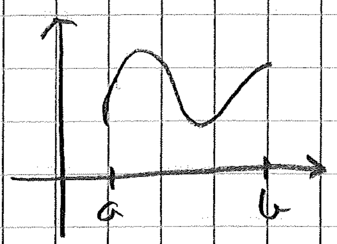
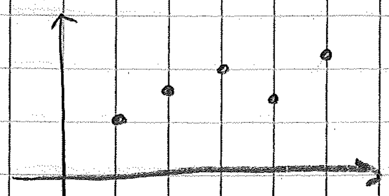
1.1 Inledning.

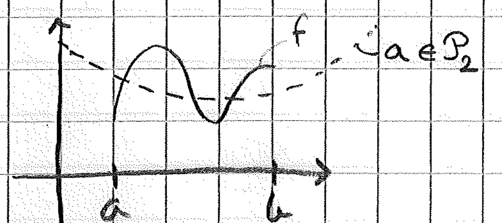
Problemformulering:

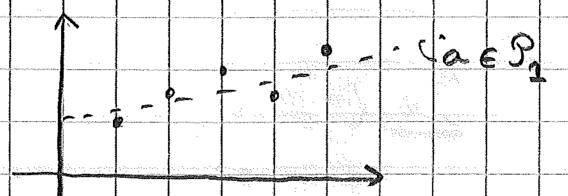
1| Vi har givet ett element $f \in \mathcal{B}$, där $\mathcal{B}$ exempelvis är mängden av kontinuerliga funktioner, $C[a,b]$, på intervallet $[a,b]$, eller $\mathcal{B} = \{(x_i, y_i) \mid (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 1, \dots, n\}$.





2| Vi vill approximera f med ett element $a \in \mathcal{A}$, där $\mathcal{A}$ är en mängd av approximanter. $\mathcal{A}$ kan t.ex. vara $\mathcal{P}_n$ = mängden av alla polynom (med reella koefficienter) av gradtal $\leq n$.





3| Vi måste ha ett "mått på godheten" av approximationen. $0 \leq d(f,a) \in \mathbb{R}$. Om $\mathcal{B} = C[a,b]$ och $\mathcal{A} = \mathcal{P}_n$ kan man välja

$$d(f,a) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - a(x)| .$$

Frågeställningar:

- Existerar det en bästa approximant $a^* \in \mathcal{A}$, $d(f,a^*) \leq d(f,a)\ \forall a \in \mathcal{A}$?
- Om a^* existerar är den entydigt bestämd?
- Kan vi för varje $\varepsilon > 0$ hitta $a_\varepsilon \in \mathcal{A}$: $d(a_\varepsilon, f) \leq \varepsilon$?
- Kan a^* eller en "nästan optimal" approximant a beräknas med någon algoritm?

1.2 Metriska rum.

Definition: Ett metriskt rum $(\mathcal{B}, d)$ är en mängd $\mathcal{B}$ försedd med en metrik d, $d : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. För alla $x, y, z \in \mathcal{B}$ måste d uppfylla kraven:

1| $d(x,y) \geq 0$ och $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2| $d(x,y) = d(y,x)$.
3| $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$d(x,y)$ kallas för avståndet mellan x och y.

Ex| Varje mängd $\mathcal{B}$ kan förses med en metrik d så att $(\mathcal{B}, d)$ är ett metriskt rum. Man kan t.ex. definiera metriken genom

$$\begin{cases} d(x,x) = 0 & \text{för varje } x \in \mathcal{B}, \\ d(x,y) = 1 & \text{för varje } x, y \in \mathcal{B}, \text{ ifall } x \neq y. \end{cases}$$

Ex| (1) $(\mathbb{R}^n, d)$ är ett metriskt rum om d väljs som någon av nedanstående metriker. $(\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n))$

- $d_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$ (euklidiska metriken)
- $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$
- $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

(2) $(C[a,b], d)$ är ett metriskt rum om d väljs som nedan.

- $d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$
- $d_\infty(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ (maximummetriken)

Topologiska begrepp i metriska rum

Antag att $(\mathcal{B}, d)$ är ett metriskt rum.

Definition: Mängden $S(x,r) = \{ y \in \mathcal{B} \mid d(x,y) < r \}$, $r>0$, kallas för en "öppen sfär" med radien r
"öppen boll"
"öppet klot"
och medelpunkten x.
Mängden $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}$ är en öppen mängd om $\forall x \in \mathcal{O} \ \exists r>0 : S(x,r) \subseteq \mathcal{O}$.
Mängden $F \subseteq \mathcal{B}$ är en sluten mängd om CF är en öppen mängd.

Definition: Den oändliga följden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots = \{x_n\}$ i $\mathcal{B}$ konvergerar mot $x \in \mathcal{B}$ om och endast om
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$.
$(\forall r>0 \ \exists n_r : n \geq n_r \Rightarrow x_n \in S(x,r))$.

Sats: $F \subseteq \mathcal{B}$ är en sluten mängd $\Leftrightarrow$ Varje konvergent följd $\{x_n\}$ i F konvergerar mot ett element $x \in F$.

Definition: En följd $\{x_n\}$ i $\mathcal{B}$ är en Cauchy följd om $d(x_n, x_m) \to 0$ då $n,m \to \infty$, d.v.s. om $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$.
Metriken d är fullständig och $(\mathcal{B},d)$ är ett fullständigt metriskt rum om varje Cauchy följd i $\mathcal{B}$ konvergerar mot ett element $x \in \mathcal{B}$.

Ex) 1) $(\mathbb{R}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$, är ett fullständigt metriskt rum.

2) $(\mathbb{Q}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$, är inte ett fullständigt metriskt rum.
T.ex. följden $x_1 = 3{,}1$, $x_2 = 3{,}14$, $x_3 = 3{,}141$, $x_4 = 3{,}1415, \ldots$ är en Cauchy följd, men $\lim_{n\to\infty} x_n = \pi \notin \mathbb{Q}$.

Vi studerar metrisk konvergens i $\mathbb{R}^n$ och $C[a,b]$.

Ex) 1) $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $1 \leq p < \infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Betrakta en följd $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ i $\mathbb{R}^n$.
$x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$.

För $1 \leq m \leq n$: $|x_m^k - x_m| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i|^p \right)^{1/p} = d_p(x^k, x)$.
$\leq n^{1/p} \max_{1\leq i \leq n} |x_i^k - x_i|$.

$d_p(x^k, x) \to 0$ då $k \to \infty \Leftrightarrow x_m^k \to x_m$ för $1 \leq m \leq n$, då $k \to \infty$.

Konvergensen i $(\mathbb{R}^n, d_p)$ är ekvivalent med komponentvis konvergens.

2) $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$

För $1 \leq m \leq n$: $|x_m^k - x_m| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i| = d_\infty(x^k, x)$

$d_\infty(x^k,x) \to 0$ då $k \to \infty \Leftrightarrow x_m^k \to x_m$ för $1 \leq m \leq n$, då $k \to \infty$.

Konvergens i $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ är ekvivalent med komponentvis konvergens.

Ex) 1) $(C[a,b], d_\infty)$. Låt $\{f_n\}$, $f \in C[a,b]$

$f_n \xrightarrow{d_\infty} f \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon \ \forall t \in [a,b])$

$\Leftrightarrow f_n \to f$ likformigt i $[a,b]$ då $n \to \infty$.

Konvergens i $(C[a,b], d_\infty)$ är ekvivalent med likformig konvergens i intervallet $[a,b]$.

2) $(C[a,b], d_p)$. Låt $\{f_n\}$, $f \in C[a,b]$.

$f_n \xrightarrow{d_p} f \Leftrightarrow \left(\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^p dt \right)^{1/p} \to 0$ då $n \to \infty$

$\Leftrightarrow \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^p dt \to 0$ då $n \to \infty$

Denna konvergens kallas konvergens i medeltal på intervallet $[a,b]$, och behöver inte innebära att $f_n \to f$ likformigt eller punktvis.

Man kan visa att $(\mathbb{R}^n, d_p)$ och $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ är fullständiga metriska rum. (övn. uppg.)

Vi skall visa att $(C[a,b], d_\infty)$ är ett fullständigt rum. Vi behöver följande sats.

Sats: Om en följd f_n av kontinuerliga funktioner konvergerar likformigt på intervallet $[a,b]$ så är gränsfunktionen f kontinuerlig på $[a,b]$.

Ex) Låt $\{f_n\}$ vara en Cauchy-följd i $(C[a,b], d_\infty)$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : m,n > n_\varepsilon \Rightarrow \max_{a \le t \le b} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon$.

(*) $\therefore \ m,n > n_\varepsilon \Rightarrow |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b]$.

Talföljden $f_1(t), f_2(t), \dots$ är en Cauchy-följd i $\mathbb{R}$ för varje $t \in [a,b]$.

$\therefore \ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ för varje $t \in [a,b]$.

Om vi i (*) låter $m \to \infty$ erhåller vi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b]$.

$\therefore \ f_n \to f$ likformigt i $[a,b]$ då $n \to \infty$, och konvergens därmed också i metrisk bemärkelse, (jämför tidigare exempel).

Eftersom konvergensen är likformig och $f_n \in C[a,b]$ så ger ovanstående sats att $f \in C[a,b]$

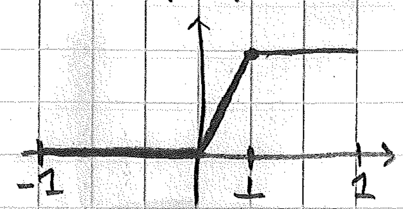
$\therefore \ (C[a,b], d_\infty)$ är ett fullständigt metriskt rum.

$(C[a,b], d_p)$, $1 \le p < \infty$, är inte ett fullständigt metriskt rum.

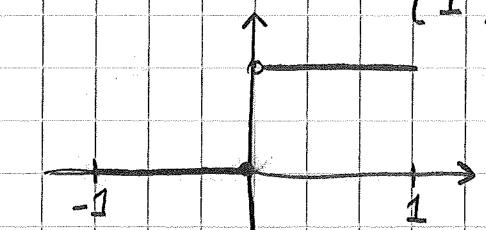
Vi verifierar påståendet i $C[-1,1]$.

Ex) Vi definierar $f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0 \\ nt, & 0 < t \le \frac{1}{n} \\ 1, & 1/n < t \le 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f_n(t) \in C[-1,1] \\ f \notin C[-1,1] \end{cases}$ $\qquad f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0 \\ 1, & 0 < t \le 1 \end{cases}$



$f_n(t)$



$f(t)$

$$d_p(f,f_n) = \left(\int_{-1}^{1} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt)^p \, dt\right)^{1/p}$$

$$= \left(\left[\frac{-(1-nt)^{p+1}}{(p+1)n}\right]_0^{\frac{1}{n}}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{(p+1)n}\right)^{1/p} \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

$\therefore \ f_n \xrightarrow{d_p} f$, då $n \to \infty$.

Är $\{f_n\}$ en Cauchy-följd ? Antag att $n < m$.

$$d_p(f_m,f_n) = \left(\int_{-1}^{1} |f_m(t) - f_n(t)|^p \, dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^{\frac{1}{m}} |(m-n)t|^p \, dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |(1-nt)|^p \, dt\right)^{1/p}$$

$$= \dots = \left(\frac{(m-n)^p}{(p+1)m^{p+1}} + \frac{(1-\frac{n}{m})^p}{(p+1)n}\right)^{1/p}$$

$$< \left(\frac{m^p}{(p+1)m^{p+1}} + \frac{1}{(p+1)n}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{(p+1)m} + \frac{1}{(p+1)n}\right)^{1/p}$$

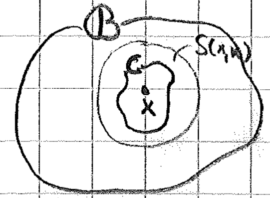
$\therefore \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : n,m \ge n_\varepsilon \Rightarrow d_p(f_m,f_n) < \varepsilon$.

$\therefore \ \{f_n\}$ är en Cauchy-följd.

$\therefore \ (C[-1,1], d_p)$ är inte ett fullständigt metriskt rum.

Kompakta mängder och existens av en bästa approximant $a^* \in \mathcal{A}$ i $(\mathcal{B}, d)$.

Definition: Antag att $(\mathcal{B}, d)$ är ett metriskt rum och $C \subseteq \mathcal{B}$. C är en begränsad mängd om $\exists x \in \mathcal{B}$ och $k > 0$: $C \subseteq S(x,k)$.



C är en kompakt mängd $\Leftrightarrow$ ur varje oändlig följd $\{x_n\}$ i C kan man utplocka en oändlig delföljd $\{x_{n_i}\}$, $n_1 < n_2 < \dots$, som konvergerar mot en punkt $x \in C$

Sats: Om C är en kompakt mängd i $(\mathcal{B}, d)$ så är C sluten och begränsad.

Bevis: 1) Tag en godtycklig konvergent följd $\{x_n\}$ i C. $x_n \xrightarrow{d} x^1$, då $n \to \infty$. Vi kan plocka ut en delföljd $\{x_{n_i}\}$ ur $\{x_n\}$ som konvergerar mot $x^2 \in C$. $x_{n_i} \to x^2$, då $i \to \infty$. Men då måste $x^1 = x^2$ och $x^1 \in C$.

$\therefore$ Varje konvergent följd i C konvergerar mot en punkt i C $\Leftrightarrow$ C är en sluten mängd.

2) Antites: C är obegränsad.
Då kan vi konstruera en följd $\{x_n\}$ i C så att $d(x_1, x_2) > 1$, $d(x_1, x_3) > 2$, ..., $d(x_1, x_n) > n-1$, ...
Å andra sidan kan vi plocka ut en delföljd $\{x_{n_i}\}$ som konvergerar mot $x \in C$. $(n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$
Det finns då ett heltal I sådant att

$i \geq I \Rightarrow d(x_{n_i}, x) < 1$.

$\therefore$ $i \geq I \Rightarrow d(x_{n_i}, x_1) \leq d(x_{n_i}, x) + d(x, x_1) < \underbrace{1 + d(x, x_1)}_{= k \in \mathbb{R}}$.

För alla tillräckligt stora i är $d(x_{n_i}, x_1) > k$, vilket leder till en motsägelse.
Alltså är antitesen falsk, och C är begränsad.

Man kan konstruera exempel som visar att C inte behöver vara kompakt fastän C är sluten och begränsad. I $\mathbb{R}^n$ gäller följande sats:

Sats: De slutna och begränsade mängderna i $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $1 \leq p < \infty$ och i $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ är kompakta.

Vidare gäller:

Sats: En sluten delmängd M av en kompakt mängd C i ett metriskt rum $(\mathcal{B}, d)$ är kompakt.

Bevis: (övn. uppg.)

Sats 1.2.1: Om $\mathcal{A}$ är en kompakt mängd i ett metriskt rum $(\mathcal{B}, d)$, så finns det för varje $f \in \mathcal{B}$ ett element a^* i $\mathcal{A}$ sådant att

$$d(a^*, f) \leq d(a, f)$$

för alla $a \in \mathcal{A}$.

Bevis: Sätt $d^* = \inf\{d(a,f) : a \in \mathcal{A}\}$. $(d^* \geq 0)$
Då gäller:
a) $d(a,f) \geq d^*$ för alla $a \in \mathcal{A}$,
b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in \mathcal{A} : d(a_\varepsilon, f) < d^* + \varepsilon$

Vi kan konstruera en följd $\{a_n\} \in \mathcal{A}$ sådan att $d^* \leq d(a_k, f) < d^* + \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

$\therefore$ $\lim_{k \to \infty} d(a_k, f) = d^*$.

Eftersom $\mathcal{A}$ är kompakt kan vi plocka ut en delföljd $\{a_{n_i}\}$ ur följden $\{a_n\}$ sådan att $a_{n_i} \xrightarrow{d} a^* \in \mathcal{A}$ då $i \to \infty$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) : \begin{cases} d(a_{n_k}, f) < d^* + \frac{\varepsilon}{2} \\ d(a_{n_k}, a^*) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

såsnart $n_k > n(\varepsilon)$

$\therefore \; d^* \leq d(a^*,f) \leq d(a^*,a_{n_k}) + d(a_{n_k},f)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + d^* + \frac{\varepsilon}{2} = d^* + \varepsilon$

$\therefore \; \forall \varepsilon > 0 : d^* \leq d(a^*,f) < d^* + \varepsilon \Rightarrow \underline{d(a^*,f) = d^*}$.

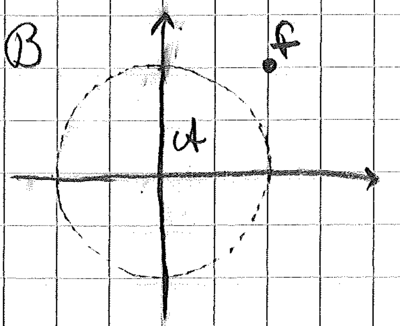
$\therefore$ <u>a^* är en bästa approximation till f ur $\mathcal{A}$.</u> □

Notera att a^* inte behöver vara entydigt bestämd (och att a^* är beroende av valet av f).

Om $\mathcal{A}$ inte är kompakt kan man inte garantera existensen av en bästa approximation.

Ex: $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$, $d = d_2$, $\mathcal{A} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$, $f = (1,1)$.

$\mathcal{B}$



Det finns inget $a^* \in \mathcal{A}$ sådant att $d(a^*,f) \leq d(a,f) \;\; \forall a \in \mathcal{A}$.

Kontinuerliga funktioner på kompakta mängder

Definition: Låt $(\mathcal{B},d)$ vara ett metriskt rum. Avbildningen $h: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i punkten $x_0 \in \mathcal{B}$ om för varje mot
x_0 konvergerande följd: $x_n \xrightarrow{d} x_0$, då $n \to \infty \Rightarrow h(x_n) \to h(x_0)$.
Vilket är ekvivalent med att:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d(x,x_0) < \delta \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$
$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists r > 0 : x \in S(x_0,r) \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon)$.
Om h är kontinuerlig i varje punkt $x \in \mathcal{B}$ så är h kontinuerlig i $\mathcal{B}$.

Sats 1.2.2: Antag att $(\mathcal{B},d)$ är ett metriskt rum. För varje $a \in \mathcal{B}$ är avbildningen $h(x) = d(x,a)$ kontinuerlig.

Bevis: (övn. uppg.)
(Visa att: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d(x,x_0) < \delta \Rightarrow |d(x,a) - d(x_0,a)| < \varepsilon$
gäller för varje $x_0 \in \mathcal{B}$.)

Sats 1.2.3: En kontinuerlig och reellvärd funktion h definierad på en kompakt mängd K i ett metriskt rum $(\mathcal{B},d)$ antar ett största och ett minsta värde i K.

Bevis: Sätt $m = \inf\{h(x) : x \in K\}$.
Då finns det en följd $\{x_n\}$ i K sådan att $h(x_n) \to m$ då $n \to \infty$.
K är kompakt så det finns en delföljd $\{x_{n_i}\}$ av $\{x_n\}$ sådan att $x_{n_i} \xrightarrow{d} x^* \in K$ då $i \to \infty$. Men eftersom h är kontinuerlig i K så gäller det att $h(x_{n_i}) \to h(x^*)$
$\therefore h(x^*) = m$, $\therefore h$ antar ett minsta värde i K.
Analogt visas att h antar värdet $M = \sup_{x \in K} h(x)$
som största värde i K.

Sats: En kontinuerlig funktion från ett metriskt rum $(\mathcal{B}_1, d^1)$ till ett annat metriskt rum $(\mathcal{B}_2, d^2)$ avbildar kompakta mängder på kompakta mängder.

Följande olikheter gäller för reella tal a_k, b_k och $f,g \in C[a,b]$.

Hölders olikhet: $(p,q > 1$ och $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/q}$$

$$\int_a^b |f(t) g(t)| \, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$$

Minkowskis olikheter: $(p \geq 1)$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

1.3 Normerade vektorrum

Definition: En mängd $\mathcal{B}$, vars element kallas vektorer, är ett vektorrum (linjärt rum) om $\mathcal{B}$ uppfyller följande axiom:

I. Till varje vektorpar $x, y \in \mathcal{B}$ hör en entydig vektor $x + y \in \mathcal{B}$, kallad summan av x och y med egenskaperna:

(a) $x + y = y + x$
(b) $(x+y) + z = x + (y + z)$
(c) Det finns en vektor $0 \in \mathcal{B}$, sådan att $x + 0 = x$ för varje $x \in \mathcal{B}$.
(d) Till varje $x \in \mathcal{B}$ hör en vektor $-x \in \mathcal{B}$, så att $x + (-x) = 0$

II. Till varje vektor $x \in \mathcal{B}$ och varje tal $\lambda \in \mathbb{R}$ hör en entydig vektor $\lambda x \in \mathcal{B}$, kallad produkten av λ och x, med följande egenskaper:

(a) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(b) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
(c) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $x, y \in \mathcal{B}$
(d) $1 \cdot x = x$

Definition: Ett vektorrum $\mathcal{B}$ är normerat, om varje vektor $x \in \mathcal{B}$ kan tillordnas ~~ett~~ reellt tal $\|x\|$, kallat normen av x, med egenskaperna:

(1) $\|x\| \geq 0$ och $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Sats: Varje normerat vektorrum $\mathcal{B}$ är ett metriskt rum då metriken d definieras genom $d(x,y) = \|x - y\|$. Addition, skalär multiplikation och normen är kontinuerliga med avseende på metriken d.

Bevis: Vi visar att d är en metrik.

1) $d(x,x) = \|x - x\| = \|x + (-x)\| = \|0\| = 0$.
Om $x \neq y$ så är $x + (-y) = x - y \neq 0$, dvs. $d(x,y) = \|x - y\| > 0$.

2) $d(x,y) = \|x - y\| = \|-1(y-x)\| = |-1| \|y - x\|$
$= \|y - x\| = d(y,x)$

3) $d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

$\therefore$ d är en metrik på $\mathcal{B}$.

a) $d(x^* + y^*, x_n + y_n) = \|x^* + y^* - (x_n + y_n)\|$
$= \|(x^* - x_n) + (y^* - y_n)\| \leq \|x^* - x_n\| + \|y^* - y_n\|$
$= d(x^*, x_n) + d(y^*, y_n)$.
$\therefore (x_n \xrightarrow{d} x^* \wedge y_n \xrightarrow{d} y^*) \Rightarrow x_n + y_n \xrightarrow{d} x^* + y^*$.

b) $d(\lambda^* x^*, \lambda_n x_n) = \|\lambda^* x^* - \lambda_n x_n\|$
$= \|\lambda^* x^* - \lambda^* x_n + \lambda^* x_n - \lambda_n x_n\|$
$\leq |\lambda^*| \|x^* - x_n\| + |\lambda^* - \lambda_n| \|x_n\|$

$\therefore (\lambda_n \to \lambda^* \wedge x_n \xrightarrow{d} x^*) \Rightarrow \lambda_n x_n \xrightarrow{d} \lambda^* x^*$

c) $\|x_n\| = \|x_n - y + y\| \leq \|x_n - y\| + \|y\|$
$\therefore \|x_n\| - \|y\| \leq \|x_n - y\|$
$\|y\| = \|y - x_n + x_n\| \leq \|y - x_n\| + \|x_n\| = \|x_n - y\| + \|x_n\|$
$\therefore -(\|x_n\| - \|y\|) \leq \|x_n - y\|$
$\therefore \big| \|x_n\| - \|y\| \big| \leq \|x_n - y\| = d(x_n, y)$
$\therefore x_n \xrightarrow{d} y \Rightarrow \|x_n\| \to \|y\|$.
$\therefore$ Normen är kontinuerlig $\square$

(13)

Om vi förser ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$ med metriken $d(x,y) = \|x-y\|$ blir $\mathcal{B}$ ett metriskt rum och alla resultat som vi presenterade i 1.2 gäller för vektorer, mängder och funktioner i $\mathcal{B}$. Vidare kan vi i $\mathcal{B}$ tolka $\|x-y\|$ som avståndet mellan vektorerna x och y.

Ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$ kan alltid förses med en metrik d, men ett metriskt vektorrum kan inte alltid förses med en norm sådan att $d(x,y) = \|x-y\|$.

Sats: Om ett metriskt vektorrum $(\mathcal{B}, d)$ satisfierar villkoren:

a) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$,

så blir $\mathcal{B}$ ett normerat vektorrum, om man definierar $\underline{\|x\| = d(x,0)}$.

Bevis: 1) $\|x\| = d(x,0) \geq 0$.

$d(x,0) = 0 \iff x = 0$. $\therefore \|x\| = 0 \iff x = 0$.

2) $\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) \overset{a)}{=} |\lambda| \cdot d(x,0) = |\lambda|\,\|x\|$

3) $\|x+y\| = d(x+y, 0) = d(x+y, -y+y) \overset{b)}{=} d(x,-y)$

$\leq d(x,0) + d(0,-y) \overset{b)}{=} d(x,0) + d(y,0)$

$= \|x\| + \|y\|$

$\therefore$ $\|x\|$ satisfierar normaxiomen

Dessutom gäller $\underline{d(x,y)} = d(x-y, 0) = \underline{\|x-y\|}$

(14)

L_p - normerna.

Ex) $\mathbb{R}^n$ är ett vektorrum om vi definierar vektoraddition och multiplikation med skalär genom:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \bar{x} = \lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

1) Betrakta vektorrummet $\mathbb{R}^n$ med metriken d_p, $1 \leq p < \infty$.

$$d_p(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i - \lambda y_i|^p \right)^{1/p} = \dots = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$
$$= |\lambda|\, d_p(\bar{x}, \bar{y})$$

$$d_p(\bar{x}+\bar{z}, \bar{y}+\bar{z}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + z_i - (y_i + z_i)|^p \right)^{1/p} = d_p(\bar{x}, \bar{y})$$

Enligt föregående sats är då $\mathbb{R}^n$ ett metriskt normerat vektorrum om normen definieras som

$$\|\bar{x}\|_p = d_p(\bar{x}, 0) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Denna norm kallas L_p-normen i $\mathbb{R}^n$.

2) Betrakta vektorrummet $\mathbb{R}^n$ med metriken d_∞.

$$d_\infty(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i - \lambda y_i| = |\lambda| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$
$$= |\lambda| \cdot d(\bar{x}, \bar{y})$$

$$d_\infty(\bar{x}+\bar{z}, \bar{y}+\bar{z}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + z_i - (y_i + z_i)| = d_\infty(\bar{x}, \bar{y})$$

Då är $\mathbb{R}^n$ ett metriskt normerat vektorrum om normen definieras genom

$$\|\bar{x}\|_\infty = d_\infty(\bar{x}, 0) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Denna norm kallas L_∞-normen i $\mathbb{R}^n$.

Ex] $C[a,b]$ är ett vektorrum om vi definierar (15)

$$\begin{cases} (f+g)(t) = f(t) + g(t) \\ (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \end{cases}, \quad \forall t \in [a,b].$$

1) Betrakta vektorrummet $C[a,b]$ med metriken d_p, $1 \leq p < \infty$.

$$d_p(\lambda f, \lambda g) = \left(\int_a^b |\lambda f(t) - \lambda g(t)|^p dt \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}$$
$$= |\lambda| d_p(f,g)$$

$$d_p(f+h, g+h) = \left(\int_a^b |f(t)+h(t) - (g(t)+h(t))|^p \right)^{1/p} = d_p(f,g)$$

Då är $C[a,b]$ ett metriskt normerat vektorrum om normen definieras genom

$$\|f\|_p = d_p(f,0) = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Denna norm kallas L_p-normen i $C[a,b]$.

2) Betrakta vektorrummet $C[a,b]$ med metriken d_∞.

$$d_\infty(\lambda f, \lambda g) = \max_{t \in [a,b]} |\lambda f(t) - \lambda g(t)| = |\lambda| \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$
$$= |\lambda| d_\infty(f,g)$$

$$d_\infty(f+h, g+h) = \max_{t \in [a,b]} |f(t)+h(t) - (g(t)+h(t))| = d_\infty(f,g)$$

Då är $C[a,b]$ ett metriskt normerat vektorrum om normen definieras genom

$$\|f\|_\infty = d_\infty(f,0) = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

Denna norm kallas L_∞-normen i $C[a,b]$.

(16) Ändligt dimensionella normerade vektorrum

Definition: Vektorerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ i ett vektorrum $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende om ekvationen

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

satisfieras endast för $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Definition: Vektorerna $e_1, e_2, \dots, e_n$ i ett vektorrum $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathcal{B}$ om:

a) $e_1, e_2, \dots, e_n$ är linjärt oberoende.

b) Varje vektor $x \in \mathcal{B}$ kan skrivas som en linjär kombination av basvektorerna:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Då är $\mathcal{B}$ ett ändligt dimensionellt vektorrum med dimensionstal n.

Ex] $\mathbb{R}^n$ är ett ändligt dimensionellt vektorrum. En bas i $\mathbb{R}^n$ ges av:

$$\bar{e}_1 = (1,0,0,\dots,0), \quad \bar{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, \bar{e}_n = (0,0,\dots,0,1).$$

Ex] $C[a,b]$ är ett oändligt dimensionellt vektorrum.

Ex] $\mathcal{P}_n$ = mängden av polynom med reella koefficienter av gradtal $\leq n$.

$\mathcal{P}_n$ är ett $n+1$-dimensionellt vektorrum. En bas i $\mathcal{P}_n$ ges av:

$$f_0 = 1, \; f_1 = x, \; f_2 = x^2, \dots, f_n = x^n.$$

Sats: I ändligt dimensionella normerade vektorrum är de slutna och begränsade mängderna kompakta.

Definition: En delmängd $\mathcal{A}$ av ett vektorrum $\mathcal{B}$ kallas ett *linjärt underrum* av $\mathcal{B}$ om (17)

$$x, y \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \mathcal{A}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Då är även $\mathcal{A}$ ett vektorrum.

Sats 1.3.1: Om $\mathcal{A}$ är ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av det normerade vektorrummet $\mathcal{B}$ och $f \in \mathcal{B}$, så finns det en vektor $a^* \in \mathcal{A}$ sådan att

$$\| a^* - f \| \leq \| a - f \|$$

för alla $a \in \mathcal{A}$.

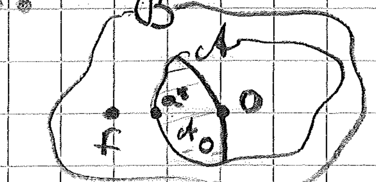
Bevis: Låt $\mathcal{A}_0$ vara mängden av $a \in \mathcal{A}$ sådana att

$$\| a - f \| \leq \| f \|.$$

$\mathcal{A}_0$ är inte tom, $0 \in \mathcal{A}_0$ ty $\| 0 - f \| = \| f \|$.

$\| a \| = \| a - f + f \| \leq \| a - f \| + \| f \| \leq 2 \| f \|$.

$\mathcal{A}_0$ är en begränsad mängd.



Antites: $\mathcal{A}_0$ är inte sluten.

Då finns det en konvergent följd $\{a_n\}$ i $\mathcal{A}_0$ som konvergerar mot $a^+ \notin \mathcal{A}_0$. ($a^+ \in \mathcal{A}$ enligt Sats på sid 79).

$\therefore \; \| a^+ - f \| > \| f \|$.

$\exists\, m \in \mathbb{R}_+ : \| a^+ - f \| = \| f \| + m$.

$\exists\, N : n \geq N \Rightarrow \| a_n - a^+ \| \leq \frac{m}{2}$.

$$\therefore \; \| a^+ - f \| = \| a^+ - a_n + a_n - f \| \leq \| a^+ - a_n \| + \| a_n - f \| \leq \| f \| + \frac{m}{2},$$

vilket är en motsägelse!

$\therefore$ $\mathcal{A}_0$ är en sluten och begränsad delmängd av det ändligt dimensionella vektorrummet $\mathcal{A}$.

$\therefore$ $\mathcal{A}_0$ är en kompakt delmängd av $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$.

Enligt sats 1.2.1 existerar det då en vektor $a^* \in \mathcal{A}_0$ sådan att

$$\| a^* - f \| \leq \| a - f \|$$

för alla $a \in \mathcal{A}$. $\square$

(18) **Ex)** Betrakta det normerade vektorrummet $C[a,b]$ försett med någon norm, t.ex. L_p, $1 \leq p < \infty$ eller L_∞-normen. Då är $\mathcal{P}_n$ = mängden av polynom med gradtal $\leq n$, ett ändligt dimensionellt linjärt underrum av $C[a,b]$. Enligt sats 1.3.1 finns det då för $f \in \mathcal{B}$ ett polynom $p^* \in \mathcal{P}_n$ sådant att

$$\| f - p^* \| \leq \| f - p \|$$

för alla $p \in \mathcal{P}_n$.

Sats 1.3.2: För varje $f \in C[a,b]$ gäller

$$\| f \|_1 \leq (b-a)^{1/2} \| f \|_2 \leq (b-a) \| f \|_\infty$$

Bevis:

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)| \cdot |1|\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |1|\, dt \right)^{1/2} \quad \begin{pmatrix}\text{Hölders olikhet} \\ \text{med } p=q=2\end{pmatrix}$$

$$= (b-a)^{1/2} \| f \|_2 .$$

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \| f \|_\infty^2 dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \| f \|_\infty . \quad \square$$

Ex) $\| f_n \|_2 \to 0$ då $n \to \infty$ $\not\Rightarrow$ $\| f_n \|_\infty \to 0$ då $n \to \infty$

Betrakta $f_n(x) = x^n$ i $C[0,1]$.

$$\| f_n \|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^n| = 1 \quad \text{för alla } n.$$

$$\| f_n \|_2 = \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right)^{1/2} = \left(\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Ekvivalenta normer

Normen bestämmer metriken i ett normerat vektorrum, ($d(x,y) = \|x-y\|$), vilket betyder att topologiska begrepp såsom öppen mängd, sluten mängd och konvergens i regel är beroende av valet av norm. Om två normer leder till samma topologiska egenskaper så kallas de ekvivalenta.

Definition: Normerna $\|\;\|^1$ och $\|\;\|^2$ kallas ekvivalenta om det existerar två konstanter $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att

$$a\|x\|^1 \le \|x\|^2 \le b\|x\|^1$$

för varje vektor x i det ifrågavarande vektorrummet. Bet. $\|\;\|^1 \sim \|\;\|^2$.

För ekvivalenta normer gäller bl.a. att

$$\|x - x_n\|^1 \to 0 \iff \|x-x_n\|^2 \to 0 .$$

Sats: I ett ändligt dimensionellt normerat vektorrum $\mathcal{B}$ är alla normer sinsemellan ekvivalenta.

Ex) I $\mathbb{R}^n$ är alla normer sinsemellan ekvivalenta, vilket inte gäller i $C[a,b]$.

Banachrum

Definition: Ett normerat vektorrum $\mathcal{B}$ i vilket varje Cauchy-följd konvergerar mot en vektor i $\mathcal{B}$ kallas ett Banachrum.

Sats: Varje ändligt dimensionellt normerat vektorrum är ett banachrum.

Sats: Varje ändligt dimensionellt normerat vektorrum är slutet.

Ex) $\mathbb{R}^n$ är ett Banachrum oavsett vilken norm som används.

$C[a,b]$ med L_∞-normen är ett Banachrum.

$C[a,b]$ med L_p-normen, $1 \le p < \infty$ är inte ett Banachrum.

Geometrisk tolkning av $a^* \in \mathcal{A}$

Antag att $\mathcal{B}$ är ett normerat vektorrum och $f \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

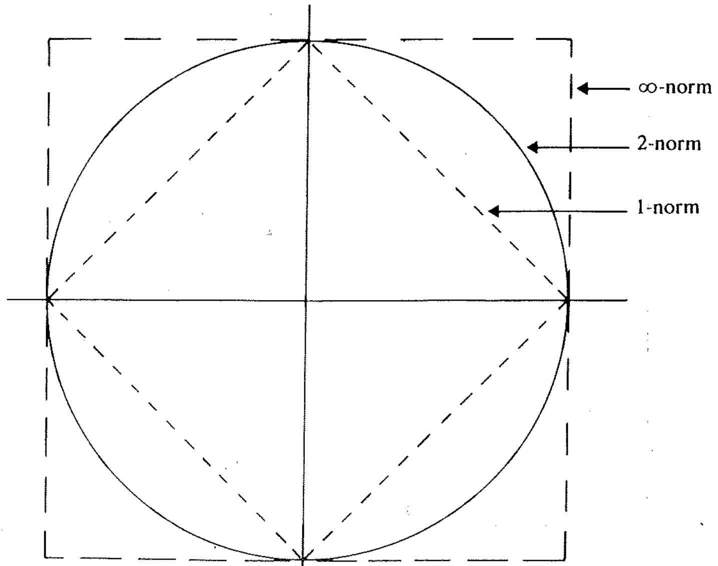
Definition: De slutna sfärerna $\mathcal{N}(f,r)$ med medelpunkt f och radien r definieras som

$$\mathcal{N}(f,r) = \{ g : \|g-f\| \le r,\ g \in \mathcal{B} \}.$$

Ex) $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$, $f = (2,1)$, $\mathcal{A} = \{(\lambda,\lambda) ; -\infty < \lambda < \infty\}$.

Om vi använder L_2-normen och utgår från $\mathcal{N}(f,1)$ så måste vi "krympa ner" enhetssfären från $\mathcal{N}(f,1)$ till $\mathcal{N}(f,\frac{1}{\sqrt{2}})$ för att få $a^* = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \in \mathcal{A}$, och $\|f - a^*\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Figure 1.5. The unit balls of the 1-, 2- and ∞-norms.



$\mathcal{N}(0,1)$

The approximation problem

Figure 1.4. An approximation problem in $\mathcal{R}^2$.