

Komplex analys I, v.40

Sinus- och cosinusfunktionen

För reellt y gäller $\cos y = (e^{iy} + e^{-iy})/2$ och $\sin y = (e^{iy} - e^{-iy})/(2i)$. Vi inför följande definition.

Definition 3.8. Låt $z \in \mathbb{C}$. Funktionerna $\sin z$ och $\cos z$ definieras genom formlerna

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{och} \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \quad (3.29)$$

Sinus- och cosinusfunktionen

Då e^{iz} och e^{-iz} är hela funktioner blir $\sin z$ och $\cos z$ analytiska i hela $\mathbb{C}$. Vi erhåller derivatorna

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{1}{2} (i e^{iz} - i e^{-iz}) = -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z, \quad (3.30)$$

$$\frac{d \sin z}{dz} = \frac{1}{2i} (i e^{iz} - (-i) e^{-iz}) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z. \quad (3.31)$$

Sinus- och cosinusfunktionen

För $\cos z$ och $\sin z$ gäller precis samma trigonometriska formler som för de reella funktionerna $\sin x$ och $\cos x$. Bland annat gäller följande formler:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad (3.32)$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad (3.33)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (3.34)$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1, \quad (3.35)$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \quad (3.36)$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z. \quad (3.37)$$

Ovanstående formler kan bevisas med hjälp av (3.29) och exponentialfunktionens egenskaper. Bevisen lämnas som övningsuppgifter.

Sinus- och cosinusfunktionen

Sats 3.8. Funktionerna $\sin z$ och $\cos z$ har sina nollställen på reella axeln.

$$a) \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$b) \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Bevis: 1. ($\Leftarrow$). Klart att $\sin z = 0$ då $z = k\pi$, ty $\sin z$ antar samma värden som den reella sinusfunktionen på reella axeln.

2. ($\Rightarrow$). $\sin z = 0 \Rightarrow (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow iz = -iz + 2\pi k i \Rightarrow z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Därmed har vi bevisat fallet a). Analogt bevis av b). $\square$

Sinus- och cosinusfunktionen

Formel (3.32) ger att $\sin z$ och $\cos z$ är periodiska med perioderna $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Finns det andra perioder? Antag att w är en period för $\cos z$. Vi har då att $\cos(z+w) = \cos z$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Speciellt för $z = 0$ och $z = -\pi/2$ erhålls $\cos w = 1$ respektive $\sin w = 0$. Den senare likheten fås med stöd av formeln $\cos(w - \pi/2) = \sin w$, som visas med hjälp av (3.36). Alltså gäller det att $e^{iw} = \cos w + i \sin w = 1$, vilket innebär att $w = 2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Analogt visas att $w = 2\pi n$ är de enda perioderna för $\sin z$.

Sinus- och cosinusfunktionen

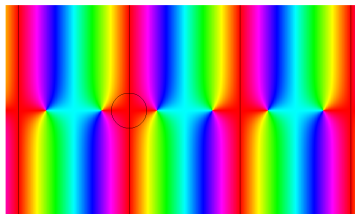
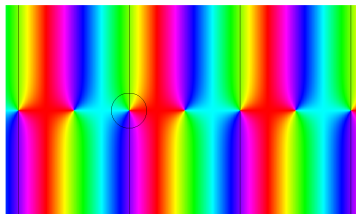
Sats 3.9. *Funktionerna $\sin z$ och $\cos z$ är enkelt periodiska med den primitiva perioden 2π .*

Som periodzoner för $\sin z$ och $\cos z$ kan man välja parallellstrimlorna

$$T_n = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi n \leq \operatorname{Re} z < 2\pi(n+1)\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.38)$$

Sinus- och cosinusfunktionen

Fasporträtt av $\sin z$ till vänster och $\cos z$ till höger i periodzonerna T_{-1}, T_0 och T_1 .



Sinus- och cosinusfunktionen

Om vi i (3.29) sätter in $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, erhålls formlerna

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y, \quad (3.39)$$

$$\sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = i \sinh y. \quad (3.40)$$

Vi har således etablerat ett samband mellan de trigonometriska och hyperboliska funktionerna. Vidare ses ur (3.39) och (3.40) att $\sin z$ och $\cos z$ är inte begränsade i komplexa talplanet. Med stöd av formlerna (3.35), (3.36), (3.39) och (3.40) visas för $z = x + iy$ formlerna

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (3.41)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad (3.42)$$

varvid reella och imaginära delarna av $\sin z$ och $\cos z$ är ådagalagda.

Tangens- och cotangensfunktionen

Definition 3.9. För $z \in \mathbb{C}$ definieras $\tan z$ och $\cot z$ genom formlerna

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{och} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad (3.43)$$

i de punkter där $\cos z \neq 0$ respektive $\sin z \neq 0$.

Tangens- och cotangensfunktionen

Då är $\tan z$ odefinierad i punkterna $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, och $\cot z$ i punkterna $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dessa punkter utgör poler av ordning 1 för funktionerna, (detta skall visas senare). Om vi tillordnar funktionerna värdet ∞ i polerna, så blir de definierade i hela $\mathbb{C}$.

Med hjälp av deriveringsreglerna för $\sin z$ och $\cos z$ erhålls

$$\frac{d \tan z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{och} \quad \frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z}. \quad (3.44)$$

Sats 3.10. Funktionerna $\tan z$ och $\cot z$ är analytiska överallt i $\mathbb{C}$, med undantag av sina poler.

För $\tan z$ och $\cot z$ gäller samma trigonometriska formler som är kända för $\tan x$ och $\cot x$ i den reella analysen.

Tangens- och cotangensfunktionen

Vi övergår till att studera periodiciteten för $\tan z$. (Analog utredning för $\cot z$). Antag att w är en period för $\tan z$. Då gäller $\tan(z + w) = \tan z$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Speciellt för $z = 0$ erhålls $\tan w = \tan 0 = 0 \Leftrightarrow w = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Den enda möjliga primitiva perioden är alltså $w = \pi$. Är detta en period? Svaret är ja, ty

$$\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z.$$

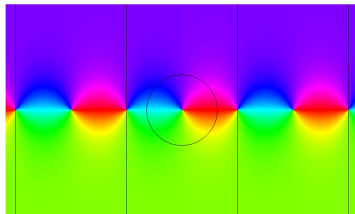
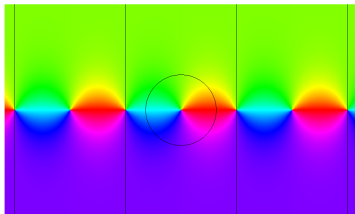
Sats 3.11. Funktionerna $\tan z$ och $\cot z$ är enkelt periodiska med den primitiva perioden π .

Som periodzoner för $\tan z$ och $\cot z$ kan man välja

$$T_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} + n\pi \leq \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + n\pi \right\}. \quad (3.45)$$

Tangens- och cotangensfunktionerna

Fasporträtt av $\tan z$ till vänster och $\cot z$ till höger i periodzonerna T_{-1} , T_0 och T_1 .



Tangens- och cotangensfunktionen

Med stöd av formel (3.29) kan $\tan z$ och $\cot z$ uttryckas med hjälp av exponentialfunktionen, vi får

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{och} \quad \cot z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}. \quad (3.46)$$

Arcusfunktionerna

Arcusfunktionerna definieras genom:

$$w = \arccos z \Leftrightarrow z = \cos w, \quad (3.47)$$

$$w = \arcsin z \Leftrightarrow z = \sin w, \quad (3.48)$$

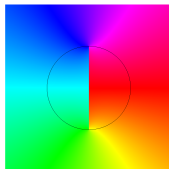
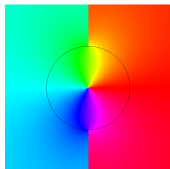
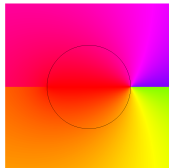
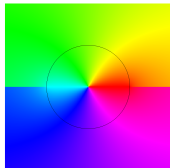
$$w = \arctan z \Leftrightarrow z = \tan w, \quad (3.49)$$

$$w = \operatorname{arccot} z \Leftrightarrow z = \cot w. \quad (3.50)$$

Då de trigonometriska funktionerna är periodiska blir arcusfunktionerna mångtydiga, och är inga egentliga funktioner. Lämpliga grenval blir entydigt bestämda inverser till lämpligt valda restriktioner av motsvarande trigonometriska funktioner.

Arcusfunktionerna

Fasporträtt av $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$ och $\operatorname{arccot} z$ över $[-2,2] \times [-2,2]$.



Väsentliga singulariteter

Definition 8.2. Om funktionen $f(z)$ är analytisk i en punkterad omgivning av punkten $z = z_0 \neq \infty$, men inte i z_0 , så är $z = z_0$ *isolerad singularitet* för $f(z)$.

Om $f(z)$ har en isolerad singularitet i $z = z_0$ så kan $f(z)$ utvecklas i en Laurentserie av formen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.18)$$

där serien (8.18) konvergerar i en cirkelring $0 < |z - z_0| < R$. **Tre olika fall kan nu särskiljas:**

- (A) Om $c_n = 0$ för alla $n < 0$, så är z_0 en **hävbar singularitet**.
- (B) Om $c_{-n} \neq 0$ för ett heltal $n > 0$ och $c_{-j} = 0$ för $j > n$, så är z_0 en **n -faldig pol** för $f(z)$.
- (C) Om det finns oändligt många $c_{-n} \neq 0$ för $n > 0$, så är z_0 en **väsentlig singularitet** för $f(z)$.

Väsentliga singulariteter

Sats 8.4. Picards sats. *En analytisk funktion $f(z)$, som har en väsentlig singularitet i punkten $z = z_0$, antar i varje punkterad omgivning av z_0 alla komplexa tal som funktionsvärden, eventuellt med undantag av ett värde.*

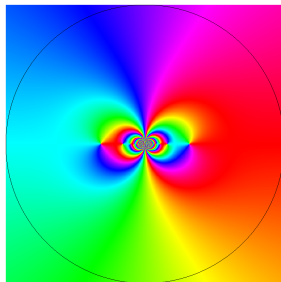
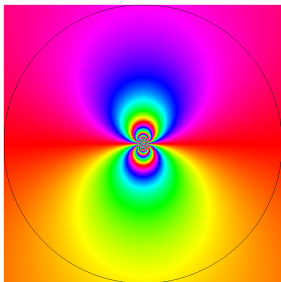
Exempel 8.3. Vi verifierar Picards sats för $e^{1/z}$ i en punkterad omgivning av $z_0 = 0$. Det är klart att $e^{1/z} \neq 0$ i varje punkterad omgivning av $z_0 = 0$. Låt $c \neq 0$ vara ett godtyckligt valt komplext tal. Välj $\varepsilon > 0$. Det gäller då att

$$\ln c = \ln |c| + i \arg c + 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Genom att välja n tillräckligt stort fås ett värde $w = \ln c$ sådant att $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$. Sätt $z = \frac{1}{w}$. Då gäller att $|z| < \varepsilon$ och $e^{1/z} = e^w = e^{\ln c} = c$. Alltså gäller Picards sats för $e^{1/z}$.

Väsentliga singulariteter

Fasporträtt av $e^{\frac{1}{z}}$ och $\sin \frac{1}{z}$ med väsentliga singulariteter i $z = 0$.



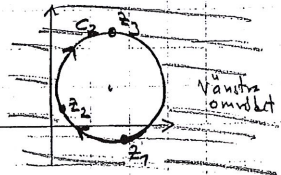
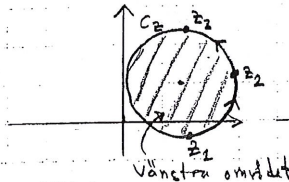
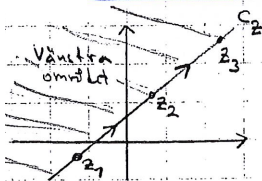
Elementära transformationer

Vi inleder behandlingen med att studera fem elementära avbildningar. Varje Möbiustransformation kan sammansättas av dessa. Först definieras vad som avses med “cirklar” i z -planet.

Definition 4.1. Låt $C(z)$ beteckna mängden av alla cirklar och linjer i det utvidgade komplexa talplanet, (det utvidgade z -planet). Med “cirkel” avses då ett element i $C(z)$, dvs. antingen en cirkel eller en linje.

Elementära transformationer

En "cirkel" delar upp z -planet i två områden, antingen i två halvplan eller i området innanför och området utanför en cirkel. Om vi väljer tre punkter z_1, z_2, z_3 på en "cirkel" $C_z \in C(z)$ så att z_2 ligger mellan z_1 och z_3 , så definierar delkurvan av C_z som börjar i z_1 och slutar i z_3 och genomlöper z_2 , en genomloppsriktning, eller orientering, av C_z . Vi kan då definiera området till vänster om C_z .

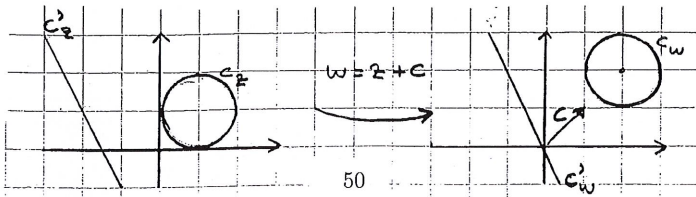


Elementära transformationer

I. Translation. En avbildning

$$w = S(z) = z + c, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

kallas en translation. Varje punkt i z -planet förskjuts med en vektor c . Avbildningen är bijektiv, och varje geometrisk figur i z -planet avbildas på en kongruent geometrisk figur i w -planet. Speciellt gäller: “cirklar” i z -planet avbildas på “cirklar” i w -planet.

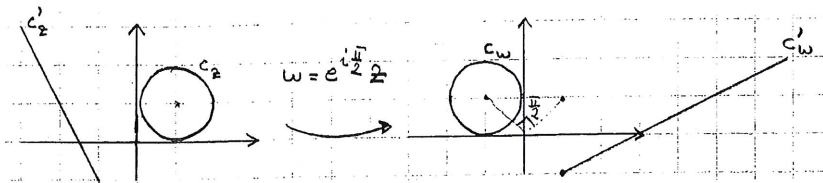


Elementära transformationer

II. Rotation. En avbildning

$$w = S(z) = e^{i\theta} z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (4.2)$$

roterar varje punkt i z -planet vinkeln θ runt origo. Avbildningen är bijektiv. Varje geometrisk figur i z -planet avbildas på en kongruent geometrisk figur i w -planet. Speciellt gäller: “cirklar” i z -planet avbildas på “cirklar” i w -planet.

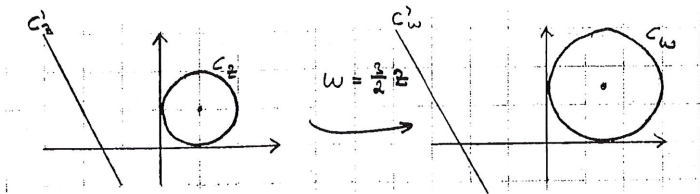


Elementära transformationer

III. Dilatation. En avbildning

$$w = S(z) = rz, \quad r \in \mathbb{R}, r > 0, \quad (4.3)$$

kallas en dilatation. Avbildningen är bijektiv. Varje geometrisk figur i z -planet avbildas på en kongruent förstord ($r > 1$) eller förminskad ($r < 1$) geometrisk figur i w -planet. Speciellt gäller: “cirklar” i z -planet avbildas på “cirklar” i w -planet.



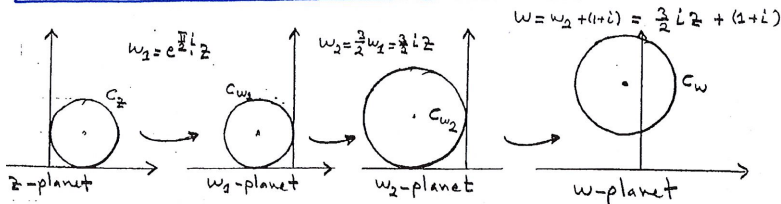
Vidare gäller: $|w_1 - w_2| = |S(z_1) - S(z_2)| = |rz_1 - rz_2| = r|z_1 - z_2|$.
Varje avstånd förstoras (förminskas) med faktorn r .

Elementära transformationer

IV. Linjär transformation. En avbildning

$$\underline{w = S(z) = az + b}, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (4.4)$$

är en linjär transformation. Observera att om $b \neq 0$ så gäller $S(z_1 + z_2) \neq S(z_1) + S(z_2)$. (Begreppet linjär transformation avviker här från det man i andra sammanhang brukar avse med begreppet). En linjär transformation är uppbyggd av en rotation, en dilatation och en translation. Om $a = re^{i\theta}$ har vi: $w_1 = e^{i\theta} z$, och $w_2 = r w_1 = r e^{i\theta} z$, samt slutligen $w = w_2 + b = az + b$. På basen av de tidigare utredningarna I, II och III fås då att avbildningen $S(z) = az + b$ är bijektiv och att geometriska figurer i z -planet avbildas på kongruenta geometriska figurer i w -planet. Speciellt: “cirklar” i z -planet avbildas på “cirklar” i w -planet.



Exempel 4.1. Sök en linjär transformation som avbildar $C_z : |z - 1| = 1$ på $C_w : |w - 3i/2| = 2$.

Lösning: (Rita figur!) **Steg 1:** Flytta C_z till origo i w_1 -planet genom translationen $w_1 = z - 1$. Vi erhåller cirkeln $C_{w_1} : |w_1| = 1$. **Steg 2:** Förstora C_{w_1} med dilatationen $w_2 = 2w_1 = 2(z - 1)$. Då fås cirkeln $C_{w_2} : |w_2| = 2$, i w_2 -planet. **Steg 3:** Flytta C_{w_2} med translationen $w = w_2 + 3i/2 = 2z - 2 + 3i/2$, varvid vi erhåller cirkeln $C_w : |w - 3i/2| = 2$ i w -planet. Den sökta linjära transformationen är $w = S(z) = 2z - 2 + 3i/2$.

V. Inversion. Avbildningen

$$w = S(z) = \frac{1}{z} \quad (4.5)$$

är en inversion. Inversionen är en bijektiv avbildning från det utvidgade z -planet till det utvidgade w -planet. Punkten $z = 0$ avbildas på $w = \infty$ och

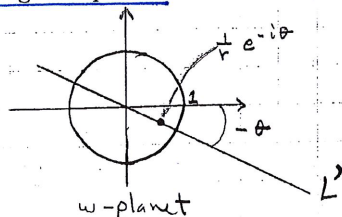
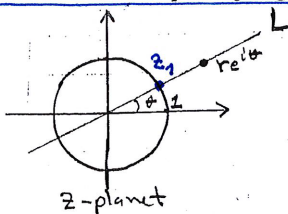
$z = \infty$ på $w = 0$. Vi skall undersöka hur “cirklar” i det utvidgade z -planet avbildas av $S(z)$. Punkten $z = \infty$ betraktas tillhörande varje linje i $C(z)$.

Elementära transformationer

ä) Linjer genom origo. Låt $z_1 = e^{i\theta}$ vara skärningspunkten mellan linjen L genom origo och enhetscirkeln i z -planet. Linjen L kan parameterframställas genom $z(t) = t e^{i\theta}$, $-\infty < t < \infty$. Då gäller:

$$S(z(t)) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{t} e^{-i\theta}.$$

Linjen L avbildas på linjen L' i w -planet med parameterframställningen $w(t) = e^{-i\theta}/t$, $-\infty < t < \infty$. Vi ser att $z = 0$ på L avbildas på $w = \infty$ på L' , och $z = \infty$ på L avbildas på $w = 0$ på L' . Linjer genom origo i z -planet avbildas på linjer genom origo i w -planet.



b) Linjer som inte genomlöper origo. Låt L vara en linje som inte går igenom origo i z -planet. Ekvationen för L ges då av:

$$Ax + By = C, \quad C \neq 0, \quad (4.6)$$

där A, B, C är reella. Beteckna $w = u + iv$ och $z = x + iy$.

$$x + iy = z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}. \quad (4.7)$$

Alltså gäller:

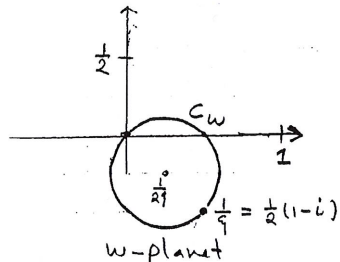
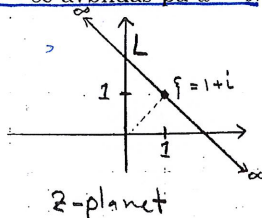
$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{och} \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \quad (4.8)$$

Insättning av (4.8) i (4.6) ger:

$$\begin{aligned} A \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \right) + B \left(\frac{-v}{u^2 + v^2} \right) &= C \Leftrightarrow C(u^2 + v^2) - Au + Bv = 0 \\ &\Leftrightarrow u^2 + v^2 - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = 0. \end{aligned}$$

Elementära transformationer

Bilden av L blir en cirkel som går igenom origo i w -planet. Punkten $z = \infty$ avbildas på $w = 0$.



Punkten ξ som ligger närmast origo av punkterna på L avbildas på punkten $1/\xi$ som ligger längst från origo av punkterna på C_w i w -planet.

c) Cirklar som genomlöper origo. Eftersom inversen av $w = 1/z$ ges av $z = 1/w$, som också är en inversion, så fås med stöd av b)-fallet att cirkeln

$$x^2 + y^2 - \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y = 0, \quad (4.9)$$

genom origo i z -planet avbildas på linjen $Au + Bv = C$ i w -planet. Då nu varje cirkel genom origo i z -planet kan skrivas i formen (4.9) för lämpligt valda A, B, C där $C \neq 0$, så gäller: Cirklar som genomlöper origo i z -planet avbildas på linjer i w -planet.

d) Cirklar som inte genomlöper origo. Om C_z är en cirkel i z -planet som inte genomlöper origo kan den uttryckas med en ekvation

$$x^2 + y^2 + Ax + By = C, \quad C \neq 0. \quad (4.10)$$

Om vi utnyttjar (4.8) erhålls ekvationen

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{Au}{u^2 + v^2} - \frac{Bv}{u^2 + v^2} = C,$$

som förenklas till $1 + Au - Bv = C(u^2 + v^2)$. Då $C \neq 0$ erhålls att $u^2 + v^2 - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = \frac{1}{C}$. Alltså avbildas cirkeln C_z på en cirkel C_w i w -planet.

Cirklar som inte genomlöper origo i z -planet avbildas på cirklar som inte genomlöper origo i w -planet. Vi sammanfattar utredningarna i detta avsnitt:

Sats 4.1. Avbildningarna I. – V. är bijektiva och avbildar "cirklar" $C_z \in C(z)$ i z -planet på "cirklar" $C_w \in C(w)$ i w -planet.

Möbiustransformationer

Definition 4.2. En Möbiustransformation är en avbildning av formen

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.11)$$

där a, b, c och d är komplexa konstanter och $ad \neq bc$.

Anmärkning: Med restriktionen $ad \neq bc$ garanteras att nämnaren i (4.11) aldrig är identiskt lika med noll och att $S(z)$ aldrig reduceras till en konstant.

Möbiustransformationer

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.11)$$

$S(z)$ är en rationell funktion med ordningstalet $p = 1$. Då antar $S(z)$ i det utvidgade komplexa talplanet $\overline{\mathbb{C}}$ varje värde (inklusive ∞) precis en gång (Sats 3.4). Funktionen $S : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ är därmed bijektiv.

Om $c \neq 0$ antas $w = \infty$ i punkten $z = -d/c$, som är en pol av multipliciteten 1, och värdet $w = a/c$ antas i $z = \infty$.

Om $c = 0$, varvid $a \neq 0$ och $d \neq 0$, sätter vi $-d/c = \infty$ och $a/c = \infty$ i enlighet med räknereglerna (1.48). Då erhålls $S(\infty) = \infty$ och $S(z)$ har en pol av multipliciteten 1 i $z = \infty$. Inversen $S^{-1}(w)$ ges av

$$z = S^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}. \quad (4.12)$$

Möbiustransformationer

$$z = S^{-1}(w) = \frac{-d w + b}{c w - a}. \quad (4.12)$$

För inversen (som också är en Möbiustransformation) gäller $S^{-1}(\infty) = -d/c$ och $S^{-1}(a/c) = \infty$, som i fallet $c = 0$ reduceras till $S^{-1}(\infty) = \infty$. Derivering av (4.11) ger:

$$S'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (4.13)$$

Vi ser att $S'(z) \neq 0$ då $z \neq -d/c, \infty$. Med stöd av ovanstående utredningar och Sats 2.16 formuleras följande resultat:

Sats 4.2. Möbiustransformationen $S(z)$ är analytisk i området $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ och avbildar detta område konformt på området $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Om $c = 0$ är avbildningen analytisk och konform i hela $\mathbb{C}$.

Möbiustransformationer

Med stöd av utredningarna i avsnitt 4.1 kan vi nu bevisa "cirkel" invariansen hos Möbiustransformationen:

Sats 4.3. Vid en Möbiustransformation avbildas "cirklar" i z -planet på "cirklar" i w -planet.

Bevis: 1. $c = 0$. Då är

$$w = S(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

$S(z)$ är en linjär transformation och avbildar därmed "cirklar" i z -planet på "cirklar" i w -planet.

Möbiustransformationer

2. $c \neq 0$. Nu kan vi skriva $S(z)$ i formen

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}. \quad (4.14)$$

Vi ser att $S(z)$ är sammansatt av en linjär transformation (= rotation + dilatation + translation),

$$w_1 = cz + d, \quad (4.15)$$

efterföljd av en inversion

$$w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad (4.16)$$

och slutligen en till linjär transformation

$$w = \left(b - \frac{ad}{c}\right) w_2 + \frac{a}{c}. \quad (4.17)$$

Med stöd av Sats 4.1 fås då att en Möbiustransformation avbildar "cirklar" i z -planet på "cirklar" i w -planet. $\square$