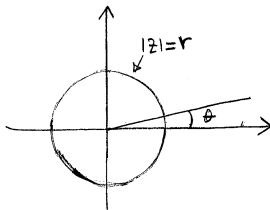


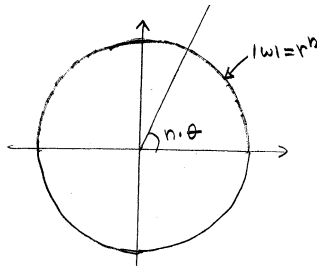
Komplex analys I, v.39

Potensfunktioner

Vi behandlar först potensfunktionen $w = f(z) = z^n$, $n = 2, 3, \dots$. Tidigare har visats att f är analytisk i hela $\mathbb{C}$ och att $f'(z) = nz^{n-1}$. Vi undersöker nu hur avbildningen $w = f(z)$ avbildar z -planet på w -planet. Det gäller att $|w| = |z|^n$ och att $\arg w = n \cdot \arg z$. Därmed avbildas cirkeln $|z| = r$ i z -planet på cirkeln $|w| = r^n$ i w -planet. Den från origo utgående strålen $\arg z = \theta$ avbildas på strålen $\arg w = n\theta$ i w -planet. Därmed är avbildningen inte konform i origo. I punkten $z_0 \neq 0$ gäller $f'(z_0) \neq 0$, och avbildningen är därmed konform i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Om vi sätter $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ vet vi från



z -planet



w -planet

Potensfunktioner

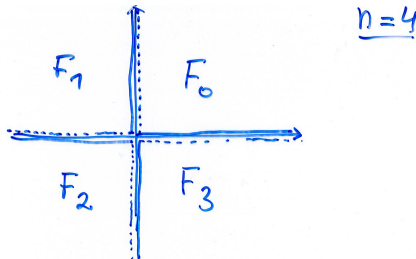
därmed konform i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Om vi sätter $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ vet vi från tidigare att lösningarna till ekvationen $z^n = w$ ges av

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Av dessa n värden ligger precis ett i var och en av sektorerna

$$F_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k}{n} \leq \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n} \right\} \cup \{0\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.1)$$

Varje sektor F_k avbildas då bijektivt av $w = z^n$ på hela w -planet. Varje sektor innehåller $z = 0$, så ingen sektor avbildas konformt på w -planet. Om



vi betraktar de öppna sektorerna

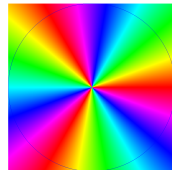
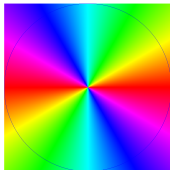
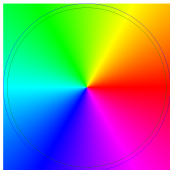
$$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.2)$$

som är områden, så förmedlar $w = z^n$ en konform avbildning av varje sektor G_k på w -planet minus den positiva reella axeln. Vi säger då att w -planet är uppskuret längs den positiva reella axeln från 0 till ∞ .

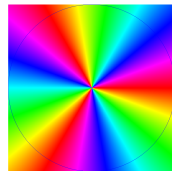
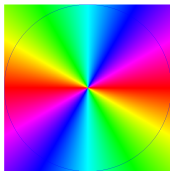
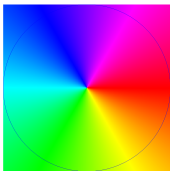
Sats 3.1. Potensfunktionen $w = z^n$ ($n \geq 2$) är en i hela planet analytisk funktion, som förmedlar en konform avbildning överallt utom i origo. Vinklar med spetsen i origo n -faldigas. Funktionen avbildar varje öppen sektor G_k i (3.2) konformt på hela w -planet, uppskuret längs positiva reella axeln från 0 till ∞ .

Potensfunktioner

Fasporträtt av $f(z) = z^n$ för $n = 1, 2, 3$:



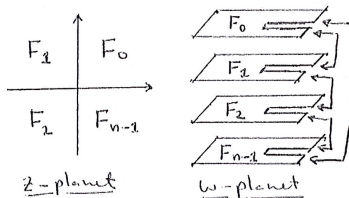
Fasporträtt av $f(z) = 1/z^n$ för $n = 1, 2, 3$:



Potensfunktioner

(I en parentes skall vi kort beskriva vad som avses med en Riemann yta R_w för avbildningen $w = z^n$. För att få en omvändbar avbildning kan

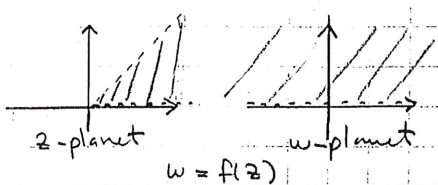
vi tänka oss att vi staplar upp n stycken w -plan, som alla är uppskurna längs positiva reella axeln, ovanpå varandra. Det översta bladet får svara mot avbildningen av sektorn F_0 , det följande mot F_1 osv. Det understa bladet svarar mot avbildningen av sektorn F_{n-1} . Nu förenar vi bladen till en sammanhängande yta genom att låta en från origo utgående stråle rotera ett varv moturs i z -planet, varvid den nedre uppskurna kanten av F_0 fogas till den övre uppskurna kanten av F_1 osv. Slutligen fäster vi det understa bladets nedre kant till det översta bladets övre uppskurna kant. Härvidlag har vi fått en sammanhängande yta, den n -bladiga Riemann ytan R_w . Varje punkt $w \neq 0$ uppträder en gång på varje blad, $w = 0$ uppträder en gång i en gemensam punkt för alla ihoplimmade blad. Därmed förmedlar $w = z^n$ en omvändbar avbildning av z -planet på Riemann ytan R_w , se figuren nedan.)



Potensfunktioner

Exempel 3.1. Avbilda området $\{z : 0 < \arg z < \pi/4\}$ konformt på området $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Lösning: Eftersom $w = z^n$ med stöd av Sats 3.1 n -faldigar vinklar med spetsen i origo, så bör vi välja $n = 4$. Alltså ger $w = z^4$ den eftersökta konforma avbildningen.



Funktionen

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

där $a_n \neq 0$ och där a_k , $k = 0, \dots, n$, är komplexa tal, är ett polynom av n :te graden. Vi har tidigare visat att $p_n(z)$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$. Senare skall vi bevisa att varje icke-konstant polynom har minst ett nollställe i $\mathbb{C}$ (algebrans fundamentalsats). Låt z_1 vara ett nollställe för $p_n(z)$. Om vi utför divisionen $p_n(z)/(z - z_1)$ så långt att resten R blir oberoende av z får vi $p_n(z) \equiv (z - z_1)p_{n-1}(z) + R$. Om vi sätter in $z = z_1$ erhålls $0 = 0 \cdot p_{n-1}(z_1) + R$, alltså $R = 0$. Då gäller:

Sats 3.2. (Faktorteoremet). Om polynomet $p_n(z)$ har ett nollställe z_1 , så kan polynomet skrivas i formen

$$p_n(z) \equiv (z - z_1) p_{n-1}(z),$$

där $p_{n-1}(z)$ är ett polynom av gradtal $n - 1$.

Om $n - 1 \geq 1$ har $p_{n-1}(z)$ enligt algebrans fundamentalsats minst ett nollställe z_2 . Genom växelvis användning av algebrans fundamentalsats och faktorteoremet kan vi skriva:

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n). \quad (3.3)$$

$p_n(z)$ har alltså precis n stycken nollställen i $\mathbb{C}$, av vilka endel kan sammanfalla. Om ν_1 stycken är z_1 , ν_2 stycken är z_2 , ..., ν_k stycken är z_k , där $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$, $1 \leq k \leq n$, så kan $p_n(z)$ i (3.3) skrivas i formen

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{\nu_1}(z - z_2)^{\nu_2} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{\nu_k}. \quad (3.4)$$

Talet $z_\mu \in \mathbb{C}$ säges vara ett ν_μ -faldigt nollställe, eller ett nollställe av multipliciteten ν_μ .

Definition 3.1. Den analytiska funktionen f säges ha ett ν -faldigt nollställe, ett nollställe av *multipliciteten (ordningen)* ν , i punkten $z = a$, om f kan skrivas i formen

$$f(z) = (z - a)^\nu g(z), \quad (3.5)$$

där $g(a) \neq 0$ och g är analytisk i en omgivning av $z = a$. Vidare säges ∞ -punkten vara ett ν -faldigt nollställe för funktionen om

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^\nu f(z) \neq 0, \infty. \quad (3.6)$$

Definition 3.2. Om funktionen $f(z) - c$, $c \in \mathbb{C}$, har ett ν -faldigt nollställe i punkten $a \in \overline{\mathbb{C}} (= \mathbb{C} \cup \infty)$, så har f ett ν -faldigt c -ställe i punkten a . Man säger att värdet c antas ν gånger av f i punkten a .

Polynom

Betrakta igen polynomet $p_n(z)$. För varje $c \in \mathbb{C}$ är $p_n(z) - c$ ett polynom av gradtal n som har exakt n stycken nollställen i $\mathbb{C}$. Polynomet $p_n(z)$ har alltså exakt n stycken c -ställen, då multipliciteten beaktas.

Polynom

Vi undersöker nu vad som inträffar när $z \rightarrow \infty$ i polynomet $p_n(z)$. Om-skrivning av $p_n(z)$ i formen

$$p_n(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right), \quad (3.7)$$

samt beaktande av (1.33) ger att

$$|p_n(z)| \geq |z|^n \left| a_n - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right|. \quad (3.8)$$

För $|z|$ stort gäller $|a_{n-1}/z + \dots + a_0/z^n| < |a_n|/2$. Därmed gäller det att $|p_n(z)| \geq |z|^n |a_n|/2$ för $|z|$ tillräckligt stort, och då måste det gälla att $|p_n(z)| \rightarrow \infty$, då $|z| \rightarrow \infty$, vilket innebär att $\lim_{z \rightarrow \infty} p_n(z) = \infty$. Ur (3.7) följer å andra sidan att

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p_n(z)}{z^n} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right) = a_n \neq 0, \infty.$$

Vi säger då att $p_n(z)$ har en pol av multipliciteten n i ∞ -punkten, eller att $p_n(z)$ har en n -faldig pol i ∞ -punkten.

Definition 3.3. Antag att f är analytisk i en punkterad omgivning av $z = a \in \mathbb{C}$. Då säges f ha en ν -faldig pol eller en pol av multipliciteten ν i punkten a om

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^\nu f(z) \neq 0, \infty \quad \text{och} \quad \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty. \quad (3.9)$$

Likaså säges ∞ -punkten vara en ν -faldig pol till f , om

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^\nu} \neq 0, \infty. \quad (3.10)$$

För polynom gäller då

Sats 3.3. Ett polynom $p_n(z)$ av gradtal n : antar varje värde (inklusive ∞) exakt n gånger i det utvidgade komplexa talplanet $\overline{\mathbb{C}}$.

Rationella funktioner

En rationell funktion R är av formen

$$R(z) = \frac{p_m(z)}{q_n(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}, \quad a_m \neq 0, b_n \neq 0, \quad (3.11)$$

där vi antar att $p_m(z)$ och $q_n(z)$ saknar gemensamma nollställen, dvs. är oförkortbara. Genom att upplösa p_m och q_n i faktorer i enlighet med (3.4) får vi med stöd av definitionerna 3.1 och 3.3 att $R(z)$ i komplexa talplanet $\mathbb{C}$ har nollställen precis i de punkter, där $p_m(z)$ har nollställen och poler i de punkter där $q_n(z)$ har nollställen. $R(z)$ har alltså m nollställen och n poler i $\mathbb{C}$ då multipliciteten beaktas. Vi skall undersöka R 's värden då $z \rightarrow \infty$, och skriver därför R i formen

$$R(z) = z^{m-n} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^n}}, \quad (3.12)$$

Rationella funktioner

och n poler i $\mathbb{C}$ då multipliciteten beaktas. Vi skall undersöka R 's värden då $z \rightarrow \infty$, och skriver därför R i formen

$$R(z) = z^{m-n} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^n}}, \quad (3.12)$$

och beaktar tre olika fall:

(1) $m > n$: Då gäller

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R(z)}{z^{m-n}} = \frac{a_m}{b_n} \neq 0, \infty.$$

$R(z)$ har en $(m-n)$ -faldig pol i ∞ -punkten.

(2) $m = n$: Då gäller

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \frac{a_m}{b_n} \neq 0, \infty.$$

R har varken pol eller nollställe i ∞ -punkten.

(3) $m < n$: Då gäller

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} R(z) = \frac{a_m}{b_n} \neq 0, \infty.$$

R har ett $(n-m)$ -faldigt nollställe i ∞ -punkten.

Rationella funktioner

Resultaten av undersökningarna kan sammanfattas i en tabell.

	Antal nollställen			Antal poler		
	$i \in \mathbb{C}$	$i \in \infty$	totalt	$i \in \mathbb{C}$	$i \in \infty$	totalt
$m > n$	m	—	m	n	$m - n$	m
$m = n$	m	—	$m = n$	n	—	$m = n$
$m < n$	m	$n - m$	n	n	—	n

Vi konstaterar att totala antalet nollställen = totala antalet poler = $\max(m, n)$ i alla tre fallen.

Definition 3.4. Talet $p = \max(m, n)$ kallas ordningstalet för funktionen $R(z) = p_m(z)/q_n(z)$.

Rationella funktioner

En rationell funktion har alltså i det utvidgade komplexa talplanet $\overline{\mathbb{C}}$ exakt så många nollställen och så många poler som ordningstalet anger.

Vi skall undersöka R 's c -ställen. Vi bildar funktionen

$$R(z) - c = \frac{p_m(z) - c q_n(z)}{q_n(z)}, \quad (3.13)$$

där $c \neq 0, \infty$. Nu antogs p_m och q_n oförkortbara. Därmed har täljaren och nämnaren i (3.13) inga gemensamma faktorer, ty en sådan faktor skulle då vara gemensam för p_m och q_n . Då bråket (3.13) inte kan förkortas är dess ordningstal = $\max(m, n)$, vilket sammanfaller med R 's ordningstal p . Då har $R(z) - c$ exakt p nollställen, vilket betyder att $R(z)$ har exakt p stycken c -ställen. Sammanfattningsvis:

Sats 3.4. En rationell funktion antar i det utvidgade komplexa talplanet $\overline{\mathbb{C}}$ varje värde (inklusive ∞) exakt så många gånger som funktionens ordningstal anger.

Exponentialfunktionen

Låt $z = x + iy$ och betrakta funktionen

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Vi har i Exempel 2.8 visat att f är en hel funktion och att $f'(z) = f(z)$ i hela $\mathbb{C}$. Vidare ser vi att $f'(z) \neq 0$ i $\mathbb{C}$ och därmed förmedlar $w = f(z)$ en konform avbildning av z -planet. Låt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Då gäller:

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1} e^{x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= f(z_1) f(z_2), \quad (z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2). \end{aligned}$$

Därmed är följande definition motiverad.

Definition 3.5. Exponentialfunktionen, betecknad e^z , definieras genom formeln

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy. \quad (3.14)$$

Exponentialfunktionen

De egenskaper som vi utrett för e^z sammanfattas i följande sats.

Sats 3.5. För exponentialfunktionen e^z gäller:

- a) e^z är analytisk i hela $\mathbb{C}$ och $\frac{d}{dz} e^z = e^z \neq 0$ i $\mathbb{C}$.
- b) Avbildningen $w = e^z$ är konform i hela z -planet.
- c) För alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gäller: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
- d) För alla $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gäller: $|e^z| = e^x$ och $\arg e^z = y$.

Låt nu $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$. Då erhålls Eulers formler:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad (3.15)$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y. \quad (3.16)$$

Addition och subtraktion av (3.15) och (3.16) ger formlerna

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{och} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (3.17)$$

Om vi i (3.15) insätter $y = \pi$ erhålls sambandet

$$e^{i\pi} = -1. \quad (e^{i\pi} + 1 = 0) \quad (3.18)$$

Vi har tidigare framställt komplexa tal i polär form, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, där $r = |z|$ och $\theta = \arg z$. Med stöd av formel (3.15) erhålls standardframställningen av ett komplext tal z :

$$z = r e^{i\theta}. \quad (3.19)$$

Exponentialfunktionen

Definition 3.6. En funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ är periodisk med perioden w , om $f(z+w) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. (w period $\Rightarrow nw$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, även är en period). Om funktionen f inte har andra perioder än nw , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, så är f enkelt periodisk med den primitiva perioden w .

Vi skall nu utreda periodiciteten hos exponentialfunktionen, och frågar oss: Har ekvationen $e^{z+w} = e^z$ lösningar w som gäller för alla $z \in \mathbb{C}$? Sätt $w = x + iy$. Då erhålls

$$\begin{aligned} e^{z+w} = e^z &\Leftrightarrow e^z \cdot e^w = e^z \Leftrightarrow e^w = 1, \text{ (ty } e^z \neq 0) \\ &\Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{och} \quad y = 2\pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Alltså har vi $w = 2\pi ni$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

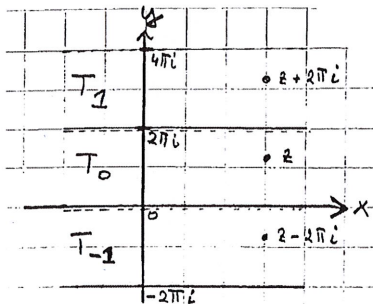
Sats 3.6. Exponentialfunktionen är enkelt periodisk med den primitiva perioden $w = 2\pi i$.

Exponentialfunktionen

Vi drar i z -planet, genom punkterna $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i$, ..., paralleller till reella axeln, varvid z -planet blir indelat i parallellstrimlor T_n ,

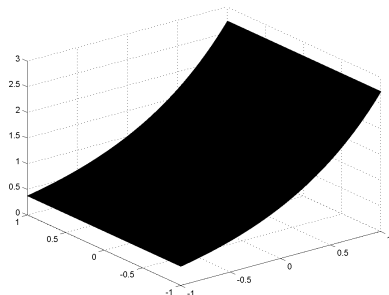
$$T_n = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi n \leq \operatorname{Im} z < 2\pi(n+1)\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.20)$$

I varje parallellstrimla antar e^z alla sina värden. Vid övergång från en parallellstrimla till en annan upprepar sig funktionsvärdena periodiskt. Parallellstrimlorna kallas periodzoner för e^z .



Exponentialfunktionen

Fasporträtt av exponentialfunktionen över tre periodzoner T_{-1} , T_0 och T_1 med realdelen i intervallet $[-4\pi, 4\pi]$, samt beloppet över $[-1,1] \times [-1,1]$

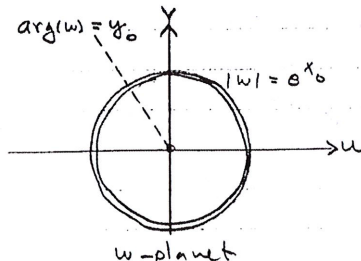
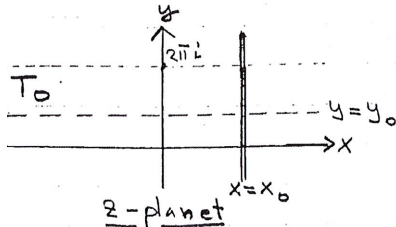


Exponentialfunktionen

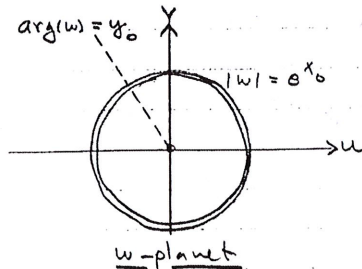
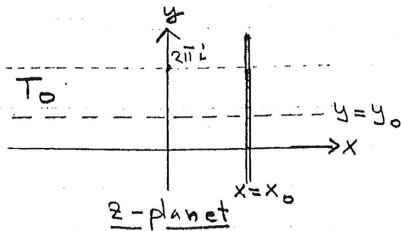
På grund av periodiciteten räcker det att studera avbildningen $w = e^z$ i en parallellstrimla. Vi väljer

$$T_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}.$$

Låt $z = x + iy$. Vi har då $|w| = e^x$ och $\arg w = y$. Räta linjen $x = x_0$ i z -planet avbildas på cirkeln $|w| = e^{x_0}$ i w -planet och räta linjen $y = y_0$ avbildas på strålen $\arg w = y_0$. Speciellt: Imaginära axeln avbildas på enhetscirkeln $|w| = 1$ och reella axeln avbildas på den positiva reella axeln, räta linjen $y = \pi$ avbildas på den negativa reella axeln.



Exponentialfunktionen



Genom varje punkt i w -planet går exakt en cirkel av typen $|w| = e^{x_0}$ och exakt en stråle av typen $\arg w = y_0$. Varje punkt i w -planet (utom $w = 0$) svarar mot exakt en punkt (x_0, y_0) i varje periodzon.

Sats 3.7. Exponentialfunktionen avbildar varje periodzon T_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, konformt och bijektivt på hela w -planet, utom punkten $w = 0$.

- Exempel 3.2.** a) Parallellstrimlan $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ avbildas på det längs positiva reella axeln uppskurna w -planet.
- b) Parallellstrimlan $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ avbildas på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.
- c) Halvstrimlan $z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0\}$ avbildas på halvcirkeln $|w| < 1, \operatorname{Im} w > 0$.

Exempel 3.3. Sök en analytisk funktion $w = f(z)$ som avbildar parallellstrimlan $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$ på övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.

Lösning: Steg 1. Vi önskar först vrida parallellstrimlan vinkeln $\pi/2$ (rita figur!). Detta åstadkoms med transformationen $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz$. Då överförs parallellstrimlan på $\{z_1 : 0 < \operatorname{Im} z_1 < 2\pi\}$.

Steg 2. Denna parallellstrimla bör komprimeras till halva sin bredd, vilket görs med $z_2 = \frac{1}{2} z_1 = \frac{i}{2} z$. Då överförs parallellstrimlan på $\{z_2 : 0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi\}$.

Steg 3. Med stöd av Exempel 3.2 b) ges då den eftersökta avbildningen av $w = e^{z_2} = e^{\frac{i}{2} z} = f(z)$.

Logaritmen

Exponentialfunktionen är inte en injektiv avbildning från z -planet till w -planet $\setminus \{0\}$. Vi kan alltså inte definiera en invers till e^z . Trots detta inför vi logaritmen $\ln z$ genom:

$$\underline{w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w, \quad z \neq 0.} \quad (3.21)$$

Logaritmen $\ln z$ är då ingen funktion, eftersom för ett givet värde $z \neq 0$ erhålls oändligt många värden $w = \ln z$ som skiljer sig från varandra med en heltalig multipel av $2\pi i$. (Ett värde w ur varje periodzon för e^w i w -planet).

Logaritmen

Sätt nu $z = r e^{i\theta}$, där $r > 0$, och $w = u + i v$. Då gäller

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow r e^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v) \\ &\Leftrightarrow u = \ln r \quad \text{och} \quad \theta = v + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

där $\ln r$ betecknar den entydigt bestämda reella logaritmen för $r > 0$. Vi erhåller därmed en formel för beräkning av alla värden på $\ln z$, nämligen

$$\ln z = u + i v = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.22)$$

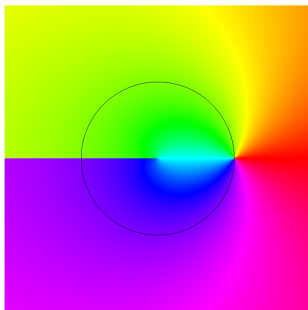
Om vi i formel (3.22) väljer argumentet av z så att $0 \leq \arg z < 2\pi$ och $n = 0$, så erhålls logaritmens principalgren:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi. \quad (3.23)$$

Principalgrenen är invers till exponentialfunktionens restriktion till periodzonen T_0 .

Logaritmen

Fasporträtt av logaritmens principalgren över $[-2,2] \times [-2,2]$. **Observera:** I Matlab argumentet i $[-\pi, \pi]$, periodzon T_0 mellan $\pm i\pi$, $\mathbb{C}$ uppskuret i intervallet $(-\infty, 0]$. Vår teori: Argumentet i $[0, 2\pi]$, T_0 mellan 0 och $i2\pi$, $\mathbb{C}$ uppskuret i intervallet $[0, \infty)$.



Logaritmen

Varje enskild gren av logaritmen är invers till restriktionen av exponentialfunktionen till någon periodzon. Då kan den allmänna formeln, $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$, för

derivering av en invers tillämpas på varje gren av logaritmen. Med $w = \ln z$ och $z = e^w$ erhålls då

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

Alltså får vi formeln

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0. \quad (3.24)$$

Observera att varje enskild gren av logaritmen är analytisk i $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Sätt nu $w_1 = \ln z_1$ och $w_2 = \ln z_2$, varvid $z_1 = e^{w_1}$ och $z_2 = e^{w_2}$. Vidare gäller $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}$, vilket med stöd av (3.21) är ekvivalent med $\ln(z_1 z_2) = w_1 + w_2 = \ln z_1 + \ln z_2$. Vi får således formeln

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2. \quad (3.25)$$

Formel (3.25) gäller endast om grenvalet görs lämpligt i vänster- och högerled.

Exempel 3.4. Låt $z_1 = -1$, $z_2 = -i$ och välj principalgrenen $n = 0$ i högerled av (3.25). Då erhålls $\ln z_1 = \ln(-1) = \pi i$ och $\ln z_2 = \ln(-i) = \frac{3\pi}{2} i$. Alltså $\ln z_1 + \ln z_2 = \frac{5\pi}{2} i$. Alla värden för vänstra ledet kan beräknas med (3.22).

$$\ln(z_1 z_2) = \ln i = \ln|i| + i \left(\frac{\pi}{2} + n 2\pi \right).$$

Därmed bör vi välja $n = 1$ i vänstra ledet för att få överensstämmelse.

För $z_2 \neq 0$ har vi med stöd av (3.25) att $\ln z_1 = \ln\left(\frac{z_1}{z_2} z_2\right) = \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \ln z_2$. Därmed erhålls formeln

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2, \quad z_2 \neq 0, \quad (3.26)$$

som gäller vid lämpligt grenval av logaritmnerna.

Allmän potens

Definition 3.7. Den allmänna potensen z^c definieras genom

$$z^c = e^{c \ln z}, \quad z \neq 0, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (3.27)$$

Med hjälp av deriveringsreglerna för e^z och $\ln z$ fås

$$\frac{dz^c}{dz} = \frac{d e^{c \ln z}}{dz} = e^{c \ln z} c \frac{1}{z} = c z^{c-1}, \quad z \neq 0. \quad (3.28)$$

Då $\ln z$ är mångtydig, blir även z^c i regel mångtydig.

Exempel 3.5. Beräkna alla värden på i^i . **Lösning:**

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(\ln |i| + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Allmän potens

Fasporträtt, användande logaritmens principalgren, över $[-1,1] \times [-1,1]$ av $z^{\frac{1}{2}}$ och z^i till vänster respektive höger.

