

Analytiska funktioner

av

Christer Glader och Mikael Lindström

Innehållsförteckning

1	Komplexa talplanet	1
1.1	Komplexa tal, konjugat och belopp	1
1.2	Komplexa talplanet	6
1.3	Moivres formel, potenser och rötter	10
1.4	Delmängder av komplexa talplanet	12
1.5	Det utvidgade komplexa talplanet	16
2	Analytiska funktioner	17
2.1	Talföljd, funktion, gränsvärde och kontinuitet	17
2.2	Deriverbarhet och analytiska funktioner	23
2.3	Harmoniska funktioner	30
2.4	Kontinuerliga kurvor och konform avbildning	32
3	Elementära funktioner	35
3.1	Rationella funktioner	35
3.2	Exponentialfunktionen, logaritmen och potensen	41
3.3	Trigonometriska funktioner	46
4	Möbiustransformationer	50
4.1	Elementära transformationer	50
4.2	Möbiustransformationen	55
4.3	Fyra punkters dubbelförhållande	57
4.4	Avbildning av "cirkelområden"	60
4.5	Spegelpunkter	62
5	Komplexa serier	67
5.1	Allmänna satser	67
5.2	Likformig konvergens	70
5.3	Potensserier	72
5.4	Derivator av potensserier	77
6	Komplex integration	80
6.1	Kurvintegraler längs regulära kurvor	80
6.2	Integralens beroende av vägen	83
6.3	Cauchys integralsats	87

7	Cauchys integralformel med tillämpningar	93
7.1	Cauchys integralformel	93
7.2	Serieutveckling av analytiska funktioner	96
7.3	Identitetssatsen för analytiska funktioner	100
7.4	Gauss' medelvärdessats. Liouvilles sats. Algebrans fundamentalsats	102
7.5	Maximumprincipen. Schwarz' lemma	103
8	Residykalkyl	107
8.1	Laurentserier	107
8.2	Isolerade singulariteter	114
8.3	Residysatsen	116
8.4	Beräkning av reella integraler med residykalkyl	123
	Referenser	132

Förord

Föreliggande kompendium är en sammanfattning av våra föreläsningsanteckningar i kursen Analytiska funktioner, som vi har hållit under flera år vid Åbo Akademi. Innehållet följer ett klassiskt framställningssätt av teorin för analytiska funktioner och innefattar elementär teori fram till residykalkyl med tillämpningar. Vi gör inga anspråk på originalitet. Materialet är sammanställt ur ett flertal böcker, (se referenserna sida 132), av vilka vi speciellt vill lyfta fram kompendiet [7] av Sjöberg, samt läroböckerna av Fisher [3], Nevanlinna och Paatero [5], och Saff och Snider [6].

Åbo, i december 2008

Christer Glader och Mikael Lindström