10. Ortogonala polynom

10.1 Inledning

Betrakta Hilbertrummet $L_{2,w}[a,b]$ och det linjära underrummet $\mathbb{P}_n$ av polynom av gradtal $\le n$. Om vi sätter $\phi_0 = 1$ så kan vi utgående från den linjärt oberoende basen $\{1, x, \ldots, x^n\}$ för $\mathbb{P}_n$ konstruera en ortogonal bas bestående av de ortogonala polynomen $\phi_0, \ldots, \phi_n$. Detta kan göras med Gram-Schmidt's ortogonaliserings förfarande.

Givet en viktfunktion $w(x)$ och skalärprodukten

$$(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\,dx,$$

så blir de ortogonala polynomen entydigt bestämda om vi t.ex. fixerar den ledande koefficienten för $\phi_n(x)$ till 1.

Olika viktfunktioner genererar olika uppsättningar av ortogonala polynom.

Om vi betraktar $L_{2,w}[a,b]$ med underrummet $\mathbb{P}_n$ som uppspänns av de ortogonala polynomen $\{\phi_0,\ldots,\phi_n\}$, och väljer $f \in L_{2,w}[a,b]$, så vet vi med stöd av Parsevals likhet att givet $\varepsilon>0$ kan vi hitta ~~att~~ tillräckligt stort n så att:

$$\Big\| f - \sum_{j=0}^{n} \frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_2^2}\,\phi_j(x)\Big\|_{2,w} \le \varepsilon. \qquad (*)$$

Obs! detta betyder inte att L_∞-felet kan fås godtyckligt litet, dvs. vi garanteras inte likformig konvergens.

Eftersom $C[a,b] \in L_{2,w}[a,b]$ så gäller olikheten $(*)$ även i $C[a,b]$.

I $C[a,b]$ kan vi motivera olikheten $(*)$ utan Parsevals likhet, ty om $f \in C[a,b]$ så kan vi givet $\varepsilon>0$ välja n så stort att $\exists\, P_n^* \in \mathbb{P}_n : \|f-P_n^*\|_\infty \le \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\int_a^b w(x)\,dx}}$ (Weierstrass sats).

Då gäller:

$$\begin{aligned}\|f-P_n^*\|_{2,w}^2 &= \int_a^b w(x)\,(f(x)-P_n^*(x))^2\,dx \\ &\le \int_a^b w(x)\,\|f-P_n^*\|_\infty^2\,dx \\ &= \|f-P_n^*\|_\infty^2 \int_a^b w(x)\,dx \\ &\le \varepsilon^2\end{aligned}$$

Alltså gäller:

$$\Big\|f - \sum_{j=0}^{n} \frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}\,\phi_j(x)\Big\|_{2,w} \le \|f-P_n^*\|_{2,w} \le \varepsilon.$$

10.2 Rekursionsformeln för ortogonala polynom

Innan vi presenterar en treterms rekursionsformel för konstruktion av ortogonala polynom tar vi upp en hjälpsats.

Sats 10.2.1. Om följden av polynom $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$, där varje ϕ_k är av gradtal k, är en följd av ortogonala polynom med avseende på vikten $w(x)$, så är ϕ_k ortogonal mot alla polynom av gradtal $< k$.

Bevis: Antag att $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$, är en följd av ortogonala polynom med avseende på vikten $w(x)$ och antag att ϕ_k är av gradtal k. Tag ~~att~~ polynom $P_j(x)$ av gradtal $j<k$. Vi kan skriva

$$P_j(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_j\phi_j(x), \quad c_0,\ldots,c_j \in \mathbb{R}.$$

Vi erhåller då:

$$\begin{aligned}(\phi_k, P_j) &= (\phi_k, c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_j\phi_j) \\ &= c_0(\phi_k,\phi_0) + c_1(\phi_k,\phi_1) + \dots + c_j(\phi_k,\phi_j) \\ &= 0, \quad \text{ty } j<k.\end{aligned}$$

Alltså är ϕ_k ortogonal mot varje polynom i $\mathcal{P}_{k-1}$ med avseende på vikten $w(x)$.

Följande sats ger ett effektivt sätt att konstruera ortogonala polynom rekursivt.

Sats 10.2.2: Antag att vi har vikten $w(x)$ på intervallet $[a,b]$ med skalärprodukten

$$(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx .$$

Låt:

$\boxed{1^\circ}$ $\phi_0(x) = 1, \quad a \le x \le b,$

$\boxed{2^\circ}$ $\alpha_j = \dfrac{(\phi_j, x\cdot\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2} \quad ; j \ge 0,$

$\boxed{3^\circ}$ $\phi_1(x) = (x-\alpha_0)\cdot\phi_0(x), \quad a \le x \le b,$

$\boxed{4^\circ}$ $\beta_j = \dfrac{\|\phi_j\|_{2,w}^2}{\|\phi_{j-1}\|_{2,w}^2} \quad ; j \ge 1,$

$\boxed{5^\circ}$ $\phi_{j+1}(x) = (x-\alpha_j)\,\phi_j(x) - \beta_j\phi_{j-1}(x); \; j \ge 1.$

Då är $\phi_j(x)$, $j = 0,1,\dots$, ett polynom med ledande koefficienten 1. Vidare är polynomen $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ ortogonala med avseende på vikten $w(x)$.

Bevis: Av stegen $\boxed{1^\circ}$, $\boxed{3^\circ}$ och $\boxed{5^\circ}$ i konstruktionen framgår det att ϕ_j är ett polynom av gradtal j med ledande koefficient 1.
Att $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ är ortogonala visas med induktion.

$\boxed{1^\circ}$ Vi visar att $\{\phi_0, \phi_1\}$ är ett ortogonalsystem.

$$(\phi_0, \phi_1) = \left(\phi_0, \left(x - \frac{(\phi_0, x\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}\right)\phi_0\right)$$
$$= (\phi_0, x\phi_0) - \frac{(\phi_0, x\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}(\phi_0,\phi_0)$$
$$= 0 .$$

Antag: $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_j\}$ är ett ortogonalsystem (med ledande koefficient 1)
Sätt:

$$(*) \qquad \phi_{j+1}(x) = x\,\phi_j(x) - \sum_{i=0}^{j} \frac{(\phi_i, x\phi_j)}{\|\phi_i\|_{2,w}^2}\,\phi_i(x) .$$

Då gäller för $0 \le k \le j$ att

$$(\phi_{j+1}, \phi_k) = \left(x\phi_j - \sum_{i=0}^{j} \frac{(\phi_i, x\phi_j)}{(\phi_i,\phi_i)}\phi_i , \phi_k\right)$$
$$= (x\phi_j, \phi_k) - (\phi_k, x\phi_j)$$
$$= 0 .$$

Alltså är ϕ_{j+1} ett polynom av gradtal $j+1$ som är ortogonalt mot ϕ_i, $i = 0,\dots,j$.
Om vi sätter $j=0$ i $(*)$ så ser vi att vi har överensstämmelse med $\boxed{3^\circ}$.
Antag nu att $j \ge 1$. Om $i \le j-2$ så gäller

$$(\phi_i, x\phi_j) = \int_a^b w(x)\cdot\phi_i(x)\cdot(x\,\phi_j(x))\,dx$$
$$(**) \qquad = \int_a^b w(x)\,(x\,\phi_i(x))\,\phi_j(x)\,dx$$
$$= (x\phi_i, \phi_j) = 0,$$

ty $x\cdot\phi_i(x) \in \mathcal{P}_{j-1}$ och ϕ_j är ortogonal mot varje polynom i $\mathcal{P}_{j-1}$ (sats 10.2.1).
Alltså reduceras $(*)$ till uttrycket:

$$\phi_{j+1}(x) = x\,\phi_j(x) - \frac{(\phi_j, x\phi_j)}{\|\phi_j\|_{2,w}^2}\phi_j(x) - \frac{(\phi_{j-1}, x\phi_j)}{\|\phi_{j-1}\|_{2,w}^2}\phi_{j-1}(x)$$
$$= (x-\alpha_j)\cdot\phi_j(x) - \frac{(\phi_{j-1}, x\phi_j)}{\|\phi_{j-1}\|_{2,w}^2}\cdot\phi_{j-1}(x)$$

Nu gäller analogt med $(**)$ att

$$(\phi_{j-1}, x\,\phi_j) \overset{(**)}{=} (x\phi_{j-1}, \phi_j)$$
$$= (x\phi_{j-1} - \phi_j + \phi_j, \phi_j)$$
$$= (\phi_j, \phi_j) + (x\phi_{j-1} - \phi_j, \phi_j)$$
$$= (\phi_j, \phi_j),$$

ty $x\,\phi_{j-1} - \phi_j \in \mathcal{P}_{j-1}$.

Därmed erhålls

$$\phi_{j+1}(x) = (x-\alpha_j)\phi_j(x) - \frac{(\phi_j,\phi_j)}{\|\phi_{j-1}\|^2_{2,w}}\phi_{j-1}(x)$$
$$= (x-\alpha_j)\phi_j(x) - \beta_j\phi_{j-1}(x),$$

vilket överensstämmer med 5]. Fullständig induktion ger nu att satsen gäller.

Om vi har en jämn viktfunktion $w(x)$ i ett intervall $[-a,a]$, som är symmetriskt kring origo, erhåller vi en enklare rekursionsformel.

Sats 10.2.3. Antag att vi har en viktfunktion $w(x)$ som är jämn i intervallet $[-a,a]$. Då ges de ortogonala polynomen $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ i sats 10.2.2 av en rekursionsformel där $\alpha_j = 0$ för alla $j \geq 0$.

Bevis: Vi bör visa att $(\phi_j, x\phi_j) = 0$ då $j \geq 0$. Det gäller att

$$(\phi_j, x\phi_j) = \int_{-a}^{a} x\phi_j(x)\phi_j(x)w(x)\,dx$$

uttrycket är $= 0$, om vi kan visa att $g(x) = x\phi_j(x)\phi_j(x)$ är en udda funktion.
För godtyckligt polynom $P(x)$ gäller:

$$\int_{-a}^{a} P(x)w(x)\,dx = \int_{a}^{-a} P(-t)w(-t)(-1)\,dt = \int_{-a}^{a} P(-t)w(t)\,dt.$$

Speciellt gäller då för $n \neq m$:

$$0 = \int_{-a}^{a}\phi_n(x)\phi_m(x)w(x)\,dx = \int_{-a}^{a}\phi_n(-x)\phi_m(-x)w(x)\,dx.$$

Alltså är även $\{\phi_j(-x),\ j=0,1,2,\ldots\}$ en följd av ortogonala polynom med avseende på viktfunktionen $w(x)$ i $[-a,a]$.

Men eftersom de ortogonala polynomen är entydigt bestämda om den ledande koefficienten för ϕ_j är 1, $j=0,1,\ldots$, så erhåller vi med beaktande av att den ledande koefficienten för $\phi_j(-x)$ är $(-1)^j$, $j=0,1,\ldots$, att

$$\phi_j(-x) = (-1)^j\phi_j(x), \quad j=0,1,\ldots.$$

Då gäller för $x \in [-a,a]$ att:

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)\phi_j(-x)\phi_j(-x) \\ &= (-x)(-1)^j\phi_j(x)(-1)^j\phi_j(x) \\ &= -x\phi_j(x)\phi_j(x) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Alltså är $g(x)$ en udda funktion i $[-a,a]$ och därmed är beviset klart.

Ex) Om vi har den jämna viktfunktionen $w(x) = 1$ på intervallet $[-1,1]$ så kallas den följd av ortogonala polynom P_j, $j=0,1,\ldots$ som genereras av tretermsrekursionsformeln i sats 10.2.2 Legendres polynom.
Rekursionsformeln ges av uttrycket:

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \dfrac{n^2}{4n^2-1}P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \end{cases}$$

Legendres polynom är specialfall av Jacobi polynom, som ges av

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \alpha,\beta > -1.$$

Valet $\alpha = \beta = 0$ ger Legendres polynom.

Valet $\alpha = \beta > -1$ ger en jämn viktfunktion, man erhåller de ultrasfäriska polynomen, Gegenbauers polynom.

10.3 Nollställen för ortogonala polynom. (141)

Sats 10.3.1. Låt $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ vara följden av ortogonala polynom på intervallet $[a,b]$ svarande mot viktfunktionen $w(x)$. ϕ_k är av gradtal k. Då har $\phi_k(x)$ exakt k stycken olika reella nollställen i det öppna intervallet (a,b).

Bevis: Antites: Antag att $\phi_n(x)$, $n>0$, har k st. teckenväxlingar i (a,b), $0 \le k < n$.

Vi betecknar med $t_1, t_2, \ldots, t_k$ punkterna där $\phi_n(x)$ växlar tecken. Om $k=0$ har $\phi_n(x)$ konstant tecken i $[a,b]$ och om $k>0$ så har

$$\phi_n(x)(x-t_1)(x-t_2)\cdots(x-t_k) = \phi_n(x)\prod_{i=1}^{k}(x-t_i),$$

konstant tecken i $[a,b]$. Då $k<n$ kan polynomet $\prod_{i=1}^{k}(x-t_i)$ uttryckas som en linjärkombination av $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k\}$:

$$\prod_{i=1}^{k}(x-t_i) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_k\phi_k(x).$$

Men då gäller

$$\int_a^b \phi_n(x)\prod_{i=1}^{k}(x-t_i)\,w(x)\,dx = \int_a^b \phi_n(x)\left(a_0\phi_0(x) + \ldots + a_k\phi_k(x)\right)w(x)\,dx$$

$$= a_0\int_a^b \phi_n(x)\phi_0(x)w(x)\,dx + \ldots + a_k\int_a^b \phi_n(x)\phi_k(x)w(x)\,dx$$

$$= 0,$$

ty $(\phi_n, \phi_i) = 0$, då $i = 0, \ldots, k$.

Men eftersom integranden har konstant tecken (≥ 0 eller ≤ 0), och inte är identiskt lika med noll, så leder detta

(142) till en motsägelse. Antites är falsk och satsen gäller. □

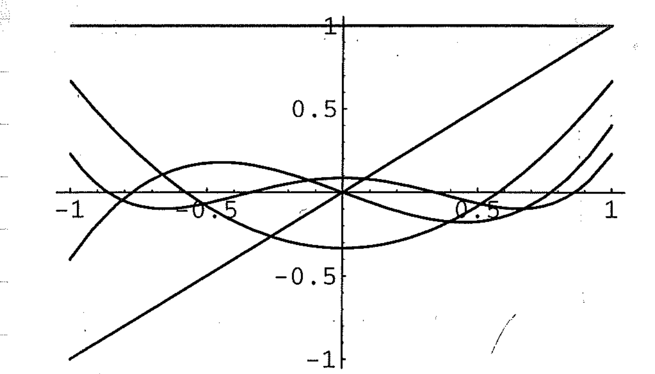
Ex Vi bestämmer nollställen för Legendre polynom på $[-1,1]$. Enligt föregående exempel erhålls P_n ur

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x P_n(x) - \dfrac{n^2}{4n^2-1} P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \end{cases}$$

$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, nollställen $\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, —"— $\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\}$

$P_4(x) = x^4 - \frac{122}{105}x^2 + \frac{1}{7}$, —"— $\{-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136\}$



P_0, P_1, P_2, P_3 och P_4

Om $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ är ortogonala polynom på $[a,b]$ med avseende på vikten $w(x)$, och om nollställen för ϕ_n, $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}$ ordnas i en växande följd $x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{nn}$, så kan man visa att nollställena för ϕ_{n+1} separerar nollställena för ϕ_n. Det vill säga vi har:

$$x_{n+1,1} < x_{n1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} \ldots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

10.4 Gauss kvadraturformel

I numerisk kvadratur ställs man inför problemet att med ett så litet antal funktionsevalueringar som möjligt bilda en linjärkombination av funktionsvärden som approximerar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

med ett litet fel. Vi skall betrakta problemet att givet en viktfunktion $w(x)$ hitta $(n+1)$ st. abskissor $x_0,\dots,x_n$ och $(n+1)$ st. koefficienter $c_0, c_1,\dots, c_n$, så att

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \qquad (*)$$

för $f \in C[a,b]$. Abskissorna uppfyller kravet $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$. $(**)$
Ett sätt att välja vikterna c_i och abskissorna x_i är ~~att~~ kräva att formeln $(*)$ blir exakt för polynomiella f av så högt gradtal som möjligt.
Om vi väljer abskissorna x_i godtyckligt så att de uppfyller kravet $(**)$ kan vi välja c_i:na så att $(*)$ blir exakt för $f \in \mathcal{P}_n$.
Om $f \in \mathcal{P}_n$ kan vi med stöd av Lagranges interpolationsformel skriva:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x),$$

där $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j) \Big/ \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i-x_j)$.

Vi får då

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b \Big(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\Big) w(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \Big(\int_a^b l_i(x)w(x)dx\Big) f(x_i)$$
$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n),$$

där $c_i = \int_a^b l_i(x)w(x)\,dx, \quad i = 0,\dots,n.$

Genom ~~ett~~ speciellt val av abskissorna $x_0,\dots,x_n$ får vi formeln $(*)$ exakt för $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$.

Sats 10.4.1. Låt $w(x)$ vara en positiv viktfunktion på $[a,b]$ och låt $\phi_0, \phi_1, \dots$ vara ortogonala polynom, ϕ_i av gradtal i, med avseende på vikten $w(x)$ på $[a,b]$. Om $x_0, x_1,\dots, x_n$ väljs till nollställen för $\phi_{n+1}(x)$ så blir formeln

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx c_0 f(x_0) + \dots + c_n f(x_n),$$

exakt för alla polynom i $\mathcal{P}_{2n+1}$ ifall man väljer

$$c_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx, \quad i = 0,\dots,n.$$

Bevis: Låt $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$. $q(x)$ betecknar kvoten och $r(x)$ resten vid divisionen f/ϕ_{n+1}. Alltså gäller:

$$f(x) = q(x)\phi_{n+1}(x) + r(x),$$

där q och r tillhör $\mathcal{P}_n$. Då gäller:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b q(x)\phi_{n+1}(x)w(x)dx + \int_a^b r(x)w(x)dx$$
$$= \int_a^b r(x)w(x)\,dx,$$

ty $(\phi_{n+1}, q) = 0$ då $q \in \mathcal{P}_n$. Vidare gäller:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i q(x_i)\phi_{n+1}(x_i) + \sum_{i=0}^{n} c_i r(x_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} c_i r(x_i),$$

ty $\phi_{n+1}(x_i) = 0$, då $i = 0,\dots,n$.

Om vi nu väljer $C_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx$, $i=0,\dots,n$, så erhåller vi på grund av att $r \in P_n$ att:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \int_a^b r(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i).$$

Därmed har vi bevisat Gauss kvadratur formel.

Sats 10.4.2. Koefficienterna $C_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx$ i Gauss kvadratur formel är positiva.

Bevis: polynomet $(l_i(x))^2 \in P_{2n}$ och enligt föregående sats gäller då

$$\int_a^b (l_i(x))^2 w(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j (l_i(x_j))^2 = c_i(l_i(x_i))^2 = c_i \cdot 1,$$

ty $l_i(x_j) = 0$ om $i \neq j$. Alltså gäller det att $c_i > 0$ då $i = 0,1,\dots,n$. □

Sats 10.4.3. Låt $w(x)$ vara en viktfunktion på $[a,b]$ och låt $\varphi_0, \varphi_1, \dots,$ vara ortogonala polynom med avseende på $w(x)$. Abskissorna $x_0, x_1, \dots, x_n$ är nollställena till $\varphi_{n+1}(x)$, och

$$C_i = \int_a^b l_i(x)w(x)\,dx, \quad i = 0,\dots,n.$$

Om $f \in C^{2n+2}[a,b]$ så gäller:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \Big(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\Big)^2 w(x)\,dx,$$

för något $\xi \in (a,b)$.

Bevis: Låt $Q(x)$ vara Hermites interpolationspolynom som uppfyller:

$$\begin{cases} Q(x_i) = f(x_i) \\ Q'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, \quad i = 0,\dots,n.$$

$Q \in P_{2n+1}$. Alltså är Gauss kvadratur formel exakt för $Q(x)$.

$$\int_a^b Q(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i Q(x_i).$$

Med stöd av resttermen vid Hermite-interpolation, sats 5.4.1 sida 71, erhålls:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \int_a^b f(x)w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} c_i Q(x_i)$$
$$= \int_a^b (f(x) - Q(x))w(x)\,dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \Big(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\Big)^2 w(x)\,dx,$$

för något $\xi \in (a,b)$. □

Ex: I Gauss-Legendres kvadraturformel använder vi Legendre polynomen och har vikten $w(x)=1$ på $[-1,1]$.

$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, nollställen: $\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

1° två abskissor: $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$C_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}\,dx = 1$$

$$C_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x - (-\frac{1}{\sqrt{3}})}{\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\frac{1}{\sqrt{3}})}\,dx = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\cdot w(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx \approx e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 2{,}342696$$

2° tre abskissor: $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, nollställen $\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\}$

$$C_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x(x - \sqrt{\frac{3}{5}})}{(-\sqrt{\frac{3}{5}})(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}})}\,dx = \frac{5}{9} = C_2, \quad C_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - \frac{3}{5}}{-\frac{3}{5}}\,dx = \frac{8}{9}.$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\tfrac{3}{5}})$$

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx \approx \frac{5}{9} e^{-\sqrt{\frac{3}{5}}} + \frac{8}{9} e^0 + \frac{5}{9} e^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \approx 2{,}350337$$

exakta värdet: $\int_{-1}^{1} e^x\,dx \approx 2{,}350402387$

(Med fyra abskissor erhålls $\int_{-1}^{1} e^x\,dx \approx 2{,}350402093$)

10.5 Rodrigues formel och de klassiska ortogonala polynomen.

Ibland kan de ortogonala polynomen associerade med vikten $w(x)$ på $[a,b]$ beräknas på ett enklare sätt än sats 10.2.2. Då stöder man sig på följande karakterisering av ortogonala polynom.

Sats 10.5.1: Låt $w(x)$ vara en viktfunktion på intervallet $[a,b]$. Funktionen $\phi_{k+1} \in C[a,b]$ uppfyller

$$(*) \qquad \int_a^b w(x)\phi_{k+1}(x)p(x)\,dx = 0, \quad p \in P_k,$$

om och endast om det finns en funktion $u \in C^{(k+1)}[a,b]$ för vilken det gäller att

$$(**) \qquad w(x)\phi_{k+1}(x) = u^{(k+1)}(x), \quad a \le x \le b,$$

och

$$(***) \qquad u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0, \quad i = 0,1,2,\dots,k.$$

Bevis: 1° Antag att (**) och (***) gäller. Då erhålls genom upprepad partiell integration:

$$\int_a^b \phi_{k+1}(x)p(x)w(x)\,dx \overset{(**)}{=} \int_a^b u^{(k+1)}(x)p(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[u^{(k)}(x)p(x)\right]_a^b}_{=0\ (***)} - \int_a^b u^{(k)}(x)p'(x)\,dx$$

$$= -\underbrace{\left[u^{(k-1)}(x)p'(x)\right]_a^b}_{=0} + \int_a^b u^{(k-1)}(x)p''(x)\,dx$$

$$= \dots = (-1)^{k+1}\int_a^b u(x)p^{(k+1)}(x)\,dx = 0,$$

ty $p \in P_k$.

2° Antag att (*) gäller. Nu kan vi välja u så att följande gäller:

$$u^{(k+1)}(x) = w(x)\cdot\phi_{k+1}(x), \quad a \le x \le b$$

$$u^{(k)}(x) = \int_a^x w(t)\phi_{k+1}(t)\,dt, \quad a \le x \le b$$

$$u^{(k-1)}(x) = \int_a^x u^{(k)}(t)\,dt, \quad a \le x \le b$$

$$\vdots$$

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt, \quad a \le x \le b.$$

Då gäller $u^{(i)}(a) = 0$, $i = 0,1,2,\dots,k$.
Låt $p(x) = (b-x)^j$. Enligt antagandet (*):

$$\int_a^b u^{(k+1)}(x)(b-x)^j\,dx = 0.$$

För $j=0$ erhålls:

$$0 = \int_a^b u^{(k+1)}(x)\cdot 1\cdot dx = \left[u^{(k)}(x)\right]_a^b = u^{(k)}(b) - u^{(k)}(a)$$

$$= u^{(k)}(b).$$

För $1 \le j \le k$ ger upprepad partiell integration:

$$0 = \int_a^b u^{(k+1)}(x)(b-x)^j\,dx = \underbrace{\left[(b-x)^j u^{(k)}(x)\right]_a^b}_{=0} +$$

$$+ \int_a^b u^{(k)}(x)\,j(b-x)^{j-1}\,dx = j\int_a^b u^{(k)}(x)(b-x)^{j-1}\,dx$$

$$= \dots = j(j-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \int_a^b u^{(k+1-j)}(x)(b-x)^0\,dx$$

$$= j!\left(u^{(k-j)}(b) - u^{(k-j)}(a)\right)$$

$$= j!\,u^{(k-j)}(b).$$

$\therefore\ u^{(k-j)}(b) = 0$, då $j = 0,1,\dots,k$. □

För att generera ortogonala polynom med hjälp av sats 10.5.1 måste man hitta en funktion u som uppfyller (***) och som är sådan att ϕ_{k+1} definierad av (**) blir ett polynom av gradtal $k+1$. Detta kan göras för endel viktfunktioner $w(x)$, bl.a. för de klassiska ortogonala polynomen.

Ex Jacobi polynom.

Låt $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $-1 \le x \le 1$; $\alpha, \beta > -1$.
Då kallas polynomen $\phi_j(x)$, $j=0,1,\ldots$, som uppfyller:

$$\int_{-1}^{1} \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,(1-x)^\alpha (1+x)^\beta\,dx = 0,$$

då $m \ne n$, Jacobi polynom. Definiera u genom:

$$\begin{cases} u(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta (1-x)^{k+1}(1+x)^{k+1} = (1-x)^{\alpha+k+1}(1+x)^{\beta+k+1}. \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(x) = (1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}\underbrace{\left(-(\alpha+k+1)(1+x) + (\beta+k+1)(1-x)\right)}_{P_1 \in \mathcal{P}_1} \\ u'(-1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} u^{(k)}(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} \cdot \underbrace{P_k}_{\in \mathcal{P}_k} \\ u^{(k)}(-1) = u^{(k)}(1) = 0 \end{cases}$$

$$u^{(k+1)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \cdot \underbrace{P_{k+1}}_{\mathcal{P}_{k+1}} = w(x)\,\phi_{k+1}(x)$$

Med stöd av sats 10.5.1 erhålls Rodrigues formel för Jacobi polynom:

$$\phi_j(x) = \frac{1}{w(x)} \cdot \frac{d^j}{dx^j}\left((1-x)^{\alpha+j}(1+x)^{\beta+j}\right)$$
$$= (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \cdot \frac{d^j}{dx^j}\left((1-x)^{\alpha+j}(1+x)^{\beta+j}\right)$$

$j = 0, 1, \ldots$.

$\alpha = \beta = 0$: Legendres polynom, $w(x) = 1$.
$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$: Tjebysjev polynom, $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$\alpha = \beta > -1$: Gegenbauers polynom, $w(x) = (1-x^2)^\alpha$

Ex Laguerre polynom

Om vi betraktar intervallet $[0, \infty)$ med viktfunktionen $w(x) = e^{-x}$ erhålls Laguerre polynom som kan genereras med Rodrigues formel, som i detta fall antar formen:

$$\phi_j(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^j}{dx^j}\left(x^j e^{-x}\right)$$
$$= e^x \cdot \frac{d^j}{dx^j}\left(x^j e^{-x}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Laguerres polynom kan användas vid numerisk integration av formen:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i).$$

Ex Hermite polynom

Om vi har viktfunktionen $w(x) = e^{-x^2}$ på intervallet $(-\infty, \infty)$ erhålls Hermites polynom med Rodrigues formel:

$$\phi_j(x) = \frac{1}{w(x)} \cdot \frac{d^j}{dx^j}\left(e^{-x^2}\right)$$
$$= e^{x^2} \cdot \frac{d^j}{dx^j}\left(e^{-x^2}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Hermite polynom kan användas vid numerisk integration av formen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i).$$

10.6 Ortogonalutveckling av funktioner

(151)

Vi betraktar $C[a,b]$ försett med skalärprodukten

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx .$$

Låt $\phi_0, \phi_1, \ldots$ vara ortogonala polynom på $[a,b]$ med avseende på vikten $w(x)$. Den entydiga bästa minsta kvadrat approximationen till $f \in C[a,b]$ betecknas $S_n f$,

$$(S_n f)(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x) ,$$

där f:s Fourierkoefficienter c_j ges av

$$c_j = \frac{(f,\phi_j)}{(\phi_j,\phi_j)} , \quad j = 0,\ldots,n,$$

och c_j:na är oberoende av n. Till f kan vi nu associera en formell ortogonalutveckling,

$$f \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j \phi_j(x) . \qquad (*)$$

Vi har utvecklat f i en ortogonalserie, generaliserad Fourierserie.

Tack vare diskussionen i avsnitt 10.1 vet vi att

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n f\|_{2,w} = 0 .$$

Vi kan ställa oss följande två frågor angående ortogonalutvecklingen $(*)$.

(152)

1° Om ortogonalutvecklingen $(*)$ konvergerar i punkten $x_0 \in [a,b]$ gäller det då att

$$f(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \phi_j(x_0) \quad ?$$

2° Om ortogonalutvecklingen $(*)$ konvergerar i varje punkt $x_0 \in [a,b]$, när kan vi erhålla

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n f\|_\infty = 0,$$

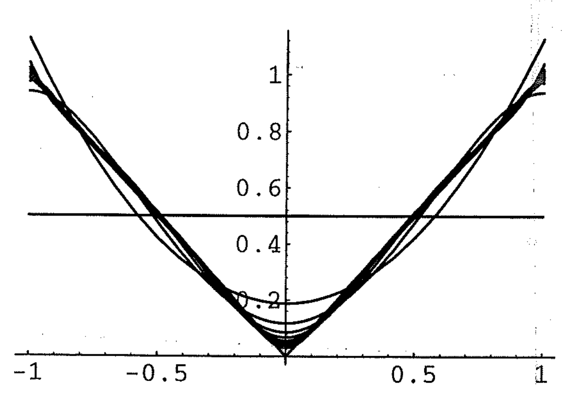
dvs. likformig konvergens ?

Ex Vi utvecklar $f(x) = |x|$ på $[-1,1]$ i Legendre serie, dvs. med vikten $w(x) = 1$.

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = x P_n(x) - \dfrac{n^2}{4n^2-1} P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \end{cases}$$

$$c_j = \frac{(|x|, P_j)}{\|P_j\|^2_{2,w}} , \quad (c_j = 0 \text{ om } j \text{ udda})$$

j	c_j	$\|f - S_j f\|_\infty$
0	0,5	0,5
2	15/16	0,1875
4	−0,8203	0,1172
6	1,4663	0,0854
8	−3,3385	0,0673
10	8.6337	0,0555
12	−24.177	0,0472
14	71,510	0,0411
16	−220,14	0,0364
18	698,73	0,0327
20	−2271.97	0,0296



Felet är ungefär dubbelt så stort som det optimala L_∞-felet.

(153)

Det visar sig ofta fördelaktigt att utveckla en funktion $f \in C[-1,1]$ i Tjebysjevserie.

Sats 10.6.1. Tjebysjevpolynomen $T_j(x) = \cos(j\theta)$, $x = \cos\theta$, $j = 0,1,\ldots$, är ortogonala polynom med avseende på viktfunktionen $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Det gäller att

$$\int_{-1}^{1} T_j(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \frac{\pi}{2}, & j = k > 0 \\ \pi, & j = k = 0 \end{cases}.$$

Bevis: sätt $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta \, d\theta$

$$I(j,k) := \int_{-1}^{1} T_j(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^{0} \cos(j\theta)\cos(k\theta) \cdot \frac{-\sin\theta \, d\theta}{\sin\theta}$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(j\theta)\cos(k\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \{\cos(j+k)\theta + \cos(j-k)\theta\} d\theta.$$

$\cos(j+k)\theta$ och $\cos(j-k)\theta$ är udda funktioner på intervallet $[0,\pi]$ med avseende på $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $I(j,k) = 0$ då $j \neq k$.

$$I(0,0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2 d\theta = \pi. \quad I(j,j) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(2j\theta)+1) d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}, \quad j > 0. \quad \square$$

Definition. Vi betecknar den n:te partialsumman av en utveckling i Tjebysjevserie med $R_n f$.

$$(R_n f)(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(f,T_j)}{\|T_j\|_{2,w}^2} T_j(x)$$
$$= \frac{(f,T_0)}{\pi} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2(f,T_j)}{\pi} T_j(x).$$

$R_n f$ är den i L_∞-mening bästa approximationen ur P_n om $f \in P_{n+1}$. Vidare vet vi att

(154)

$R_n f$ är en linjär projektion och att $\|R_n\|_2 = 1$. Följande sats antyder att L_∞-felet $\|f - R_n f\|_\infty$ ofta kan vara nära det optimala.

Sats 10.6.2. Operatornormen $\|R_n\|_\infty$ ges av:

$$\|R_n\|_\infty = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\tan\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right)$$

Bevis: (se boken). $$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \right| d\theta.$$

n	$\|R_n\|_\infty$	n	$\|R_n\|_\infty$
2	1.6422	12	2.2940
4	1.8801	14	2.3542
6	2.0290	16	2.4065
8	2.1377	18	2.4529
10	2.2234	20	2.4945

Normen är en aning mindre än $\|L_n\|_\infty$ vid Tjebysjevinterpolation. (Jämför med de värden som vi har beräknat i en hemuppgift!)

Sats (Weierstrass M-test). Om $f_n(x) \leq M_n$ för varje $x \in [a,b]$ och om $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$, så konvergerar $\sum_{j=0}^{n} f_j(x)$ likformigt på $[a,b]$ (då $n \to \infty$)

Bevis: (se analyskursen)

Sats 10.6.3. Om $f \in C^2[-1,1]$ så konvergerar utvecklingen av f i Tjebysjevserie likformigt mot f.

Bevis: Vi uttrycker Tjebysjevserien som

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x),$$

där

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Variabelbytet $x = \cos\theta$ resulterar i

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\theta)\cos(k\theta) d\theta, \quad k = 0,1,\ldots,$$

där $g(\theta) = f(\cos\theta)$. Vi noterar att $g \in C^2[0,\pi]$. Partiell integration 2 ggr. ger:

$$(k\ge 1)\quad a_k = \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\frac{\sin(k\theta)}{k}\, g(\theta)}_{=0}\Big]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(k\theta)}{k}\, g'(\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\Big[-\frac{\cos(k\theta)}{k}\, g'(\theta)\Big]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -\frac{\cos(k\theta)}{k^2}\, g''(\theta)\, d\theta.$$

Alltså finns det en konstant $M > 0$: $|a_k| \le \frac{M}{k^2}$, $k=0,1,\dots$. Men då konvergerar $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, och med stöd av Weierstrass M-test konvergerar utvecklingen i Tjebysjevserie likformigt. Partialsummorna R_nf bildar då en följd av likformigt konvergerande kontinuerliga funktioner, alltså är gränsfunktionen F kontinuerlig. Vi bör visa att $f = F$. Nu gäller

$$\|f-F\|_{2,w} = \|f - R_nf + R_nf - F\|_{2,w}$$
$$\le \|f-R_nf\|_{2,w} + \|R_nf - F\|_{2,w}$$
$$< \varepsilon \quad \text{såsnart } n > N_\varepsilon .$$

Alltså gäller $\|f-F\|_{2,w} = 0 \iff f \equiv F$. □

Exempelvis $f(x) = |x|$ uppfyller inte villkoret i sats 10.6.3, men vi kan formulera en motsvarande sats med ~~ett~~ svagare villkor som uppfylls av t.ex. $f(x) = |x|$.

Definition: Låt $f \in C[a,b]$. Då definierar vi funktionen $\omega(\delta)$, $0 \le \delta \le b-a$, som kallas kontinuitetsmodulen för f (the modulus of continuity), genom

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y|\le\delta} |f(x)-f(y)|,$$

där $x, y \in [a,b]$.

Sats 10.6.4. (Dini-Lipschitz). Om $f \in C[-1,1]$ uppfyller Dini-Lipschitz villkor,

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta)\cdot \ln(\delta) = 0,$$

så konvergerar utvecklingen av f i Tjebysjevserie likformigt mot f i $[-1,1]$.

Vi avstår från att bevisa satsen och övergår till att besvara fråga 1° på sida 152.

Operatorn $S_n : C[a,b] \to P_n$ kan skrivas som en integraloperator:

$$(S_nf)(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(f,\phi_j)}{\|\phi_j\|^2_{2,w}}\,\phi_j(x) = \sum_{j=0}^{n}\left(\int_a^b \frac{f(t)\phi_j(t)}{\|\phi_j\|^2_{2,w}}\, w(t)\, dt\right)\phi_j(x)$$

$$= \int_a^b f(t)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\phi_j(t)\phi_j(x)}{\|\phi_j\|^2_{2,w}}\right) w(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(t)\, K_n(t,x)\, w(t)\, dt,$$

där $K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\phi_j(t)\phi_j(x)}{\|\phi_j\|^2_{2,w}}$ kallas kärnan för ortogonalsystemet $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$.

Antag att de ortogonala polynomen $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ har ledande koefficient lika med 1. Låt polynomen $\{\bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_1, \dots\}$ vara de motsvarande ortonormala polynomen. Låt $\frac{1}{\lambda_n}$ vara ledande koefficient för $\bar{\Phi}_n(x)$. Då gäller att $\Phi_n(x) = \lambda_n \bar{\Phi}_n(x)$.

Sats 10.6.5. (Christoffel-Darboux identiteten). Kärnan $K_n(t,x)$ för de ortonormala polynomen $\bar{\Phi}_n(x)$ kan skrivas i formen:

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} \bar{\Phi}_j(t)\bar{\Phi}_j(x) = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\cdot \frac{\bar{\Phi}_{n+1}(x)\bar{\Phi}_n(t) - \bar{\Phi}_n(x)\bar{\Phi}_{n+1}(t)}{x-t}$$

Bevis: Från treterms rekursionsformeln erhålls:

$$\begin{cases}\phi_{n+1}(x)\phi_n(t) = (x-\alpha_n)\phi_n(x)\phi_n(t) - \beta_n\phi_{n-1}(x)\phi_n(t)\\ \phi_{n+1}(t)\phi_n(x) = (t-\alpha_n)\phi_n(t)\phi_n(x) - \beta_n\phi_{n-1}(t)\phi_n(x)\end{cases}$$

Alltså erhåller vi:

$$\phi_{n+1}(x)\phi_n(t) - \phi_{n+1}(t)\phi_n(x) =$$

(*)

$$= (x-t)\phi_n(t)\phi_n(x) + \beta_n\left[\phi_n(x)\phi_{n-1}(t) - \phi_n(t)\phi_{n-1}(x)\right]$$

Nu gäller: $\beta_n = \frac{(\phi_n,\phi_n)}{(\phi_{n-1},\phi_{n-1})}$. Vidare gäller:

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^2(\bar\phi_n,\bar\phi_n) = (\lambda_n\bar\phi_n,\lambda_n\bar\phi_n) = (\phi_n,\phi_n).$$

Alltså gäller: $\beta_n\cdot\lambda_{n-1}^2 = \lambda_n^2$. Vi dividerar (*) med λ_n^2 och erhåller:

$$\lambda_n^{-2}\left[\phi_{n+1}(x)\phi_n(t) - \phi_{n+1}(t)\phi_n(x)\right] =$$

(**)

$$= (x-t)\bar\phi_n(x)\bar\phi_n(t) + \lambda_{n-1}^{-2}\left[\phi_n(x)\phi_{n-1}(t) - \phi_n(t)\phi_{n-1}(x)\right]$$

Nu upprepar vi förfarandet på den sista termen i (**) och därefter på den sista termen i det erhållna uttrycket o.s.v. Vi erhåller slutligen:

$$\lambda_n^{-2}\left[\phi_{n+1}(x)\phi_n(t) - \phi_{n+1}(t)\phi_n(x)\right] =$$

$$= (x-t)\sum_{j=1}^{n}\bar\phi_i(x)\bar\phi_i(t) + \lambda_0^{-2}\left[\phi_1(x)\phi_0(t) - \phi_1(t)\phi_0(x)\right]$$

$$= (x-t)\sum_{j=0}^{n}\bar\phi_i(x)\bar\phi_i(t)$$

Om vi sätter $\phi_n(x) = \lambda_n\bar\phi_n(x)$ och $\phi_{n+1}(x) = \lambda_{n+1}\bar\phi_{n+1}(x)$ så erhålls satsens påstående. □

På grund av Bessels olikhet gäller

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(f,\bar\phi_j)^2}{\|\bar\phi_j\|^2_{2,w}} = \sum_{j=0}^{\infty}(f,\bar\phi_j)^2 \le \|f\|^2_{2,w}$$

Men fourierkoefficienterna för det ortonormala systemet $\{\bar\Phi_0,\bar\Phi_1,\dots\}$ ges av $\bar c_j = (f,\bar\Phi_j)$. Alltså har vi att $\bar c_j \to 0$, då $j\to\infty$.

Sats 10.6.6. Om de ortonormala polynomen $\bar\Phi_j(x)$, $j=0,1,\dots$, är begränsade i punkten x_0, $x_0\in[a,b]$, om $f\in C[a,b]$, och om det finns ett $\alpha>0$ så att $|f(x_0)-f(x)|\le\alpha|x_0-x|$ då $x\in[a,b]$, så gäller det att

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty}(S_nf)(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty}(f,\bar\Phi_j)\bar\Phi_j(x_0).$$

Bevis: Talen $\lambda_n\cdot\lambda_{n-1}^{-1}$ är begränsade, ty

$$\lambda_n^2 = (\phi_n,\phi_n) = (\phi_n, x\phi_{n-1} - \alpha_{n-1}\phi_{n-1} - \beta_{n-2}\phi_{n-2}) = (\phi_n, x\phi_{n-1})$$

$$\le \int_a^b |x||\phi_n(x)||\phi_{n-1}(x)|w(x)\,dx \le C\cdot(|\phi_n|,|\phi_{n-1}|)$$

$$\le C\,\||\phi_n|\|_2\,\||\phi_{n-1}|\|_2 = C\|\phi_n\|_2\|\phi_{n-1}\|_2 = C\lambda_n\lambda_{n-1}$$

Alltså $\lambda_n\cdot\lambda_{n-1}^{-1} \le C = \max_{a\le x\le b}|x|$. Vi har att $(S_n1)(t) = (1,\bar\Phi_0)\bar\Phi_0(t) = 1$. Felet ε_n definieras som $\varepsilon_n := f(x_0) - (S_nf)(x_0) = f(x_0)(S_n1)(x_0) - (S_nf)(x_0)$. Integralrepresentationen av S_n, sid 156, ger:

$$\varepsilon_n = \int_a^b (f(x_0)-f(x))\left(\sum_{j=0}^{n}\bar\Phi_j(x_0)\bar\Phi_j(x)\right)w(x)\,dx$$

Med stöd av Christoffel-Darboux identiteten erhålls:

$$\varepsilon_n = \lambda_{n+1}\lambda_n^{-1}\int_a^b\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\left[\bar\Phi_{n+1}(x_0)\bar\Phi_n(x) - \bar\Phi_n(x_0)\bar\Phi_{n+1}(x)\right]w(x)\,dx$$

$$= \lambda_{n+1}\lambda_n^{-1}\left[(h,\bar\Phi_n)\bar\Phi_{n+1}(x_0) - (h,\bar\Phi_{n+1})\bar\Phi_n(x_0)\right],$$

där $h(x) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$. $|h(x)|\le\alpha$ på $[a,b]$ på grund av att f uppfyller $|f(x_0)-f(x)|\le\alpha|x_0-x|$. Bessels olikhet gäller för h, Fourierkoefficienterna $(h,\bar\Phi_n)\to 0$ då $n\to\infty$. Vidare är $\lambda_{n+1}\lambda_n^{-1}\le C\ \forall n$, och $\bar\Phi_n(x_0)$ är begränsad, $n=0,1,\dots$. Så $\varepsilon_n\to 0$, då $n\to\infty$. □