden endast på en diskret punktmängd. Antag att vi känner funktionsvärden i de ekvidistanta punkterna:

$$f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right), \quad k = 0,1,\dots,M.$$

Sätt $x_k = \frac{2\pi k}{M+1}$, $k = 0,1,\dots,M$. En integral av formen $(*)$ kan uppskattas (på $[0,2\pi]$) på följande vis:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta \approx \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{M-1} \frac{g(x_k)+g(x_{k+1})}{2}\cdot\frac{2\pi}{M+1}$$

$$= \frac{1}{M+1}\left(g(x_0)+g(x_M)\right) + \frac{2}{M+1}\sum_{k=1}^{M-1} g(x_k)$$

$$\approx \frac{2}{M+1}\sum_{k=0}^{M} g(x_k) \qquad \left(M \to \infty \Rightarrow g(x_M) \to g(2\pi) = g(0)\right)$$

Vi erhåller då approximationer av a_k och b_k:

$$(**)\quad \begin{cases} a_n \approx \frac{2}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi k n}{M+1}\right), & n = 0,1,2,\dots \\ b_n \approx \frac{2}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi k n}{M+1}\right), & n = 1,2,\dots \end{cases}$$

Om vi beräknar a_n, b_n med $(**)$ för $n = 0,1,\dots,\frac{M+1}{2}$ så blir antalet räkneoperationer av storleksordning M^2. Om $M+1$ väljs till 2^l för

något heltal l så kan a_n och b_n i $(**)$ beräknas med ett antal räkneoperationer som är av storleksordning $M \cdot {}^2\log M$. (Med den snabba Fouriertransformen).

Låt oss betrakta det kontinuerliga problemet $(*)$. Om vi definierar de komplexa talen C_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, genom:

(Fouriertransformen)

$$(***)\quad C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,\dots,$$

så märker vi att:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{a_0}{2},$$

$$C_k + C_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{ik\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta) + \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$$

$$= a_k, \quad k = 1,2,\dots$$

$$i(C_k - C_{-k}) = \dots = b_k, \quad k = 1,2,\dots.$$

Nu kan den formella utvecklingen av f i Fourierserie skrivas som

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}.$$

Vi verifierar påståendet:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k}(\cos kx - i\sin kx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$\sim f.$$

Vi övergår nu till det diskreta problemet. (169)
Antag att a_n och b_n beräknas som i (**) och att vi approximerar c_n i (***) med

$$c_n \approx \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right) e^{-in\frac{2\pi k}{M+1}}, \quad n=0,1,\dots .$$

(Diskreta Fourier transformen)

Nu gäller

$$(M+1-j)\cdot\frac{2\pi k}{M+1} = 2\pi k - \frac{2\pi k j}{M+1},$$

alltså erhålls

$$e^{i(M+1-j)\frac{2\pi k}{M+1}} = e^{2\pi k i}\cdot e^{-i\frac{2\pi k j}{M+1}} = e^{-ij\frac{2\pi k}{M+1}}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}
c_j + c_{M+1-j} &\approx \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)\left[e^{-ij\frac{2\pi k}{M+1}} + e^{-i(M+1-j)\frac{2\pi k}{M+1}}\right] \\
&= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)\left[e^{-ij\frac{2\pi k}{M+1}} + e^{ij\frac{2\pi k}{M+1}}\right] \\
&= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)\left[\cos\left(-j\frac{2\pi k}{M+1}\right) + i\sin(\quad) + \cos\left(j\frac{2\pi k}{M+1}\right) + i\sin(\quad)\right] \\
&= \frac{2}{M+1}\sum_{k=0}^{M} f\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)\cdot\cos\left(j\frac{2\pi k}{M+1}\right) \\
&\approx a_j, \quad j = 1,2,\dots,\begin{cases}\frac{1}{2}M, & M \text{ jämn} \\ \frac{1}{2}(M-1), & M \text{ udda}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Analogt erhålls

$$b_j \approx i\,(c_j - c_{M+1-j}), \quad j = 1,2,\dots,\begin{cases}\frac{1}{2}M, & M \text{ jämn} \\ \frac{M-1}{2}, & M \text{ udda}.\end{cases}$$

Slutligen ser vi att

$$c_0 \approx \frac{a_0}{2}.$$

(170) Nu presenteras en algoritm för beräkning av koefficienterna, den snabba Fourier-transformen (FFT). (Cooley–Tukey 1965)

Vi betraktar problemet att givet funktionsvärden

$$f\left(\frac{2\pi\beta}{N}\right), \quad \beta = 0,1,\dots,N-1,$$

beräkna koefficienterna c_j som ges av

$$c_j = \frac{1}{N}\sum_{\beta=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi\beta}{N}\right) e^{-ij\frac{2\pi\beta}{N}}, \quad j = 0,1,\dots,N-1.$$

Sätt $w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, $a_\beta = f\left(\frac{2\pi\beta}{N}\right)\cdot\frac{1}{N}$.

Uppgift: beräkna för $j = 0,1,\dots,N-1$,

$$c_j = \sum_{\beta=0}^{N-1} a_\beta w^{j\beta}, \quad w^N = 1.$$

Horners schema för polynomberäkning löser uppgiften med totalt N^2 operationer, (1 operation = 1 komplex multiplikation + 1 addition). Med den snabba Fourier transformen behöver man om $N = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_p$, $N(r_1 + r_2 + \dots + r_p)$ operationer, t. ex. $N = 2^7 = 128$, $2^7 \cdot 14 = 1792$ operationer i stället för $2^{14} = 16384$ operationer.

Antag att $N = 2^k$. Sätt $\beta = 2\beta_1$ då β är jämn och $\beta = 2\beta_1 + 1$ då β är udda, $0 \le \beta_1 \le \frac{1}{2}N - 1$.

$$c_j = \sum_{\beta_1=0}^{\frac{1}{2}N-1} a_{2\beta_1}(w^2)^{j\beta_1} + \sum_{\beta_1=0}^{\frac{1}{2}N-1} a_{2\beta_1+1}(w^2)^{j\beta_1}\cdot w^j$$

Låt α vara kvoten och j_1 resten, när j divideras med $\frac{N}{2}$,

$$j = \alpha\tfrac{1}{2}N + j_1.$$

Eftersom $w^N = 1$ erhålls

$$(w^2)^{j\beta_1} = (w^2)^{\alpha\frac{1}{2}N\beta_1}(w^2)^{j_1\beta_1} = (w^N)^{\alpha\beta_1}(w^2)^{j_1\beta_1} = (w^2)^{j_1\beta_1}$$

Om vi sätter

$$\varphi(j_1) = \sum_{\beta_1=0}^{\frac{1}{2}N-1} a_{2\beta_1}(w^2)^{j_1\beta_1}, \quad j_1 = 0,1,\dots,\tfrac{1}{2}N-1$$

$$\psi(j_1) = \sum_{\beta_1=0}^{\frac{1}{2}N-1} a_{2\beta_1+1}(w^2)^{j_1\beta_1},$$

så blir

$$c_j = \varphi(j_1) + w^j\psi(j_1), \quad j = 0,1,\dots,N-1.$$

Det krävs $\approx (\frac{N}{2})^2 + (\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2}$ operationer att beräkna $\varphi(j_1)$ och $\psi(j_1)$ för $j = 0,1,\dots,N-1$. Det behövs ytterligare N operationer att beräkna c_j ur $\varphi(j_1)$ och $\psi(j_1)$, alltså totalt $\approx \frac{N^2}{2} + N$.

Nu är idén att dela upp φ och ψ på samma sätt så att man erhåller 4 st. summor med $\frac{N}{4}$ termer i varje summa. Då krävs det $\approx N + 2\left(\frac{N}{2} + (\frac{N}{4})^2 + (\frac{N}{4})^2\right) = 2N + \frac{N^2}{4}$ operationer för att beräkna c_j, $j = 0,\dots,N-1$.
Eftersom $N = 2^k$ kan vi göra k st uppdelningar på ovan beskrivna sätt, och erhåller då att antalet räkneoperationer är av ordningen

$$k\cdot N + \frac{N^2}{2^k} = k\cdot N + N \qquad \left(k = {}^2\log 2^k = {}^2\log N\right)$$

$$= N\cdot {}^2\log N + N$$

$$= O(N\cdot {}^2\log N).$$

N	N^2	$N\cdot {}^2\log N$
16	256	64
64	4096	384
128	16384	896
512	262144	4608

Ex Låt $f \in C_{2\pi}$ ges av

$$f(x) = 1 + 2\cos x + 8\sin 2x - 5\cos 3x.$$

$$y_j = f\left(\frac{2\pi j}{8}\right), \quad j = 0,\dots,7$$

$$y = (-2, 13.94975, 1.0, -11.94975, 4.0, 4.05025, 1.0, -2.05025)$$

Matlab: $X(k+1) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n+1)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$

Obs! Matlab har inte $\frac{1}{N}$ framför summan, vi måste dividera resultatet med N. Då ges c_0 av $\frac{X(1)}{N}$, c_1 av $\frac{X(2)}{N}$, ...

`>> X = fft(y)` ger

$$[8, 8, -32i, -20, 0, -20, 32i, 8]$$

$$c = \frac{X}{8} = [1, 1, -4i, -2.5, 0, -2.5, 4i, 1]$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = c(1) = \underline{\underline{1}}$$

$$a_1 = c_1 + c_{8-1} = c(2) + c(8) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$a_2 = c_2 + c_{8-2} = c(3) + c(7) = -4i + 4i = \underline{\underline{0}}$$

$$a_3 = c_3 + c_{8-3} = c(4) + c(6) = -2.5 - 2.5 = \underline{\underline{-5}}$$

$$b_1 = i(c_1 - c_{8-1}) = i(c(2) - c(8)) = i(1 - 1) = \underline{\underline{0}}$$

$$b_2 = i(c_2 - c_{8-2}) = i(c(3) - c(7)) = i(-4i - 4i) = \underline{\underline{8}}$$

$$b_3 = i(c_3 - c_{8-3}) = i(c(4) - c(6)) = i(-2.5 - (-2.5)) = \underline{\underline{0}}$$

$$\therefore\ f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{3}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)$$

$$= 1 + 2\cos x - 5\cos 3x + 8\sin 2x$$