

Komplex analys I, v.36

Komplex analys I, 5 sp, 273040

Kurstider: v. 36 – v. 42 (2.9 – 17.10)

- Föreläsningar : Må, Ti 10 - 12 i Föreläsningssal Lindelöf.
- Demonstrationer: To 13 - 15 i Lindelöf, börjande vecka 37.

Frivillig ikryssning av räknade hemtal. Bonuspoäng till kurstenten: 50%, 75% och 90% lösta hemtal ger 1, 2 respektive 3 bonuspoäng till tenten

Kurslitteratur: Föreläsningsanteckningar och kurskompendiet *Analytiska funktioner*, tillgängligt på kurshemsidorna:

web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/analytiska/

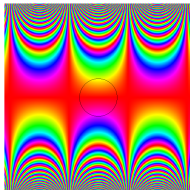
<https://stack.abo.fi/moodle/>

Kursmapp: Kopior av kursmaterial i datasalen, (bredvid sal Lindelöf).

Kurstent: Må 21.10 kl. 9-13 i Aud I.

Kursinnehåll

- Axiomatiskt införda komplexa tal
- Räkneoperationer med komplexa tal
- Potenser och n-te rötter
- Komplexa talplanet, delmängder av det och topologiska begrepp
- Utvidgade komplexa talplanet (Riemann-sfären)
- Komplexa talföljder, konvergens och Cauchy-följder
- Komplexvärda funktioner av en komplex variabel, $z = x + i y$,
 $w = f(z) = f(x + i y) = u(x, y) + i v(x, y)$,
där u och v är reellvärda funktioner av de reella variablerna x och y
- Visualisering av funktioner $w = f(z)$ över mängder i komplexa talplanet med hjälp av **fasporträtt**. (Finns inte i kompendiet). Exempelvis $f(z) = \exp(\sin(z))$ över rektangeln $-5 < x < 5$ och $-5 < y < 5$ har fasporträttet:



- Gränsvärden, kontinuitet och deriverbarhet
- Funktionen $f(z)$ är **analytisk** i en öppen mängd G om f är deriverbar i varje punkt av G . Då uppfylls **Cauchy-Riemanns** differentialekvationer av $u(x,y)$ och $v(x,y)$
- Parameterframställda kurvor och konform avbildning
- Elementära funktioner och deras avbildningar av områden i komplexa talplanet
- Polynom, rationella funktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner och hyperboliska funktioner
- Konform avbildning av ett givet område på ett annat givet område genom sammansättningar av elementära funktioner
- **Möbiustransformationer** avbildar "cirkelområden" på "cirkelområden"

- **Tredje- och fjärdegrads polynomekvationer** (1500-talet): Behov av att kunna tolka betydelsen av rötter av negativa tal. **Cardanos formler**. (Italienska matematiker, Ferro, Tartaglia, Cardano).
- **Euler** införde symbolen i för roten av talet -1 år 1777, samt upptäckte sambandet $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, och att $\log z = \log r + i(\alpha + 2\pi n)$, där n är ett heltal och där $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.
- Ungefär 1800 **Komplexa talplanet**, komplexa talens framställning som ordnade reella talpar. (Gauss, Argand, Wessel).
- **1800-talet:**
 - **Cauchy:** Integrationsteori
 - **Weierstrass:** Potensserier
 - **Riemann:** Analytiska funktioners avbildningar

Komplexa tal

Den axiomatiskt införda reella talkroppen $\mathbb{R}$ och räkneoperationerna med reella tal antas bekanta. (Se kursen i Analys I, Protter och Morrey: A first course in real analysis).

Definition 1.1. De komplexa talen $\mathbb{C}$ definieras som mängden av ordnade reella talpar, $\{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$, med addition och multiplikation definierade genom formlerna

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (1.1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (1.2)$$

Två komplexa tal (a, b) och (c, d) är lika om och endast om $a = c$ och $b = d$.

Komplexa tal

Låt $z = (a, b)$ och $z_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, beteckna godtyckliga komplexa tal. Genom att verifiera att de komplexa talen satisfierar nedanstående axiom bevisar man att $\mathbb{C}$ bildar en talkropp.

- (1) $\mathbb{C}$ är sluten under addition och multiplikation:

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{och} \quad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}.$$

- (2) Associationslagarna:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \text{och} \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

- (3) Kommutationslagarna:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{och} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

- (4) $(0, 0)$ är det entydigt bestämda neutrala elementet vid addition:

$$\forall z \in \mathbb{C} : z + (0, 0) = z.$$

- $(1, 0)$ är det entydigt bestämda neutrala elementet vid multiplikation:

$$\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot (1, 0) = z.$$

- (5) För varje $z \in \mathbb{C}$ finns en entydigt bestämd additiv invers i $\mathbb{C}$, betecknad $-z$, sådan att

$$z + (-z) = (0, 0).$$

För varje $z \neq (0, 0)$ i $\mathbb{C}$ finns en entydigt bestämd multiplikativ invers i $\mathbb{C}$, betecknad z^{-1} , sådan att

$$z \cdot z^{-1} = (1, 0).$$

(Notera att $z = (a, b) \Rightarrow -z = (-a, -b)$ och $z = (a, b) \Rightarrow z^{-1} = (a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$).

- (6) Distributionslagen:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Komplexa tal

Exempel 1.1. Att det neutrala elementet $(0, 0)$ i (4) är entydigt bestämt fås genom att visa att $(0, 0)$ är ett neutralt element (lätt), och därefter antar vi att $(a, b) \in \mathbb{C}$ är ett neutralt element för addition. Då erhåller vi med hjälp av (4) och (3) att

$$(a, b) \stackrel{(4)}{=} (a, b) + (0, 0) \stackrel{(3)}{=} (0, 0) + (a, b) = (0, 0).$$

Att den additiva inversen i (5) för $z \in \mathbb{C}$ är entydigt bestämd fås genom att antaga att $z + z_1 = (0, 0)$ och $z + z_2 = (0, 0)$, varvid (2), (3) och (4) ger att

$$\begin{aligned} z_1 &\stackrel{(4)}{=} z_1 + (0, 0) = z_1 + (z + z_2) \stackrel{(2)}{=} (z_1 + z) + z_2 \stackrel{(3)}{=} (z + z_1) + z_2 \\ &= (0, 0) + z_2 \stackrel{(3)}{=} z_2 + (0, 0) = z_2. \end{aligned}$$

Vi skall nu införa skillnad och kvot för komplexa tal. För godtyckliga tal (a, b) och (c, d) har ekvationen

$$(c, d) + (x, y) = (a, b)$$

en entydigt bestämd lösning $(x, y) \in \mathbb{C}$, ty med stöd av (1.1) fås att ekvationen är ekvivalent med att $c + x = a$ och $d + y = b$, vilket är ekvivalent med att $x = a - c$ och $y = b - d$. Vi inför då skillnaden mellan (a, b) och (c, d) som den entydigt bestämda lösningen till ekvationen, dvs

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \quad (1.3)$$

Komplexa tal

Om vi nu antar att (a, b) och (c, d) är godtyckliga komplexa tal med $(c, d) \neq (0, 0)$ så har ekvationen

$$(c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$$

en entydigt bestämd lösning i $\mathbb{C}$ ty med stöd av (1.2) fås att ekvationen är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

som på grund av att $c^2 + d^2 \neq 0$ har den entydigt bestämda lösningen

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{och} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Vi inför kvoten mellan (a, b) och (c, d) , då $(c, d) \neq (0, 0)$, som den entydigt bestämda lösningen till ovanstående ekvation,

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} := \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right), \quad \text{då } (c, d) \neq (0, 0). \quad (1.4)$$

Komplexa tal

Låt nu $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ beteckna den delmängd av $\mathbb{C}$ som ges av

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Då är $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ sluten under addition, multiplikation, subtraktion och kvotbildning, ty med stöd av (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) gäller det för godtyckliga $(a, 0), (b, 0) \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ att

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad (1.5)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0) \quad (1.6)$$

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \quad (1.7)$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \quad b \neq 0. \quad (1.8)$$

Då uppfyller $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ axiomen för en talkropp i (1)–(6) ovan, och är därmed en delkropp av $\mathbb{C}$. Om vi definierar en bijektiv avbildning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ genom

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(a) = (a, 0), \quad (1.9)$$

Komplexa tal

så följer det av (1.5) och (1.6) att f är en isomorfi mellan $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Vi kan därför identifiera $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ med $\mathbb{R}$ och skriver i fortsättningen a istället för $(a, 0)$. Vi kan därmed betrakta $\mathbb{R}$ som en delkropp av $\mathbb{C}$, samt $\mathbb{C}$ som en utvidgning av den reella talkroppen $\mathbb{R}$. Nu införs beteckningen

$$i := (0, 1), \quad (1.10)$$

varvid (1.2) ger att $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Vi får alltså sambandet

$$i^2 = -1. \quad (1.11)$$

Låt $z = (a, b)$ vara ett godtyckligt komplext tal. Då erhålls

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + i \cdot b$$

I fortsättningen används beteckningssättet

$$z = a + ib \quad (1.12)$$

för det komplexa talet $z = (a, b)$, varvid i kallas **imaginära enheten**, a kallas **reella delen av z** , beteckning $a = \operatorname{Re} z$, och b kallas **imaginära delen av z** , beteckning $b = \operatorname{Im} z$. Nu kan formlerna (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) skrivas

(1.5) - (1.8):

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0+0) = (a+b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

$$(a, 0) - (b, 0) = (a-b, 0-0) = (a-b, 0)$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{ab + 0 \cdot 0}{b^2 + 0^2}, \frac{0 \cdot b - a \cdot 0}{b^2 + 0^2} \right) = \left(\frac{a}{b}, 0 \right), b \neq 0$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{l} f(a) + f(b) = f(a+b) \\ f(a) \cdot f(b) = f(ab) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f \text{ iso-} \\ \text{morf.} \end{array} \right\}$$

$$\left(a+b = f^{-1}(f(a)+f(b)), ab = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)) \right)$$

Komplexa tal

z , beteckning $b = \operatorname{Im} z$. Nu kan formlerna (1.1), (1.2), (1.3) och (1.4) skrivas i formen

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d), \quad (1.13)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc), \quad (1.14)$$

$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d), \quad (1.15)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad c^2 + d^2 \neq 0. \quad (1.16)$$

Formlerna (1.13) – (1.16) erhålls genom att tillämpa de vanliga räknelagarna för reella tal och beakta att $i^2 = -1$. Formel (1.16) fås enklast genom förlängning med nämnarens konjugattal:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Exempel 1.2. Om $z \in \mathbb{C}$ och $b \in \mathbb{R}$ så gäller

$$z^2 + b^2 = (z + ib)(z - ib).$$

Därmed har ekvationen $z^2 + b^2 = 0$ alltid två rötter, $z = \pm ib$, i $\mathbb{C}$.

Belopp och konjugat

Definition 1.2. Låt $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, vara ett godtyckligt komplext tal. Talets absolutbelopp eller modul betecknas $|z|$ och definieras genom

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.17)$$

Konjugattalet till z , betecknat $\bar{z}$, definieras genom

$$\bar{z} = a - ib. \quad (1.18)$$

I följande sats sammanställs några räkneregler för konjugattal och absolutbelopp.

Belopp och konjugat

Sats 1.1. Låt z , z_1 och z_2 vara godtyckliga komplexa tal. Då gäller

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad (1.19)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \quad (1.20)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad (1.21)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0, \quad (1.22)$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{och} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), \quad (1.23)$$

$$|z| = |\overline{z}| \quad \text{och} \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}, \quad (1.24)$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.25)$$

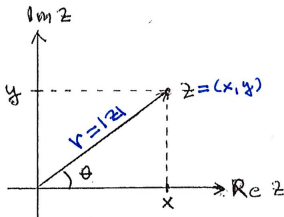
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0. \quad (1.26)$$

Bevis: Beviset lämnas som övningsuppgift. $\square$

Notera med stöd av (1.23) att $z \in \mathbb{C}$ är reellt om och endast om $z = \overline{z}$.

Komplexa talplanet

Ur definitionen på komplexa tal följer att $z \in \mathbb{C}$ kan representeras entydigt som en punkt $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ i ett rätvinkligt, tvådimensionellt koordinatsystem. Det komplexa talet $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, representeras då av punkten (x, y) i ett koordinatsystem där x -axeln och y -axeln kallas den reella respektive imaginära axeln.



Talet z kan även tolkas som vektorn från origo till punkten (x, y) . Om längden av denna vektor betecknas med r noterar vi med stöd av (1.17) att $r = |z|$. Då vi tolkar $|x|$ och $|y|$ som längden av kateterna och $|z|$ som längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel erhålls olikheterna

$$|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{och} \quad |y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad (1.27)$$

$$|z| \leq |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|. \quad (1.28)$$

Komplexa talplanet

Den vinkel θ som vektorn $z \neq 0$ bildar med den positiva x -axeln kallas z 's argument, beteckning $\arg z$. Argumentet är bestämt på en additiv multipel av 2π när. Nu gäller för $z \neq 0$ att

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{|z|}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Med beaktande av att $r = |z|$ fås ur (1.29) den polära framställningen av talet $z = x + iy$,

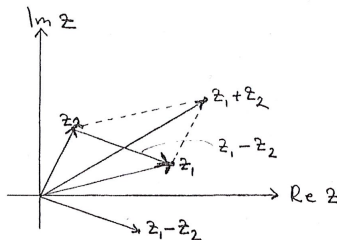
$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = r (\cos \theta + i \sin \theta).\tag{1.30}$$

Vidare erhålls ur (1.29) formlerna

$$\begin{cases} \arg z = \arctan \frac{y}{x}, & \text{då } x > 0, \\ \arg z = \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{då } x < 0. \end{cases}\tag{1.31}$$

Komplexa talplanet

Vi skall nu ge räkneoperationerna mellan komplexa tal en grafisk tolkning i det komplexa talplanet.



På grund av (1.1) inses att additionen $z_1 + z_2$ av två komplexa tal kan tolkas som vektoraddition i $\mathbb{R}^2$. Vidare har vi att $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$, så skillnaden $z_1 - z_2$ representeras av den vektor som utgår från z_2 's ändpunkt och utsträcker sig till z_1 's ändpunkt. Vi kan alltså tolka $|z_1 - z_2|$ som avståndet mellan z_1 och z_2 . Det är då naturligt att införa följande definition.

Definition 1.3. Avståndet mellan de komplexa talen $z_1 = x_1 + i y_1$ och $z_2 = x_2 + i y_2$ betecknas $d(z_1, z_2)$ och definieras genom formeln

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.32)$$

Exempel 1.3. Den origocentrerade cirkeln med radien r utgörs av $\{z \in \mathbb{C} : d(z, 0) = |z| = r\}$. Cirkeln med medelpunkten $z_0 \in \mathbb{C}$ och radien r ges av $\{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| = r\}$.

Ur ovanstående figur kan vi grafiskt utläsa att $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Detta

Komplexa talplanet

bör verifieras analytiskt,

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\&= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\&= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{(z_1 \bar{z}_2)} + |z_2|^2 \quad (\bar{\bar{z}} = z) \\&= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\&\leq |z_1|^2 + 2 |z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\&= (|z_1| + |z_2|)^2.\end{aligned}$$

Alltså gäller $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Vidare inses, eftersom $|-z| = |z|$, att $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$. Man kan också visa att $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$, (övningsuppgift). Vi sammanfattar utredningarna i triangelolikheten

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.33)$$

Med fullständig induktion kan högra olikheten i (1.33) generaliseras i formen

$$|z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|. \quad (1.34)$$

Komplexa talplanet

Definition 1.4. En icke-tom mängd M försedd med en avbildning $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller axiomen

- (1) $\forall x, y \in M : d_M(x, y) \geq 0$ och $d_M(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (2) $\forall x, y \in M : d_M(x, y) = d_M(y, x)$,
- (3) $\forall x, y, z \in M : d_M(x, z) \leq d_M(x, y) + d_M(y, z)$,

kallas ett metriskt rum, beteckning (M, d_M) , och d_M kallas en metrik.

Exempel 1.4. De komplexa talen $\mathbb{C}$ med d definierad enligt (1.32) är ett metriskt rum, $(\mathbb{C}, d)$. Axiomen (1) och (2) är lätta att verifiera. Vidare gäller för $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ att

$$\begin{aligned} d(z_1, z_3) &= |z_1 - z_3| = |(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)| \\ &\leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3). \end{aligned}$$

Därmed är axiom (3) uppfyllt.

Avslutningsvis skall vi grafiskt tolka multiplikation och division av komplexa tal. Betrakta två komplexa tal $z_1, z_2 \neq 0$ givna i polär form, $z_j = r_j (\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$, $j = 1, 2$. Vi erhåller då

$$\begin{aligned} w &= z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

eller med andra ord

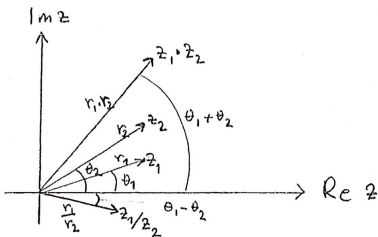
$$|w| = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.35)$$

$$\arg w = \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.36)$$

Två tal i $\mathbb{C}$ multipliceras så, att modulerna multipliceras och argumenten adderas.

Komplexa talplanet

Två tal i $\mathbb{C}$ multipliceras så, att modulerna multipliceras och argumenten adderas.



Om vi betraktar kvoten $w = z_1/z_2$ och skriver den som $z_1 = w \cdot z_2$, så ger (1.35) och (1.36) att $|z_1| = |w| |z_2|$ och $\arg z_1 = \arg w + \arg z_2$. Alltså gäller

$$|w| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.37)$$

$$\arg w = \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (1.38)$$

Två tal i $\mathbb{C}$ divideras så, att modulerna divideras och argumenten subtraheras.

Moivres formel

Låt $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ vara ett godtyckligt tal i polär form. Upprepad användning av (1.35) och (1.36) ger oss

$$\begin{aligned}z &= r(\cos \theta + i \sin \theta), \\z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \\z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta), \\&\vdots\end{aligned}$$

Genom fullständig induktion bevisas formeln

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.39)$$

Speciellt för $r = 1$ kallas (1.39) Moivres formel,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.40)$$

För $z \neq 0$ och n ett positivt heltal definieras $z^{-n} := (z^{-1})^n$.

Moivres formel

Exempel 1.5. Beräkna $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4$. **Lösning:** Vi noterar att $|\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$ och att $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi får då med stöd av (1.39) att

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4 &= \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^4 = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{4}+i\sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^4 \\&= 2^4(\cos \pi+i\sin \pi) = -16.\end{aligned}$$

Exempel 1.6. Uttryck $\cos 3\theta$ och $\sin 3\theta$ med hjälp av potenser av $\cos \theta$ och $\sin \theta$. **Lösning:** Moivres formel med $n=3$ ger

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos \theta + i\sin \theta)^3 \\&= \cos^3 \theta + i3\cos^2 \theta \sin \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta - i\sin^3 \theta \\&= (\cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta) + i(3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta).\end{aligned}$$

Identifiering av reella och imaginära delen ger formlerna

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta, \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta.\end{aligned}$$

Potenser och rötter

Definition 1.5. Ett tal $z \in \mathbb{C}$ är en n :te rot av det komplexa talet w om

$$z^n = w, \quad (1.41)$$

där $n > 0$ är ett heltal. $w^{1/n}$ betecknar mängden av alla n :te rötter av w .

Vi skall nu söka alla lösningar till ekvationen (1.41) och ansätter därför $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ och $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$. Då gäller

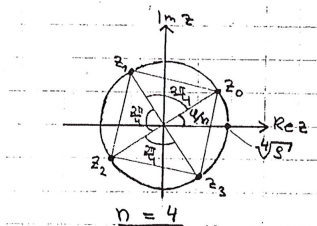
$$r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

vilket ger $r^n = \rho > 0$ och $n\theta = \varphi + k \cdot 2\pi$ för heltaligt k . Vi erhåller

$$z = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k 2\pi}{n} \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.42)$$

Man ser att (1.42) ger precis n stycken **olika** n :te rötter z_k svarande mot $k = 0, 1, \dots, n-1$. Dessa z_k :n bildar hörn i en regelbunden n -hörning inskriven i cirkeln $|z| = \sqrt[n]{\rho}$. Fallet $n = 4$ illustreras i nedanstående figur.

Potenser och rötter



Vi får då formeln

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k 2\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (1.43)$$

för n :te rötterna av w . Betrakta speciellt fallet $w = 1$. Då fås de n :te enhetsrötterna ε_k ,

$$\varepsilon_k = \cos \left(\frac{k 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{k 2\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (1.44)$$

Potenser och rötter

svarande mot en regelbunden n -hörning inskriven i enhetscirkeln $|z| = 1$ med $\varepsilon_0 = 1$. Om vi sätter $w_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, svarande mot $k = 1$ i (1.44), får vi med stöd av Moivres formel att

$$\varepsilon_k = w_n^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.45)$$

och observerar att (1.43) kan skrivas i formen

$$z_k = z_0 \varepsilon_k = z_0 w_n^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.46)$$

Exempel 1.7. Beräkna $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{1/3}$. **Lösning:** Vi omskriver $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ i den polära formen $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Då har vi med stöd av (1.43) lösningen
($|w|=2, \varphi=\pi/4, n=3$)

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{1/3} = \left\{ \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2 \right\}.$$

(Rötterna till ekvationen $z^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$)

Definition: En reell n:te rot till ett reellt tal a är ett reellt tal x sådant att $x^n = a$.

I) $a > 0$.

a) n jämnt. Två reella n :te rötter, en positiv och en negativ.

Den positiva betecknas $\sqrt[n]{a}$ ($\sqrt{a}$ om $n=2$)

b) n udda. En reell n :te rot, positiv,
beteckning: $\sqrt[n]{a}$

II $b < 0$.

a) n jämnt. Ingen reell n:te rot

b) n udda. En reell n:te rot som är negativ
beteckning: $\sqrt[n]{b}$

Räknelagar: (då alla n:te rötter existerar)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$