

Komplex analys I, v.37

Delmängder av komplexa talplanet

I detta avsnitt införs begreppen cirkelskiva, inre punkt, randpunkt, höljepunkt och hopningspunkt som hjälpmedel för klassificering av delmängder av $\mathbb{C}$. Viktiga delmängder är bland annat öppna och slutna mängder, områden och konvexa mängder.

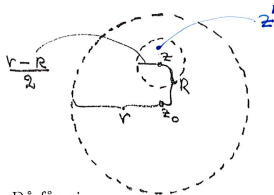
Definition 1.6. Mängden av punkter innanför cirkeln $|z - z_0| = r > 0$, kallas en cirkelskiva med radie r och medelpunkt z_0 , $z_0 \in \mathbb{C}$, och betecknas $D(z_0, r)$.

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\}. \quad (1.47)$$

Låt M vara en godtycklig mängd i $\mathbb{C}$ och antag att $z \in M$. Om det finns en cirkelskiva $D(z, r)$ sådan att $D(z, r) \subseteq M$ så är z en inre punkt av M . Mängden av alla inre punkter av M betecknas M° . Klart att $M^\circ \subseteq M$.

Delmängder av komplexa talplanet

Exempel 1.8. Visa att $D^\circ(z_0, r) = D(z_0, r)$. Bevis: Klart att $D^\circ(z_0, r) \subseteq D(z_0, r)$. Tag godtyckligt $z \in D(z_0, r)$. Sätt $R := |z - z_0|$. Då gäller $R < r$ (se figur).



Tag godtyckligt $z' \in D(z, (r - R)/2)$. Då får vi

$$|z' - z_0| = |(z' - z) + (z - z_0)| \leq |z' - z| + |z - z_0| < \frac{r - R}{2} + R < r.$$

Alltså gäller $D(z, (r - R)/2) \subseteq D(z_0, r)$, så z är en inre punkt i $D(z_0, r)$. Då gäller $D(z_0, r) \subseteq D^\circ(z_0, r)$ och därmed är $D^\circ(z_0, r) = D(z_0, r)$. $\square$

Definition 1.7. En punkt $z \in \mathbb{C}$ kallas randpunkt för mängden M om för varje $r > 0$ gäller att $D(z, r)$ innehåller minst en punkt ur M och minst en punkt ur komplementet av M , $(\mathbb{C} \setminus M)$. Mängden av alla randpunkter för M betecknas ∂M .

Exempel 1.9. $\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Delmängder av komplexa talplanet

Definition 1.8. En punkt $z \in \mathbb{C}$ kallas höljepunkt för mängden M om varje cirkelskiva $D(z, r)$ innehåller någon punkt ur M . (z duger om $z \in M$). Mängden av M 's höljepunkter betecknas $\overline{M}$. Klart att $M \subseteq \overline{M}$. En punkt $z \in \mathbb{C}$ kallas hopningspunkt för mängden M om varje cirkelskiva $D(z, r)$ innehåller någon från z skild punkt ur M . Mängden av M 's hopningspunkter betecknas M' . Klart att $M' \subseteq \overline{M}$.

Anmärkning: Om z är en hopningspunkt för mängden M så innehåller varje cirkelskiva $D(z, r)$ oändligt många punkter ur M .

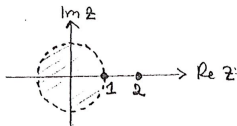
Exempel 1.10. Låt $M = \{z : |z| < 1\} \cup \{1\} \cup \{2\}$. Bestäm ∂M , M° , $\overline{M}$ och M' . **Lösning:**

$$M^\circ = \{z : |z| < 1\},$$

$$\partial M = \{z : |z| = 1\} \cup \{2\},$$

$$\overline{M} = \{z : |z| \leq 1\} \cup \{2\},$$

$$M' = \{z : |z| \leq 1\}.$$



Delmängder av komplexa talplanet

Exempel 1.11. Om M är en mängd i det komplexa talplanet, så gäller följande samband, där vi med $\overline{CM}$ betecknar komplementet till M med avseende på $\mathbb{C}$, $\overline{CM} := \mathbb{C} \setminus M$.

- (1) $\partial M \cap M^\circ = \emptyset$, vilket följer ur definitionerna 1.6 och 1.7.
- (2) $\overline{M^\circ \cup \partial M} = \overline{M}$, ty $z \in M^\circ \cup \partial M \Leftrightarrow (z \in M^\circ \text{ eller } z \in \partial M) \Leftrightarrow D(z, r) \cap M \neq \emptyset \text{ för alla } r > 0 \Leftrightarrow z \in \overline{M}$.
- (3) $\overline{M \cup \partial M} = \overline{M}$, ty $\overline{M} = M \cup \overline{M} = M \cup (M^\circ \cup \partial M) = (M \cup M^\circ) \cup \partial M = M \cup \partial M$.
- (4) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{CM}$, ty $z \in \partial M \Leftrightarrow \forall r > 0 : (D(z, r) \cap M \neq \emptyset) \wedge (D(z, r) \cap \overline{CM} \neq \emptyset) \Leftrightarrow z \in \overline{M} \wedge z \in \overline{CM} \Leftrightarrow z \in \overline{M} \cap \overline{CM}$.

Delmängder av komplexa talplanet

Definition 1.9. En mängd M är en omgivning av punkten $z \in \mathbb{C}$ om och endast om det finns en cirkelskiva $D(z, r)$ sådan att $D(z, r) \subset M$. Om punkten z utesluts ur omgivningen M , kallas den en punkterad omgivning av z . Om en mängd M utgör omgivning till alla sina punkter säger vi att M är en öppen mängd.



M öppen



M ej öppen

För en öppen mängd M gäller $M = M^\circ$, den består alltså av idel inre punkter. Med stöd av Exempel 1.8 gäller det att varje cirkelskiva $D(z_0, r)$ är en öppen mängd

Delmängder av komplexa talplanet

Definition 1.10. En mängd M är *sluten* om och endast om CM (komplementet av M) är en öppen mängd.



M sluten



M ej sluten

Delmängder av komplexa talplanet

Sats 1.2. För en godtycklig delmängd M av $\mathbb{C}$ gäller

$$\underline{M = \overline{M} \Leftrightarrow M \text{ är sluten} \Leftrightarrow \partial M \subseteq M.}$$

Bevis: 1) M är sluten $\Leftrightarrow CM$ är en öppen mängd $\Leftrightarrow \forall z \in CM \exists r > 0 : D(z, r) \subseteq CM \Leftrightarrow (z \in CM \Rightarrow z \notin \overline{M}) \Leftrightarrow \overline{M} \subseteq M \Leftrightarrow M = \overline{M}$.

2) Med stöd av ovanstående och Exempel 1.11 punkt (3), får vi att M är sluten $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow M = M \cup \partial M \Leftrightarrow \partial M \subseteq M$. $\square$

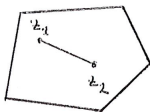
Anmärkning: Låt $M = \mathbb{C}$. Då utgör M en omgivning till varje punkt $z \in \mathbb{C}$. Alltså $M^\circ = M$ och $\mathbb{C}$ är en öppen mängd. Eftersom $\partial M = \emptyset$ har vi $\overline{M} = M \cup \partial M = M$ och $\mathbb{C}$ är en sluten mängd. Det komplexa talplanet är både en öppen och en sluten mängd.

Delmängder av komplexa talplanet

Definition 1.11. En mängd M är begränsad om och endast om det existerar en reell konstant $k > 0$ sådan att $|z| \leq k$ för alla $z \in M$. Om M är både begränsad och sluten så är M en kompakt mängd. En mängd M är sammanhängande om två godtyckliga punkter z_1 och z_2 i M alltid kan förenas med en bruten linje som ligger helt i M . En mängd M kallas konvex om det för varje val av punkter $z_1, z_2 \in M$ gäller att sträckan mellan z_1 och z_2 ligger helt i M . Om alla punkter på sträckan mellan z_1 och z_2 , där z_1 och z_2 undantas, är inre punkter i M så är M strängt konvex. Om mängden M är både öppen och sammanhängande, så är M ett område.



M öppen, samman-
hängande. Ett område.



M konvex,
ej strängt konvex.



M strängt konvex.

Utvidgade komplexa talplanet

För att kunna hantera talföljder och funktioner som växer obegränsat skall vi utvidga det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ genom att införa en "ideal" punkt betecknad ∞ med egenskapen att punkten ∞ ligger utanför varje cirkel $|z| = r$, oavsett hur stor radien r väljs. Den så erhållna mängden kallas det utvidgade komplexa talplanet och betecknas $\overline{\mathbb{C}}$. Vi har alltså $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Vi definierar följande räkneoperationer för ∞ och $z \in \mathbb{C}$.

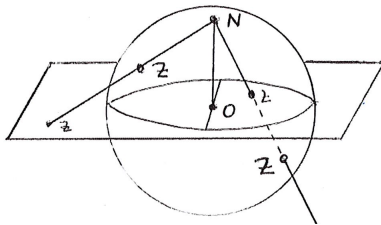
$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty + z = \infty, \\ z \cdot \infty &= \infty \cdot z = \infty, \quad z \neq 0, \\ \infty \cdot \infty &= \infty, \\ \frac{z}{0} &= \infty, \quad z \neq 0, \\ \frac{z}{\infty} &= 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Däremot är $\infty + \infty$ och $0 \cdot \infty$ odefinierade.

Definition 1.12. En mängd $M \subseteq \mathbb{C}$ utgör en omgivning till ∞ om M innehåller någon delmängd av formen $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

Utvidgade komplexa talplanet

Punkterna i $\bar{\mathbb{C}}$ kan tolkas som punkterna på enhetssfären S i $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, se figuren nedan. Låt $N = (0, 0, 1)$ vara "nordpolen" på S . Komplexa talplanet $\mathbb{C}$ identifieras med $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $\mathbb{C}$ skär S längs "ekvatorn". För varje $z \in \mathbb{C}$ betraktar vi den rätta linjen i $\mathbb{R}^3$ genom z och N . Linjen skär sfären i exakt en punkt $Z \neq N$. Om $|z| = 1$ så gäller $z = Z$, om $|z| > 1$ så ligger Z i "övre halvsfären" och om $|z| < 1$ så ligger Z i "undre halvsfären". Denna projektion ger en bijektiv avbildning av $\mathbb{C}$ på $S \setminus N$. Om vi föreskriver att ∞ avbildas på N får vi en bijektiv avbildning av $\bar{\mathbb{C}}$ på S . Man brukar kalla S för Riemannsfären.



Utvidgade komplexa talplanet

Ex) $N = (0, 0, 1)$, $Z = (a, b, c)$, $z = \alpha + i\beta$.

Linjen genom Z och N ges av:

$$N + t(Z - N) , \quad -\infty < t < +\infty.$$

Linjen skär $\mathbb{C}$ -planet i punkten $(\alpha, \beta, 0)$:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, 0) &= (0, 0, 1) + t((a, b, c) - (0, 0, 1)) \\ &= (ta, tb, 1 + t(c-1)) \end{aligned}$$

för något t . Ur tredje komponenten erhålls:

$$0 = 1 + t(c-1) \quad (\Leftrightarrow) \quad tc = t-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{t = \frac{1}{1-c}}.$$

Utvidgade komplexa talplanet

Alltså:

$$\begin{cases} d = ta = a/(1-c) \\ \beta = tb = b/(1-c). \end{cases}$$

Nu gäller: $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad | \cdot t^2$

$$\Leftrightarrow (ta)^2 + (tb)^2 + (tc)^2 = t^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + (t-1)^2 = t^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + t^2 - 2t + 1 = t^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{t = (|z|^2 + 1) / 2}$$

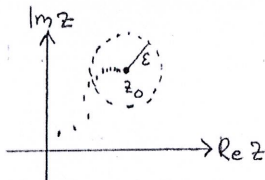
Vi erhåller sambandet mellan z och z :

$$\begin{cases} a = d/t = 2\alpha / (|z|^2 + 1), \\ b = \beta/t = 2\beta / (|z|^2 + 1), \\ c = 1 - 1/t = (|z|^2 - 1) / (|z|^2 + 1). \end{cases}$$

Talföljder

En oändlig följd av komplexa tal $z_1, z_2, z_3, \dots$ betecknas $\{z_n\}$ eller $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definition 2.1. En talföljd $\{z_n\}$ säges ha gränsvärdet $z_0 \neq \infty$, om för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N_\varepsilon > 0$ sådant att $n > N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$. I detta fall är talföljden konvergent och vi använder beteckningen $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ eller $z_n \rightarrow z_0$ då $n \rightarrow \infty$.



Om för varje positivt tal k finns ett heltal N_k så att $n > N_k \Rightarrow |z_n| > k$ skriver vi $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. I detta fall är talföljden inte konvergent. Talföljden är begränsad om det finns ett heltal $k > 0$ sådant att $|z_n| \leq k$ för alla n .

Sats 2.1. Varje konvergent talföljd är begränsad.

Bevis: Övningsuppgift. $\square$

Anmärkning: En begränsad talföljd behöver inte vara konvergent. Exempelvis är talföljden $\{z_n\}$, där $z_n = (-1)^n + 1/n$, begränsad, ty $|z_n| \leq 3/2$ för alla n , men talföljden är inte konvergent.

För att undersöka om en talföljd $\{z_n\}$ konvergerar kan man undersöka de reella talföljderna $\{\operatorname{Re} z_n\}$ och $\{\operatorname{Im} z_n\}$.

Talföljder

Sats 2.2. Beteckna $z_0 = x_0 + iy_0$ och $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$. Då gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ och } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \right).$$

Bevis: 1. ($\Rightarrow$) Antag att $z_n \rightarrow z_0$ då $n \rightarrow \infty$. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $N_\varepsilon > 0 : n > N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$. Med stöd av (1.27) gäller $|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ och $|y_n - y_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ då $n > N_\varepsilon$. Alltså gäller $x_n \rightarrow x_0$ och $y_n \rightarrow y_0$ då $n \rightarrow \infty$.

2. ($\Leftarrow$) Antag att $x_n \rightarrow x_0$ och $y_n \rightarrow y_0$ då $n \rightarrow \infty$. Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns ett heltal $N_{\varepsilon/2}$ sådant att $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$ och $|y_n - y_0| < \varepsilon/2$

då $n > N_{\varepsilon/2}$. Med stöd av (1.28) fås då för $n > N_{\varepsilon/2}$ att $|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Alltså $z_n \rightarrow z_0$ då $n \rightarrow \infty$. $\square$

Talföljder

Om $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \neq \infty$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0 \neq \infty$, där $\{z_n\}$ och $\{w_n\}$ är talföljder i $\mathbb{C}$, så gäller följande räkneregler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z_0 + w_0, \quad (2.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c z_n) = c z_0, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{w_n} \right) = \frac{z_0}{w_0}, \quad w_0 \neq 0. \quad (2.4)$$

Bevisen av räknereglerna (2.1) – (2.4) för gränsvärden är analoga med motsvarande bevis i reell analys, och lämnas som övningsuppgifter.

Definition 2.2. En talföljd $\{z_n\}$ säges vara en Cauchy-följd om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Det är bekant från Analys I att en reell talföljd är konvergent om och endast om den är en Cauchy-följd. Vi utnyttjar detta faktum i beviset av nästa sats.

Sats 2.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \neq \infty$ om och endast om $\{z_n\}$ är en Cauchy-följd.

Bevis: 1. $(\Rightarrow)$ Antag att $z_n \rightarrow z_0 \neq \infty$ då $n \rightarrow \infty$. Tag $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $N_{\varepsilon/2}$ sådant att $|z_n - z_0| < \varepsilon/2$ för $n > N_{\varepsilon/2}$. Tag $n, m > N_{\varepsilon/2}$. Då gäller

$$|z_n - z_m| = |(z_n - z_0) + (z_0 - z_m)| \leq |z_n - z_0| + |z_m - z_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Därmed är $\{z_n\}$ en Cauchy-följd.

2. $(\Leftarrow)$ Vi betecknar $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$. Tag $\varepsilon > 0$. Antag att det finns ett $N_\varepsilon > 0$ så att $|z_n - z_m| < \varepsilon$ såsnart $n, m > N_\varepsilon$. Då gäller med stöd av (1.27) att $|x_n - x_m| < \varepsilon$ och $|y_n - y_m| < \varepsilon$ då $n, m > N_\varepsilon$. Då nu $\{x_n\}$ och $\{y_n\}$ är reella Cauchy-följder så existerar reella $x_0, y_0 \neq \infty$ sådana att $x_n \rightarrow x_0$ och $y_n \rightarrow y_0$ då $n \rightarrow \infty$. Sats 2.2 ger att $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_0 + iy_0 = z_0 \neq \infty$. $\square$

Sats 2.4. En mängd $M \subseteq \mathbb{C}$ är sluten om och endast om varje konvergent följd i M konvergerar mot någon punkt i M .

Bevis: 1. ($\Rightarrow$). Antag att M är sluten. Låt $\{z_n\}$ vara en konvergent följd med $z_n \in M$ för alla n , och $z_n \rightarrow z_0 \neq \infty$ då $n \rightarrow \infty$. Vi skall visa att $z_0 \in M$. Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom $\{z_n\}$ konvergerar mot z_0 finns det en punkt z_n i följden sådan att $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$. Eftersom ε är godtyckligt vald innebär detta att $z_0 \in \overline{M}$. Då nu M är sluten gäller $M = \overline{M}$, alltså $z_0 \in M$.

2. ($\Leftarrow$). Vi anför ett indirekt bevis. Antag att M inte är sluten. Då kan vi välja ett $z_0 \in \overline{M}$ sådant att $z_0 \notin M$. Nu gäller $z_0 \in \overline{M} \Rightarrow D(z_0, 1/n)$ innehåller en punkt $z_n \in M$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Följden $\{z_n\}$ är då en följd i M och för givet $\varepsilon > 0$ gäller att $n > 1/\varepsilon \Rightarrow |z_0 - z_n| < \varepsilon$, alltså $z_n \rightarrow z_0 \notin M$ då $n \rightarrow \infty$. Därmed har vi visat att om varje konvergent följd i M konvergerar mot en punkt i M , så är M sluten. $\square$

Bolzano-Weierstrass' sats utsäger den viktiga egenskapen hos $\mathbb{R}$ att man ur varje begränsad oändlig reell talföljd kan utplocka en konvergent delföljd. Detta gäller även i $\mathbb{C}$.

Sats 2.5. Ur varje oändlig och begränsad talföljd $\{z_n\}$ i $\mathbb{C}$ kan utplockas en konvergent delföljd.

Bevis: Övningsuppgift. $\square$

Definition 2.3. Låt M vara en icke-tom delmängd av $\mathbb{C}$. Då definieras
diametern av M , beteckning $\text{diam } M$ genom

$$\text{diam } M := \sup\{|x - y| : x, y \in M\}. \quad (2.6)$$

Exempel 2.1. Låt $M = \{z : |z| < 1\}$. Då är $\text{diam } M = 2$.

Talföljder

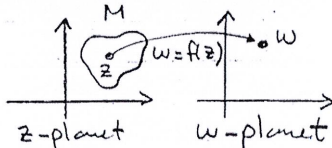
Sats 2.6. (Cantors sats) Låt $M_1, M_2, M_3, \dots$ vara en följd $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ av icke-tomma slutna mängder i $\mathbb{C}$ sådana att $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$. Antag vidare att $\text{diam } M_n \rightarrow 0$, då $n \rightarrow \infty$. Då består $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ av exakt en punkt.

Bevis: Låt satsens antaganden gälla. Vi bildar en följd $\{z_n\}$ sådan att för varje n gäller att $z_n \in M_n$. Tag $\varepsilon > 0$. Då finns ett $N_\varepsilon > 0$ sådant att $n > N_\varepsilon \Rightarrow \text{diam } M_n < \varepsilon$, ty $\text{diam } M_n \rightarrow 0$. Vidare gäller att $n, m > N > N_\varepsilon \Rightarrow z_n, z_m \in M_N \Rightarrow |z_n - z_m| < \text{diam } M_N < \varepsilon$. Alltså är $\{z_n\}$ en

Cauchy-följd och därmed konvergent enligt Sats 2.3. För $n > N$ gäller att $z_n \in M_N$ som är en sluten mängd. Då fås med stöd av Sats 2.4 att följden $\{z_n\}$ konvergerar mot $z_0 \in M_N$. Punkten $z_0 \in M_n$ för alla $n = 1, 2, \dots, N$, eftersom $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_N$. Välj godtyckligt heltal $k > N$. Då måste $z_0 \in M_k$, ty delföljden $\{z_n\}_{n=k}^{\infty}$ tillhör M_k och konvergerar mot z_0 . Alltså $z_0 \in M_n$ för alla n , vilket då medför att $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Antag att även w_0 tillhör snittet $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Då gäller att $|z_0 - w_0| < \text{diam } M_n$ för alla n . Men $\text{diam } M_n \rightarrow 0$, vilket medför att $z_0 = w_0$ måste gälla. Alltså innehåller snittet exakt en punkt z_0 . $\square$

Funktioner

Definition 2.4. Låt $M \subseteq \mathbb{C}$. En funktion f som tillordnar varje $z \in M$ ett komplext tal $w = f(z)$, kallas en komplexvärd funktion av en komplex variabel z . Mängden M kallas f 's definitionsområde.



Låt $z = x + iy$ och $w = u + iv$, där x, y, u, v är reella. Då blir u och v reella funktioner, $u(x, y)$ och $v(x, y)$, av x och y . Vi kan då skriva

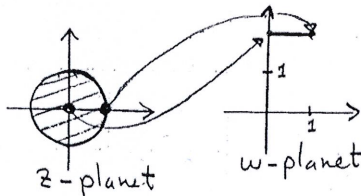
$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (2.7)$$

där u och v kallas f 's reella respektive imaginära del.

Funktioner

Exempel 2.2. Beskriv värdemängden för funktionen $f(z) = x^2 + 2i$, $z = x + iy$, då definitionsmängden är $M = \{z : |z| \leq 1\}$.

Lösning: Vi har realdelen $u(x, y) = x^2$ som varierar mellan 0 och 1 för $z \in M$. Imaginära delen är konstant, $v(x, y) \equiv 2$. Därmed fås att M avbildas på $\{w : w = u + 2i, 0 \leq u \leq 1\}$.



Gränsvärden av funktioner

Definition 2.5. Antag att M är definitionsmängd för funktionen f och att $z_0 \in \overline{M}$. Funktionen f har gränsvärdet $a \in \mathbb{C}$ när $z \rightarrow z_0$, om för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, sådant att

$$(z \in M \text{ och } |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - a| < \epsilon. \quad (2.8)$$

Vi betecknar detta $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ eller $f(z) \rightarrow a$ då $z \rightarrow z_0$.

Anmärkning 1: Om $z_0 \in M$ så gäller $a = f(z_0)$.

Anmärkning 2: För att visa att f inte har ett gränsvärde i $z_0 \in \overline{M}$ räcker det att hitta två följder $\{z_n\}$ och $\{w_n\}$ i M sådana att $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$, men $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n)$.

Exempel 2.3. Visa att funktionen $f(z) = z/\bar{z}$, $z \neq 0$, inte har något gränsvärde i $z_0 = 0$.

Lösning: Ser att $z_0 \in \overline{M}$. För reellt z gäller $z = \bar{z}$, alltså $f(z) = 1$ på reella axeln utom i $z = 0$. För rent imaginärt $z = iy$ gäller $z = -\bar{z}$, och $f(z) = -1$ på imaginära axeln, utom i $z = 0$. Därmed existerar inte gränsvärdet i $z_0 = 0$.

Definition 2.6. Vi säger att f har gränsvärdet a i punkten ∞ , beteckning $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$ eller $f(z) \rightarrow a$ då $z \rightarrow \infty$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett positivt tal k sådant att

$$|z| \geq k \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Med $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ avser vi att för varje $k > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| \geq k. \quad (2.10)$$

Antag att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \neq \infty$ och $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = b \neq \infty$. Då erhålls följande räkneregler

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = a \pm b, \quad (2.11)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = a \cdot b, \quad (2.12)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0. \quad (2.13)$$

Bevisen är analoga med de som anförs i reell analys.

Gränsvärden av funktioner

Sats 2.7. Låt $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + i y$. Då gäller att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =$
 $a = \alpha + i \beta$ om och endast om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \quad \text{och} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \beta. \quad (2.14)$$

$$(z_0 = x_0 + i y_0)$$

Bevis: Övningsuppgift. $\square$

Kontinuitet

Vi övergår nu till att behandla kontinuerliga funktioner och antar att
 $z_0 \in M$.

Definition 2.7. Funktionen f är kontinuerlig i punkten $z_0 \in M$ om $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Om f är kontinuerlig i varje punkt av sin definitionsmängd M så säges f vara kontinuerlig. Med andra ord är f kontinuerlig i punkten $z_0 \in M$ om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$(z \in M \text{ och } |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (2.15)$$

Med stöd av (2.11), (2.12) och (2.13) får vi då att om f och g är kontinuerliga i $z_0 \in M_f \cap M_g$ så är $f \pm g$ och $f \cdot g$ kontinuerliga i z_0 . Om $g(z_0) \neq 0$ så är även kvoten f/g kontinuerlig i z_0 .

För att utröna om f är kontinuerlig kan vi separat studera reella och imaginära delen av f .

Sats 2.8. Låt $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + i y$. Då är f kontinuerlig i punkten $z_0 = x_0 + i y_0$ om och endast om både $u(x, y)$ och $v(x, y)$ är kontinuerliga i punkten (x_0, y_0) .

Bevis: Påståendet följer ur definitionen på kontinuitet och Sats 2.7. $\square$

Sats. $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ är kontinuerlig i punkten $z_0 \in M$ om och endast om för varje följd $\{z_n\} \subseteq M$ sådan att $z_n \rightarrow z_0$ gäller att $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Beris: ($\Rightarrow$). Låt $\{z_n\} \subseteq M$, $z_n \rightarrow z_0$. Låt $\varepsilon > 0$.

Välj $\delta > 0$: $(z \in M \wedge |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Da $z_n \rightarrow z_0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $|z_n - z_0| < \delta$ för $n \geq N$.

Da gäller $|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$.

$\therefore f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Kontinuitet

($\Leftarrow$). Antites: f är ej kontinuerlig i $z_0 \in M$.

Ds $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$ för något $z \in M$,
 $|z - z_0| < \delta$.

Välj $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n=1, 2, \dots$ och $z_n \in M$, $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$,

ds att $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon$.

Ds gäller $z_n \rightarrow z_0$, men $f(z_n) \not\rightarrow f(z_0)$ ⚡

Antitesen falsk, f kontinuerlig i $z_0 \in M$.

En komplexvärd funktion f som är definierad på mängden M är begränsad om och endast om $\sup\{|f(z)| : z \in M\} < \infty$.

Sats 2.9. Om den komplexvärda funktionen f är kontinuerlig på en kompakt mängd M så är den begränsad på mängden. Vidare antar $|f|$ ett största och ett minsta värde på M .

Kontinuitet

Bevis: Antag som antites att f inte är begränsad på M . Då existerar en följd $\{z_n\}$ i M sådan att $|f(z_n)| > n$, $n = 1, 2, \dots$. Då M är begränsad är även följden $\{z_n\}$ begränsad. Då ger Sats 2.5 att vi kan utplocka en konvergent delföljd $\{z_{n_i}\}$ som konvergerar mot z_0 . Då M är sluten så gäller enligt Sats 2.4

att $z_0 \in M$. Då f är kontinuerlig i M gäller det att $f(z_{n_i}) \rightarrow f(z_0)$ då $i \rightarrow \infty$, men detta strider mot konstruktionen av följden $\{z_n\}$ och därmed är antitesen falsk. Alltså är f begränsad på M . Låt nu det reella talet K ges av $K := \sup\{|f(z)| : z \in M\}$. Då kan vi konstruera en följd $\{y_n\}$ i M sådan att $|f(y_n)| \rightarrow K$ då $n \rightarrow \infty$. vidare kan vi utplocka en konvergent delföljd $\{y_{n_i}\}$ som konvergerar mot $y_0 \in M$. För $z, z_0 \in M$ gäller $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$, vilket medför att även $|f(z)|$ är en kontinuerlig funktion i M . Då gäller $K = \lim_{i \rightarrow \infty} |f(y_{n_i})| = |f(y_0)|$, och $|f|$ antar ett största värde på M . (Att ett minsta värde antas bevisas analogt). $\square$