III. Fullständighet

Grundbegrepp

Def. Låt (X,d) vara ett metriskt rum. En följd (x_n) i X kallas en Cauchyföljd, om till varje $\varepsilon > 0$ hör ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ för alla $n, m \geq n_\varepsilon$. Om varje Cauchyföljd i X konvergerar i X, så sägs X vara fullständigt.

Sats 39 Låt (X,d) vara ett metriskt rum.

(a) Om $(x_n)_n$ är en konvergent följd i X, så är $(x_n)_n$ en Cauchyföljd i X.

(b) Om $(x_n)_n$ är en Cauchyföljd i X och den har en konvergent delföljd, så konvergerar följden $(x_n)_n$ mot den konvergenta delföljdens gränsvärde.

Bevis: (a) Låt $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ i (X,d) och $\varepsilon > 0$. Välj $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, så att $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ då $n \geq n_\varepsilon$. Då gäller för alla $m, n \geq n_\varepsilon$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

(b) Låt $(x_{n_k})_k$ vara en delföljd av $(x_n)_n$ med $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$ i (X,d). Låt $\varepsilon > 0$. Välj $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ för $k \geq k_\varepsilon$. Vidare väljer vi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ då $n, m \geq n_\varepsilon$. Om $k \geq \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, så gäller

$$d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \text{ ty } n_k \geq k.$$

1) Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $\emptyset \neq A \subseteq X$. [...]trakten A som ett metriskt rum med avseende på den inducerade [...]en.

[...]n A är fullständigt, så är A slutet i X.

[...]n X är fullständigt och A är slutet i X, så är A fullständigt.

(a) Låt $(x_n)_n$ vara en följd i A som konvergerar i X. Enligt [...] 39 (a) är $(x_n)_n$ en Cauchyföljd. Emedan A är fullständigt [...] följden $(x_n)_n$ ett gränsvärde i A, dvs. $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$ och [...]värdet är entydigt. Enligt Sats 15 är A slutet.

Låt $(x_n)_n$ vara en Cauchyföljd i A. Emedan X är fullständig, existerar $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Sats 15 ger att $x \in A$, då A [...] slutet. Alltså A är fullständig.

[...]tion Ett fullständigt normerat rum kallas ett Banachrum och [...] fullständigt unitärt rum ett Hilbertrum.

[...]41 Låt (X,d) vara produkten av de metriska rummen (X_j,d_j), $j=1,\ldots$

En följd $(x_m)_m$ i X är en Cauchyföljd om och endast om för varje $j=1,\ldots,n$, $(pr_j(x_m))_m$ är en Cauchyföljd i X_j.

X är fullständig om och endast om varje X_j är fullständig.

[...]evis: (a) Analogt med Sats 31 (a).

(b) Följer av (a)-fallet och Sats 31 (a).

Absolutkonvergens för serier

...ition Låt $(x_n)_n$ vara en följd i ett normerat rum E. Serien x_n konvergerar mot en punkt $x \in E$, om $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} x_n = x$ i E. Beteckna vi $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Serien konvergerar absolut, om ...ien $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ med positiva termer konvergerar, dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

...rkning I motsats till situationen i rummet $E = \mathbb{R}$ behöver ... absolutkonvergent serie inte nödvändigtvis konvergera. ...jande sats behandlar denna fråga.

...ats 4.2 Ett normerat rum E är fullständigt, dvs. ett Banachru... om och endast om varje absolutkonvergent serie konvergerar i E.

Bevis: $\Rightarrow$) Vi antar att E är fullständigt. Om $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ är en absolutkonv... serie, så hör till varje $\varepsilon > 0$ ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$, ...tt så om $m > n \geq n_\varepsilon$ gäller

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon .$$

Alltså delsummorna konvergerar i egenskap av Cauchyföljd, och $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konver... mot en punkt i E.

$\Leftarrow$) Antag att varje absolutkonvergent serie konvergerar i E. Låt $(x_n)_n$ vara en godtycklig Cauchyföljd i E. Välj $n_1 \in \mathbb{N}$ så a... $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}$ då $n, m \geq n_1$. Därefter väljer vi $n_2 \in \mathbb{N}$ så att $n_2 >$ ... och $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{4}$ då $n, m \geq n_2$. Med induktion får vi indexena $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ för vilka $\|x_n - x_m\| < 1/2^k$ då $n, m \geq$ ... $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Emedan

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k},$$ så konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$

absolut, varför antagandet ger att

$$y = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{p\to\infty} (x_{n_{p+1}} - x_{n_1})$$ existerar.

Alltså $\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = y + x_{n_1}$. Följaktligen har Cauchyföljden $(x_n)_n$ en konvergent delföljd $(x_{n_k})_k$, varför följden $(x_n)_n$ konvergerar enligt Sats 39 (b). Därmed är E fullständigt.

Som ett följdresultat får vi att $\mathbb{R}$ är fullständigt.

<u>Sats 43.</u> $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ är fullständigt.

<u>Bevis:</u> Låt $(x_n)_n$ vara en följd i $\mathbb{R}$ med $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Emedan $0 \le |x_n| - x_n \le 2|x_n|$, konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| - x_n)$. Emedan $x_n = |x_n| - (|x_n| - x_n)$ konvergerar också serien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Alltså varje absolutkonvergent serie i $\mathbb{R}$ konvergerar. Sats 42 ger att $\mathbb{R}$ är fullständigt.

Exempel på fullständiga och icke-fullständiga rum

Exempel (a) $\mathbb{R}^n$ är ett fullständigt rum enligt Sats 41 och Sats 43. Speciellt gäller att $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ är fullständigt.

(b) En mgd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är fullständig om och endast om A är sluten (Sats 40). Till exempel $[0,1[$ är inte fullständigt men $[0,\infty[$ är det. Alltså ett metriskt rum som inte är fullständigt kan vara homeomorft med ett fullständigt metriskt rum (jfr. tidigare exempel).

Sats 44 Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och (Y,e) ett fullständigt metriskt rum. Följden $(f_n)_n$, där $f_n : X \to Y$ för alla $n \in \mathbb{N}$, konvergerar likformigt i X om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ hör ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ med

$$(*) \qquad e(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \text{ för alla } x \in X, \text{ då } n, m \geq n_\varepsilon.$$

Bevis: $\Rightarrow$) Om det finns $f : X \to Y$, så att $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ likformigt i X, så hör till varje $\varepsilon > 0$ ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ med
$$e(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2 \text{ då } n \geq n_\varepsilon \text{ och } x \in X.$$

Alltså $e(f_n(x), f_m(x)) \leq e(f_n(x), f(x)) + e(f(x), f_m(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, då $n, m \geq n_\varepsilon$ och $x \in X$.

$\Leftarrow$) Omvänt antag att ε-villkoret gäller. För varje $x \in X$ är följden $(f_n(x))_n$ en Cauchyföljd i Y. Då Y är fullständigt, så existerar då gränsvärde för alla $x \in X$. Sätt $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$, $x \in X$. Låt $\varepsilon > 0$ och välj $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $(*)$ gäller. Emedan metriken är kontinuerlig fås
$$e(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} e(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon \text{ för alla } x \in X, \text{ då } n \geq n_\varepsilon.$$

Alltså $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ likformigt i X.

<u>Sats 45</u> Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och (Y,e) ett fullständigt metriskt rum. Då gäller:

(a) $(B(X,Y),g)$ är fullständigt.

(b) Om X är ett metriskt rum, så är $(BC(X,Y),g)$ fullständigt.

<u>Bevis:</u> (a) Om $(f_n)_n$ är en Cauchyföljd i $(B(X,Y),g)$ så konvergerar den likformigt i X mot någon funktion $f: X \to Y$ enligt ovanstående sats. Vi bör visa att f är begränsad. Om $n \in \mathbb{N}$ är sådan att $e(f_n(x), f(x)) \leq 1$ för alla $x \in X$ och $a \in Y$, $r > 0$, är sådana att $f_n(X) \subseteq \overline{B}(a,r)$, så gäller

$$e(f(x),a) \leq e(f(x),f_n(x)) + e(f_n(x),a) \leq 1 + r \quad \text{för alla } x \in X.$$

Alltså $f \in B(X,Y)$.

(b) Följer ur Sats 38, Sats 40 (b) och (a)-fallet.

<u>Sats 46</u> Låt E vara ett normerat rum och F ett Banachrum. Då är $L(E,F)$ ett Banachrum med avseende på normen

$$T \longmapsto \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

<u>Bevis:</u> Enligt Sats 7 är $L(E,F)$ ett normerat rum. Vi visar att det är fullständigt. Låt $(T_n)_n \subseteq L(E,F)$ vara en Cauchyföljd. Om $x \in E$, så gäller

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|,$$

varav följer att $(T_n x)_n \subseteq F$ är en Cauchyföljd i F för varje $x \in E$.

Då F är fullständigt, så existerar $\lim_{n\to\infty} T_n x \in F$.

Sätt $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ för varje $x \in E$. Då får vi en avbildning $T: E \to F$.

Vi visar att $T \in L(E,F)$ och $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

För varje $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ och $x, y \in E$ gäller:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n x + \mu \lim_{n\to\infty} T_n y$$

$$= \lambda Tx + \mu Ty, \text{ dvs. } T \text{ är linear.}$$

Låt $\varepsilon > 0$. Välj $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ då $n, m \geq n_\varepsilon$.

Låt $x \in E$ med $\|x\| \leq 1$. Om $n \geq n_\varepsilon$, så följer då normen är kontinuerlig, att

$$\|T_n x - Tx\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon,$$

ty $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon$ då $m \geq n_\varepsilon$. Alltså

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|(T_n - T)x\| \leq \varepsilon \quad \text{då } n \geq n_\varepsilon.$$

Därmed får att $T = T_{n_\varepsilon} - (T_{n_\varepsilon} - T) \in L(E,F)$ och $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ då $n \geq n_\varepsilon$.

<u>Exempel</u> Låt E vara ett normerat rum över $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Eftersom $\mathbb{K}$ är fullständigt, är $L(E,\mathbb{K})$ ett Banachrum. Rummet $L(E,\mathbb{K})$ av alla kontinuerliga linjära funktionaler betecknas ofta E' och kallas <u>dualen</u> av E.

Sats 47 Det unitära rummet

$$l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \; : \; \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \}$$

är fullständigt, alltså ett Hilbertrum. Normen ges av $\|f\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2\right)^{1/2}$, där $f = (f(1), f(2), \ldots \quad) \in l^2$.

Bevis: Låt $(f_k)_k$ vara en Cauchyföljd i l^2. Om $n \in \mathbb{N}$, så är följden $(f_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$ en Cauchyföljd i $\mathbb{K}$, ty

$$|f_k(n) - f_p(n)| \leq \|f_k - f_p\|_2 .$$

Då $\mathbb{K}$ är fullständigt så existerar $\lim_{k \to \infty} f_k(n)$ som vi betecknar med $f(n)$. På detta sätt blir en funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definierad, dvs. $f = (f(1), \; f(2), \; f(3), \ldots \quad)$.

Vi visar nu att $f \in l^2$ och $\|f_k - f\|_2 \to 0$ då $k \to \infty$. Låt $\varepsilon > 0$. Välj $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $\|f_k - f_p\|_2 < \varepsilon$ då $k, p \geq k_\varepsilon$. För varje fixt $n_0 \in \mathbb{N}$ gäller

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} |f_k(n) - f_p(n)|^2 \right)^{1/2} \leq \| f_k - f_p \| < \varepsilon \quad \text{då } k, p \geq k_\varepsilon, \text{ varför}$$

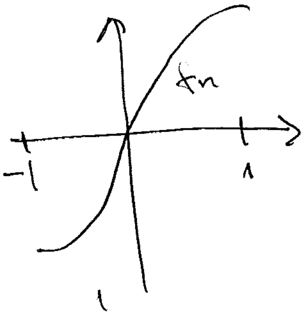
$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} |f_k(n) - f(n)|^2 \right)^{1/2} = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{n_0} |f_k(n) - f_p(n)|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \text{ då } k \geq k_\varepsilon .$$

Alltså $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_k(n) - f(n)|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon$ då $k \geq k_\varepsilon$, varför $f_{k_\varepsilon} - f \in l^2$ och därmed $f = f_{k_\varepsilon} - (f_{k_\varepsilon} - f) \in l^2$. Dessutom, $\|f_k - f\|_2 \leq \varepsilon$ då $k \geq k_\varepsilon$.

Exempel Ur Sats 45 (b) följer att $C([-1,1], \mathbb{R}) = BC([-1,1], \mathbb{R})$ är fullständigt, emedan $\mathbb{R}$ är fullständigt, normerat rum, dvs. Banachrum försett med normen $\|f\|_\infty = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

I detta exempel förser vi $C([-1,1],\mathbb{R})$ med normen $f \mapsto \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$. Vi visar att $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ <u>inte</u> är fullständigt.

Sätt $f_n(t) = t^{\frac{1}{2n+1}}$, $-1 \le t \le 1$



(Emedan $2n+1$ är udda är $f_n(t)$ definierad också då $t<0$).

Emedan
$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(t)-f_m(t)|\,dt = 2\int_0^1 |f_n(t)-f_m(t)|\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f_n \le f_m \\ \text{eller} \\ f_m \le f_n \\ \text{alltid i } [0,1]}}{=} 2\left| \Big/_0^1 \frac{2n+1}{2n+2}\, t^{\frac{2n+2}{2n+1}} - \Big/_0^1 \frac{2m+1}{2m+2}\, t^{\frac{2m+2}{2m+1}} \right|$$

$$= \frac{|4n-4m|}{(2m+2)(2n+2)} < \frac{|n-m|}{mn} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

följer det att $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ då $n, m > n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$.

Alltså $(f_n)_n$ är en Cauchyföljd med avseende på normen $\|\cdot\|_1$.

Men denna följd konvergerar inte i $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

<u>Antites</u>: Låt $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ med $\|f_n - f\|_1 \to 0$, då $n \to \infty$.

Då gäller
$$0 \le \int_0^1 |f(t)-1|\,dt \le \int_0^1 |f(t)-f_n(t)|\,dt + \int_0^1 |f_n(t)-1|\,dt$$
$$\le \|f-f_n\|_1 + \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) \to 0, \text{ då } n \to \infty, \text{ så}$$

$f(t) = 1$ då $t \in [0,1]$ emedan f är kontinuerlig. På motsvarande sätt fås att $f(t) = -1$ då $t \in [-1,0]$, varför $-1 = f(0) = 1$, vilket är en motsägelse.

<u>Exempel</u> Rummet $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ försett med den i ett tidigare exempel definierade metriken

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(n)-g(n)|}{1+|f(n)-g(n)|}$$ är fullständigt.

(Hemuppgift)

IV Kompakthet

Kompakt mängd och kompakt metriskt rum

Från Analys I kursen känner vi till den ytterst viktiga Heine-Borel sats som säger att varje öppen övertäckning av ett slutet intervall $[a,b]$, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$, innehåller en ändlig övertäckning. Denna egenskap hos intervallet $[a,b]$ kallas kompakthet.

I detta avsnitt skall vi undersöka kompakthet och dess tillämpningar i allmännare situationer.

<u>Definition</u> Låt $\emptyset \neq X$ vara en mängd, $A\subseteq X$ och $(U_i)_{i\in I}$ en familj av delmängder i X. Om $A\subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, så kallas familjen $(U_i)_{i\in I}$ en <u>övertäckning</u> av A. Om $J\subseteq I$ och $A\subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$, så sägs $(U_i)_{i\in J}$ vara en <u>delövertäckning</u> av övertäckningen $(U_i)_{i\in I}$.
Övertäckningen $(U_i)_{i\in I}$ är ändlig, om indexmängden I är ändlig.
Låt A vara en delmängd av ett metriskt rum X. En övertäckning $(U_i)_{i\in I}$ av A kallas en <u>öppen övertäckning</u> om varje U_i är öppen i X.

<u>Definition</u> Låt X vara ett metriskt rum och $A\subseteq X$.
Mängden A är <u>kompakt</u> om varje öppen övertäckning av A har en ändlig övertäckning.
Om X är en kompakt mängd, så är X ett kompakt metriskt rum.

Exempel (a) Ett slutet intervall $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, är kompakt enligt Heine-Borels sats. Vi visar detta senare.

(b) Låt X vara ett metriskt rum och $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$. Om följden $(x_n)_n$ konvergerar mot $x\in X$, så är mängden $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ kompakt.

Bevis: Låt $(U_i)_{i\in I}$ vara en öppen övertäckning av A. För något $i_0\in I$ gäller att $x\in U_{i_0}$. Emedan U_{i_0} är öppen, så finns $n_0\in\mathbb{N}$ med $x_n\in U_{i_0}$ för alla $n\geq n_0$. För varje $n=1,\dots,n_0-1$ väljer vi $i_n\in I$ med $x_n\in U_{i_n}$. Då gäller

$$A\subseteq\bigcup_{n=0}^{n_0-1}U_{i_n},$$

varför $(U_i)_{i\in I}$ innehåller en ändlig övertäckning.

(c) Mängden $A=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$ är inte kompakt i $\mathbb{R}$.

Bevis: Sätt $U_n=]\frac{1}{2n},\frac{2}{n}[$, $n\in\mathbb{N}$. Då är $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en öppen övertäckning av A, ty $\frac{1}{n}\in U_n$ för alla $n\in\mathbb{N}$, som inte innehåller någon ändlig övertäckning.

Sats 48 Följande villkor är ekvivalenta för ett metriskt rum X.

(i) X är kompakt.

(ii) Om $(F_i)_{i\in I}$ är en familj av slutna delmängder i X och $\bigcap_{i\in J}F_i\neq\emptyset$ för varje ändligt $J\subseteq I$, så är $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$.

Bevis: (i) ⇒ (ii): Låt X vara kompakt och $(F_i)_{i\in I}$ en sådan familj av slutna mängder att $\bigcap_{i\in J}F_i\neq\emptyset$ för alla ändliga $J\subseteq I$.

Om $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, så skulle $X = \bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i)$. Eftersom alla $X\setminus F_i$ är öppna, så finns ett ändligt $J \subseteq I$ med $X = \bigcup_{i\in J}(X\setminus F_i)$, dvs. $\emptyset = \bigcap_{i\in J} F_i$. Detta är en motsägelse. Alltså $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

(ii) ⇒ (i) visas på liknande sätt.

<u>Sats 49</u> Varje sluten delmängd A av ett kompakt metriskt rum X är kompakt.

<u>Bevis:</u> Låt $(U_i)_{i\in I}$ vara en öppen övertäckning av A, dvs.

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i .$$

Då gäller $X \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cup X\setminus A$, och $X\setminus A$ är öppen i X. Således finns det ett ändligt $J \subseteq I$ med

$$X \subseteq \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) \cup X\setminus A$$

eller

$$A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \text{, dvs. } A \text{ är kompakt.}$$

<u>Sats 50</u> Varje kompakt delmängd A i ett metriskt rum X är sluten.

<u>Bevis:</u> Vi visar att $X\setminus A$ är öppen. Låt $a \in X\setminus A$. Enligt beviset till sats 13 kan man till varje $x\in A$ välja öppna mängder U_x och V_x med $x \in U_x$, $a \in V_x$ och $U_x \cap V_x = \emptyset$.
Familjen $(U_x)_{x\in A}$ är en öppen övertäckning av A, så det existerar $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ med $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.
Mängden $V_a = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ är öppen, $a \in V_a$ och $V_a \subset X\setminus A$, ty $V_a \cap U_{x_i} = \emptyset$ för $i = 1, \dots, n$. Alltså $X\setminus A$ är öppen då a var godtyckligt vald i $X\setminus A$.

Lemma 51 Låt (X,d) vara ett metriskt rum.

(a) En delmängd A av X är begränsad om och endast om
$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x\in A, y\in A\} < \infty$.
Härvid kallas talet $\delta(A)$ för A:s diameter. En obegränsad mängd A har diametern $\delta(A) = \infty$.

(b) Följande tre villkor är ekvivalenta för mängden $E \subseteq X$, $\emptyset \neq E$.

(i) Till varje $\varepsilon > 0$ finns en ändlig övertäckning $(A_i)_{i=1}^n$ av E med $\delta(A_i) < \varepsilon$ för alla $i=1,\dots,n$.

(ii) Till varje $\varepsilon>0$ finns en ändlig mängd $\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq E$ med $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$.

(iii) Till varje $\varepsilon>0$ finns en ändlig mängd $\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq X$ med $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$.

Bevis: (a) $\Rightarrow$) Låt $A \subseteq \overline{B}(a,r)$ för något $a\in X$ och något $r>0$. Då gäller $d(x,y) \le d(x,a) + d(a,y) \le 2r$ för alla $x,y\in A$, varför $\delta(A) \le 2r$.

$\Leftarrow$) Låt $\delta = \delta(A) < \infty$. Låt $x_0 \in A$. Då är $A \subseteq \overline{B}(x_0,\delta)$.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii): Antag (i) och låt $\varepsilon>0$. Välj en ändlig övertäckning $(A_i)_{i=1}^n$ av E med $\delta(A_i) < \varepsilon$ för alla $i=1,\dots,n$.
Vi kan anta att $A_i \cap E \neq \emptyset$ för alla $i=1,\dots,n$.
Tag $x_i \in A_i \cap E$, $i=1,\dots,n$. Emedan $A_i \subseteq B(x_i,\varepsilon)$ för alla $i=1,\dots,n$, får att
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon).$$

(ii) ⇒ (iii) Klart

(iii) ⇒ (i) Från a)-fallet fås att $\delta(B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, och påståendet följer.

<u>Definition</u> Vi säger att en delmängd $\emptyset \neq E$ av ett metriskt rum (X, d) är <u>prekompakt</u> eller <u>totalt begränsad</u> om det uppfyller något av de ekvivalenta villkoren i Lemma 51 (b).

<u>Sats 52</u> Låt (X, d) vara ett metriskt rum.

(a) Unionen av ett ändligt antal begränsade mängder är begränsad.

(b) Varje prekompakt mängd $E \subseteq X$ är begränsad.

(c) Om $E \subseteq X$ är prekompakt och $F \subseteq E$, så är F prekompakt.

<u>Bevis:</u> (a) Låt $E_i \subseteq X$, $i = 1, \dots, n$ vara begränsade mängder, dvs. låt $E_i \subseteq \overline{B}(a_i, r_i)$ för $a_i \in X$, $r_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Sätt $r = \max\{r_i + d(a_i, a_1) : 1 \leq i \leq n\}$. Då gäller

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subseteq \overline{B}(a_1, r),$$

ty om $x \in E_i$ för något i, så gäller

$$d(x, a_1) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_1) \leq r_i + d(a_i, a_1) \leq r.$$

Alltså: $x \in \overline{B}(a_1, r)$.

(b) Följer av (a).

(c) Följer av Lemma 51 (ii).

<u>Exempel</u> (a) Varje kompakt delmängd i ett metriskt rum (X, d) är prekompakt.

Bevis: Låt $E \subseteq X$ vara kompakt och $\varepsilon > 0$. Mängderna $B(x,\varepsilon)$, $x \in E$, utgör en öppen övertäckning av E, varför det existerar $x_1, \dots, x_n \in E$ med $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$.

(b) Det öppna intervallet $]0,1[\subseteq \mathbb{R}$ är prekompakt men inte kompakt.

Sats 53 Låt (X,d) vara ett metriskt rum. Följande fyra villkor är ekvivalenta för $E \subseteq X$.

(i) E är kompakt.

(ii) Varje oändlig delmängd av E innehåller en hopningspunkt som tillhör E.

(iii) Varje följd i E har en delföljd som konvergerar mot en punkt i E.

(iv) E är prekompakt och fullständig.

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Antag (i) och låt D vara en oändlig delmängd av E. Om ingen $x \in E$ är en hopningspunkt till D, så gäller: Till varje $x \in E$ finns ett $\varepsilon_x > 0$ med

$$B(x,\varepsilon_x) \cap D \subseteq \{x\}.$$

Enligt (i) kan vi välja en ändlig mängd $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E$ med $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon_{x_i})$, varför

$$D = D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon_{x_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i,\varepsilon_{x_i}) \cap D\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Men detta är omöjligt då D är oändlig.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Antag (ii) och låt $(x_n)_n$ vara en följd i E.
Om mängden $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ är ändlig, så finns det en delföljd $(x_{n_k})_k$ med $x_{n_k} = x_{n_0}$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Alltså konvergerar (x_{n_k}) mot x_{n_0}. Annars har mängden $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ enligt (ii) en hopningspunkt $x \in E$. För varje $k \in \mathbb{N}$ gäller att $B(x, 1/k)$ innehåller oändligt många av följdens punkter enligt Sats 14 (iii). Således kan vi induktivt välja index n_k, $k \in \mathbb{N}$, så att $n_1 < n_2 < \ldots\ldots$ och $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$.
Då gäller

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}, \text{ så } x_{n_k} \to x \text{ då } k \to \infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Antag (iii). Om E inte är prekompakt, så finns ett $\varepsilon > 0$ så att ingen ändlig samling av ε-öppna bollar täcker E. Genom att starta från ett godtyckligt $x_1 \in E$ kan man då genom induktion välja en följd $(x_n)_n$ av punkter i E sådana att

$$x_{n+1} \in E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)\right).$$

Då är $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ för alla $n, m \in \mathbb{N}$ med $n \neq m$.
Detta betyder att följden $(x_n)_n$ <u>inte</u> kan ha någon konvergent delföljd. Alltså är E prekompakt.
Låt nu $(y_n)_n$ vara en Cauchyföljd i E. Enligt (iii) har den en delföljd som konvergerar mot en punkt $y \in E$. Men då gäller enligt Sats 39 (b) att $\lim_{n \to \infty} y_n = y$. Således är E fullständig.
(iv) $\Rightarrow$ (i). Antag (iv). Låt $(U_i)_{i \in I}$ vara en godtycklig öppen övertäckning av E. Antag ~~att~~ för <u>ingen</u> ändlig delmängd $J \subseteq I$, $(U_i)_{i \in J}$ är en övertäckning av E.

Emedan E är prekompakt finns det en ändlig mängd $\{x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\} \subseteq E$ så att

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_1} B(x_k^{(1)}, 1).$$

För något k, $1 \le k \le n_1$, har familjen $(U_i)_{i\in I}$ ingen ändlig delövertäckning av mängden

$$E_1 = E \cap B(x_k^{(1)}, 1),$$

ty annars skulle vi också få en ändlig delövertäckning av mängden

$$E = \bigcup_{k=1}^{n_1} (E \cap B(x_k^{(1)}, 1)).$$

Emedan E_1 är prekompakt (Sats 52 (c)) finns en ändlig mängd $\{x_1^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)}\} \subseteq E_1$ med

$$E_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_2} B(x_k^{(2)}, 1/2)$$

Igen för något k, $1 \le k \le n_k$, har familjen $(U_i)_{i\in I}$ ingen ändlig delövertäckning av mängden

$$E_2 = E_1 \cap B(x_k^{(2)}, \tfrac{1}{2}).$$

På detta sätt får vi genom induktion en följd av mängder $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq$ som ingen kan täckas med ett ändligt antal av mängderna U_i, $i \in I$, och för vilka

(*) $$d(x,y) \le d(x, x_k^{(n)}) + d(x_k^{(n)}, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \text{ då } x,y \in E_n.$$

Vi väljer en punkt $x_n \in E_n$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Emedan $x_m \in E_n$ för alla $m \ge n$, så är följden $(x_n)_n$ enligt (*) en Cauchyföljd.

Emedan E är fullständig, så existerar $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in E$.
Då $E \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, så $x \in U_{i_0}$ för något $i_0 \in I$. Emedan U_{i_0} är öppen, så är $B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}$ för något $\delta > 0$. Välj ett $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $d(x_n, x) < \frac{1}{2}\delta$ för $n \geq n_0$.
Välj sedan $p \geq n_0$ så att $\frac{2}{p} < \delta/2$. Då är

$$E_p \subseteq B(x,\delta) \subseteq U_{i_0},$$

ty om $y \in E_p$ så fås $d(x,y) \leq d(y, x_p) + d(x_p, x) < \frac{2}{p} + \delta/2 < \delta/2 + \delta/2 = \delta$. Alltså E_p kan övertäckas med endast en mängd U_{i_0}, vilket strider mot konstruktionen. Alltså (i) gäller.

<u>Sats 54</u> Låt $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ vara metriska rum och $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ försedd med metriken d, $d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k)^2\right)^{1/2}$, där $x = (x_1, \ldots, x_n)$ och $y = (y_1, \ldots, y_n)$

(a) Om varje X_k, $k = 1, \ldots, n$, är prekompakt, så är X prekompakt.

(b) Om varje X_k, $k = 1, \ldots, n$, är kompakt, så är X kompakt.

<u>Bevis:</u> (a) Låt $\varepsilon > 0$. För varje $k = 1, \ldots, n$ kan X_k täckas med ändligt många mängder $A_1^{(k)}, \ldots, A_{m_k}^{(k)}$ vilkas diametrar $\delta(A_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$, $i = 1, \ldots, m_k$.
Unionen av den ändliga samlingen

$$\{A_{i_1}^{(1)} \times A_{i_2}^{(2)} \times \ldots \times A_{i_n}^{(n)} : 1 \leq i_k \leq m_k \ \forall k = 1, \ldots, n\}$$ är X.

Om $x = (x_1, \ldots, x_n)$ och $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tillhör $A_{i_1}^{(1)} \times \ldots \times A_{i_n}^{(n)}$, så gäller

$$d(x,y) \overset{\text{Sats 29}}{\leq} \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} d_j(x_j, y_j) \leq \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon}{2},$$

varför $\delta(A^{(1)}_{i_1} \times \ldots \times A^{(n)}_{i_n}) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ alltid då $1 \leq i_k \leq m_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Således är X prekompakt.

(b) Antag att varje X_k är kompakt. Då är varje X_k fullständig enligt Sats 53, och vidare ger Sats 41 att X är fullständig. Dessutom är varje X_k prekompakt enligt Sats 53, så a)-fallet ger att X är prekompakt. Således ger Sats 53 att X är kompakt.

<u>Sats 55</u> Mängden $E \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt om och endast om E är sluten och begränsad.

<u>Bevis:</u> $\Rightarrow$) Om E är kompakt, så är E prekompakt (Sats 53) och därmed begränsad (Sats 52(b)). Enligt Sats 53 är E också fullständig och därmed sluten (Sats 40(a)).

$\Leftarrow$) Antag att $E \subseteq \mathbb{R}^n$ är sluten och begränsad. Då finns det slutna intervall $[a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R}, \ldots, [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ med

$$E \subseteq [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Klart att varje $[a_k, b_k]$ är prekompakt. Då $\mathbb{R}$ är fullständigt följer att varje $[a_k, b_k]$ är fullständigt. Därmed är varje $[a_k, b_k]$ kompakt i $\mathbb{R}$, så $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ är kompakt i $\mathbb{R}^n$ enligt Sats 54, varav följer att E som sluten delmängd är kompakt.

<u>Anmärkning</u> I ett godtyckligt metriskt rum är varje kompakt delmängd sluten och begränsad. Däremot behöver en sluten och begränsad mängd i ett oändligt dimensionellt Banachrum <u>inte</u> vara kompakt.

<u>Exempel</u> Betrakta mängden $A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq 2\} = [0,2] \cap \mathbb{Q}$, som <u>inte</u> är kompakt i $\mathbb{R}$. Låt $(q_n)_n$ vara en följd i A med $q_n \longrightarrow \sqrt{2} \notin A$. Då konvergerar ingen delföljd av $(q_n)_n$ mot någon punkt i A. Sats 53 ger att A inte är kompakt i $\mathbb{R}$.

Kompakthet och kontinuitet

<u>Sats 56</u> Låt X, Y vara metriska rum och $f: X \to Y$ en kontinuerlig avbildning. Låt $A \subseteq X$ vara kompakt. Då är också dess bild
$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$ kompakt i Y.

<u>Bevis:</u> Låt $(U_i)_{i \in I}$ vara en godtycklig öppen övertäckning av $f(A)$. Då f är kontinuerlig, så är varje $f^{-1}(U_i)$, $i \in I$, öppen (Sats 20).
Vidare gäller att $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$.
Då A är kompakt, så finns en ändlig indexmängd $J \subseteq I$ med
$A \subseteq \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$, varför $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

Alltså $f(A)$ är kompakt i Y.

<u>Sats 57</u> Låt X, Y vara metriska rum och $f: X \to Y$ en kontinuerlig bijektion. Om X är kompakt, så är f en homeomorfism, dvs. $f^{-1}: Y \to X$ är kontinuerlig.

<u>Bevis:</u> Enligt Sats 20 räcker det att visa att $f(F)$ är sluten i Y för varje sluten mängd $F \subseteq X$.
Låt alltså $F \subseteq X$ vara sluten. Enligt Sats 49 är F kompakt, så $f(F)$ är kompakt enligt Sats 56. Slutligen ger Sats 50 att $f(F)$ är sluten.

<u>Sats 58</u> Låt $X \neq \emptyset$ vara ett kompakt metriskt rum och $f: X \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då finns det $x_0 \in X$ och $y_0 \in X$ med $f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$ och $f(y_0) = \inf_{x \in X} f(x)$. Speciellt gäller att f är begränsad.

Bevis: Enligt Sats 56 är $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt och därmed sluten och begränsad. Av detta följer att supremum och infimum av $f(X)$ är reella tal och tillhör $f(X)$. Antag t.ex. att $M = \sup_{x \in X} f(x) \notin f(X)$. Då $\mathbb{R} \setminus f(X)$ är öppen och $M \in \mathbb{R} \setminus f(X)$, så finns ett $\varepsilon > 0$ med $]M-\varepsilon, M+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus f(X)$. Detta strider mot ε-kriteriet för supremum, dvs. att $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in X$ med $M - \varepsilon < f(x_0) \leq M$.

Exempel Ur Sats 58 följer en känd sats enligt vilken en kontinuerlig funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ antar sitt största och minsta värden i $[a,b]$.

Exempel Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $\phi \neq B \subseteq X$. Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,B) = \inf_{y \in B} d(x,y)$ är kontinuerlig enligt Sats 24.

Låt $\phi \neq A \subseteq X$ vara kompakt. Enligt Sats 58 följer att för något $x_0 \in A$ gäller att $\inf_{x \in A} d(x,B) = d(x_0, B)$.

Å andra sidan,

$$\inf_{x \in A} d(x,B) = \inf_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x,y) \right) = \inf \{ d(x,y) : x \in A, y \in B \}$$
$$= d(A,B),$$

varför $d(x_0, B) = d(A,B)$. Om B är sluten, så är $d(x,B) > 0$ för alla $x \in X \setminus B$, ty om $x \in X \setminus B$ $\exists r_x > 0$ med $B(x, r_x) \subseteq X \setminus B$, varför $d(x,y) \geq r_x$ $\forall y \in B$. Speciellt, om $A \neq \phi$ är kompakt och $\phi \neq B$ är sluten samt $A \cap B = \phi$, så är $d(A,B) = d(x_0, B) > 0$.

Sats 59 Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum och $f: X \to Y$ en kontinuerlig avbildning. Om X är kompakt, så är f likformigt kontinuerlig.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Till varje $x \in X$ finns ett $\delta_x > 0$ så att $e(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$ då $d(x,y) < \delta_x$.

Emedan X är kompakt, så finns ett ändligt antal $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ med $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$. Sätt $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$.

Tag godtyckliga punkter $x, y \in X$ med $d(x,y) < \delta$. För något $i = 1, \dots, n$ gäller att $x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$ och emedan

$$d(x_i, y) \leq d(x_i, x) + d(x,y) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \frac{1}{2}\delta_{x_i} + \frac{1}{2}\delta_{x_i} = \delta_{x_i},$$

fås att $e(f(x), f(y)) \leq e(f(x), f(x_i)) + e(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Alltså f är likformigt kontinuerlig.

Dinis sats

Sats 36 ger att gränsfunktionen av en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt är kontinuerlig. Omvändningen till denna sats gäller också med ett antal tilläggsantaganden. Denna omvändning kallas Dinis sats.

Sats 60 (Dini) Låt X vara ett kompakt metriskt rum och (Y,e) ett metriskt rum. För varje $n \in \mathbb{N}$ är $f_n : X \to Y$ en kontinuerlig funktion och $f: X \to Y$ är en kontinuerlig funktion sådan att

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X. \quad (*)$$

Om $e(f_{n+1}(x), f(x)) \leq e(f_n(x), f(x)) \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X, \quad (**)$

så konvergerar följden (f_n) likformigt i X mot f.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Sätt

$$G_n = \{x \in X : e(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Emedan f_n och f är kontinuerliga, så är avbildningen $\alpha : X \to Y \times Y$, $x \mapsto (f_n(x), f(x))$, kontinuerlig enligt Sats 31 (b). Vidare är $e : Y \times Y \to \mathbb{R}$ kontinuerlig, vilket inses lätt. G_n är således öppen i egenskap av inversa bilden av den öppna mängden $]-\infty, \varepsilon[$ med en kontinuerlig avbildning. Ur (**) följer att

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots\ldots$$

och enligt (*) följer att $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = X$. Emedan X är kompakt, existerar $n_0 \in \mathbb{N}$ med $X = \bigcup_{n=1}^{n_0} G_n = G_{n_0}$, varför $X = G_n$ för alla $n \geq n_0$. Alltså

$$e(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \text{ för all } x \in X, \text{ då } n \geq n_0.$$

Därmed har vi visat att $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ likformigt i X.

Anmärkning Om vi inte antar att X är kompakt, så gäller inte satsen. Motexempel: $X = [0,1[$, $f_n(x) = x^n$ och $f(x) = 0$, $|x|^{n+1} \leq |x|^n$ $\forall n \, \forall x \in X$. Emedan $\sup_{0 \leq x < 1} |x^n - 0| = 1$, är konvergen inte likformigt i X.

Följdresultat 61 Det existerar en sådan följd av reella polynom p_n, att $p_n(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, och

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = \sqrt{x} \text{ likformigt i } [0,1].$$

Bevis: Vi definierar följden $(p_n)_n$ induktivt genom att sätta

$$(*)\quad p_1(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ och}$$
$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \tfrac{1}{2}\left(x - p_n(x)^2\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Vi visar med induktion att $p_{n+1}(x) \geq p_n(x) \geq 0$ och $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Klart att $p_1(x) \leq \sqrt{x}$ och $0 \leq p_1(x) \leq p_2(x)$, $x \in [0,1]$.
Antag att $p_n(x) \leq \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, och $p_{n+1}(x) \geq p_n(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$.
Nu gäller

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \sqrt{x} - p_n(x) - \tfrac{1}{2}\left(x - p_n(x)^2\right)$$
$$= \underbrace{\left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)}_{\geq 0}\left(1 - \tfrac{1}{2}\underbrace{\left(\sqrt{x} + p_n(x)\right)}_{\leq 2\sqrt{x} \leq 2}\right) \geq 0, \quad x \in [0,1].$$

Alltså $0 \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. Vidare gäller, emedan $p_{n+1}(x)^2 \leq x$, $x \in [0,1]$, att

$$p_{n+2}(x) - p_{n+1}(x) = \tfrac{1}{2}\left(x - p_{n+1}(x)^2\right) \geq 0,$$

varför $p_{n+2}(x) \geq p_{n+1}(x)$, $x \in [0,1]$.

Alltså för varje $x \in [0,1]$ är följden $(p_n(x))_n$ växande och begränsad.
Således existerar $h(x) := \lim_{n\to\infty} p_n(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$.
Ur $(*)$ följer att $h(x) = h(x) + \tfrac{1}{2}\left(x - h(x)^2\right)$ eller $h(x) = \sqrt{x}$, då $h(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$.
Emedan

$$|p_{n+1}(x) - \sqrt{x}| = \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} - p_n(x) = |p_n(x) - \sqrt{x}| \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1]$$

ger Dinis sats att $p_n(x) \longrightarrow \sqrt{x}$ likformigt i $[0,1]$, då $n \to \infty$.

Banachs fixpunktssats med tillämpningar

<u>Definition</u> Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $f: X \to X$ en avbildning. Om det existerar en konstant $k \in \mathbb{R}$ med $0 \le k < 1$ och $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y)$ för alla $x, y \in X$, så sägs f vara en <u>kontraktion</u>.

<u>Sats 62</u> En kontraktion f är likformigt kontinuerlig.

<u>Bevis:</u> Vi kan anta att $k \neq 0$. Låt $\varepsilon > 0$. Då är

$$d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y) < \varepsilon, \text{ då } d(x,y) < \delta = \varepsilon/k.$$

<u>Sats 63</u> (Banachs fixpunktssats) Låt (X,d) vara ett fullständigt metriskt rum och $f: X \to X$ en kontraktion. Då existerar det en och endast en punkt $x \in X$ med $f(x) = x$, dvs. x är en <u>fixpunkt</u> för f.

<u>Bevis:</u> Välj $x_0 \in X$ godtyckligt och definiera induktivt en följd $(x_n)_n$ genom att sätta

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in 0, 1, 2, \ldots$$

Om k, $0 \le k < 1$, är sådan att $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y)$ $\forall x, y \in X$, så gäller för alla $m \in \mathbb{N}$ att

$$(*) \qquad d(x_m, x_{m+1}) \le k^m\, d(x_0, x_1).$$

Detta visar vi genom induktion. Formeln $(*)$ gäller för $m = 1$. Om $(*)$ gäller för $m \in \mathbb{N}$, fås

$$d(x_{m+1}, x_{m+2}) = d(f(x_m), f(x_{m+1})) \le k\, d(x_m, x_{m+1}) \le k^{m+1}\, d(x_0, x_1).$$

Vidare, för alla $n,p \in \mathbb{N}$ gäller:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i = k^n d(x_0,x_1) \sum_{j=0}^{p-1} k^j$$

$$\leq k^n d(x_0,x_1) \frac{1}{1-k} = d(x_0,x_1) \frac{k^n}{1-k}.$$

Låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $\frac{k^n}{k-1} d(x_0,x_1) < \varepsilon$ för $n \geq n_\varepsilon$,

varför $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ då $n \geq n_\varepsilon$ och $p \in \mathbb{N}$.

Alltså $(x_n)_n$ är en Cauchyföljd i X som konvergerar då X är fullständigt.

Sätt $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Då f är kontinuerlig,

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Om också $y \in X$ är en fixpunkt för f, så gäller att

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y), \text{ varför}$$

$0 \leq \underbrace{(1-k)}_{>0} d(x,y) \leq 0$. Alltså $d(x,y) = 0$, dvs. $x = y$.

Som en tillämpning på fixpunktsatsen bevisar vi existensen av lösning till en differentialekvation samt Picards sats rörande entydigheten av lösningen.

Betrakta differentialekvationen

$$(**) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , x,y \in \mathbb{R},$$

med begynnelsevillkoret $y_0 = y(x_0)$.

Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller följande villkor

(A) f är kontinuerlig i ett slutet och begränsat område T i $\mathbb{R}^2$ med $(x_0, y_0) \in T^0$, dvs. i det inre av T.

(B) Det finns en konstant $M > 0$ sådan att i T gäller
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|.$$

Villkoret (B) kallas <u>Lipschitz villkor</u>.

Antag att $y = y(x)$ är en lösning till (**) med begynnelsevillkoret $y_0 = y(x_0)$. Då gäller
$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

varför
$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

Härav följer (+) $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$.

Omvänt, om $y = y(x)$ är en lösning till integralekvationen (+), då ger derivering att $y(x)$ satisfierar $y'(x) = f(x, y(x))$ samt $y_0 = y(x_0)$.

Alltså i stället för att söka en lösning till (**) kan man lösa (+).
Vi visar nu att (+) har en lösning.

Då f är kontinuerlig och T är slutet och begränsad i $\mathbb{R}^2$, (86)
dvs. kompakt i $\mathbb{R}^2$, så finns det enligt Sats 56 en konstant
$C>0$, så att

$$(**) \qquad |f(x,y)| \le C \qquad \forall x,y \in T.$$

Välj nu talet $a>0$, så att följande två villkor är uppfyllda:

$$(\alpha) \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| \le a, \ |y-y_0| \le C\cdot a\} \subseteq T,$$

$$(\beta) \qquad Ma < 1.$$

Detta är möjligt då $(x_0,y_0) \in T^\circ$.

Sätt $D = \{g : [x_0-a, x_0+a] \to \mathbb{R} : g \text{ kontinuerlig}, \ |g(x)-y_0| \le C a\}$.
Sedan definierar vi en metrik d på D genom

$$d(g_1,g_2) = \max_{|x-x_0|\le a} |g_1(x) - g_2(x)|$$

Då blir D en delmängd av $C([x_0-a, x_0+a], \mathbb{R})$ försedd med den naturliga metriken av $C([x_0-a,x_0+a],\mathbb{R})$. Enligt Sats 45 (b) är $(C([x_0-a,x_0+a],\mathbb{R}),d)$ ett fullständigt rum.

Låt $(g_n)_n \subseteq D$ vara en Cauchyföljd. Då gäller att $(g_n)_n$ konvergerar mot en funktion $g \in C([x_0-a,x_0+a],\mathbb{R})$ med avseende på metriken d.

För varje $x \in [x_0-a,x_0+a]$ gäller $|g_n(x)-y_0| \le C\cdot a$ för alla $n \in \mathbb{N}$, varför

$$\max_{|x-x_0|\le a} |g(x)-y_0| \le \max_{|x-x_0|\le a} |g(x)-g_n(x)| + \max_{|x-x_0|\le a} |g_n(x)-y_0|$$

och $\max_{|x-x_0|\le a} |g(x)-y_0| \le Ca$ då vi låter $n\to\infty$. Alltså $g \in D$, därmed fullständigt.

Vi definierar nu en avbildning $A: D \to C([x_0-a, x_0+a], \mathbb{R})$ genom

$$A(g)x = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\,dt \quad , \ |x-x_0| \leq a, \ g \in D.$$

Klart att $A(g) \in C([x_0-a, x_0+a], \mathbb{R})$. Vidare gäller enligt (++) att

$$|A(g)x - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t))|\,|dt| \leq C\int_{x_0}^{x} |dt| = C|x-x_0|$$

$$\leq C \cdot a.$$

Alltså $A(g) \in D$ och $A: D \to D$. Nu visar vi att A är en kontraktion. Med stöd av (B) fås

$$|A(g_1)x - A(g_2)x| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, g_1(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, g_2(t))\,dt\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))|\,|dt| \overset{(B)}{\leq} M\int_{x_0}^{x} |g_1(t) - g_2(t)|\,|dt|$$

$$\leq M \max_{|t-x_0|\leq a} |g_1(t) - g_2(t)| \left|\int_{x_0}^{x} |dt|\right| \leq M\, d(g_1, g_2)\, a.$$

Denna olikhet gäller för alla $x \in [x_0-a, x_0+a]$, varför

$$d(A(g_1), A(g_2)) \leq M \cdot a\, d(g_1, g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in D.$$

Således är A en kontraktion då $M \cdot a < 1$ enligt (β). Sats 63 kan tillämpas och vi får att det existerar en entydig lösning $g \in D$ med $A(g) = g$.

Därmed har vi bevisat

<u>Sats 64</u> (Picard) Om funktionen f uppfyller villkoren (A) och (B) så kan man kring punkten (x_0, y_0) avgränsa en rektangel G i vilken differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ med begynnelsevillkoret $y_0 = y(x_0)$ har en och endast en lösning.

<u>Sats 65</u> Antag att en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är deriverbar i hela $\mathbb{R}$ och att det existerar en konstant $k\in\mathbb{R}$, $0\le k<1$, sådan att

$$|f'(x)|\le k \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Då har ekvationen $f(x)=x$ en och endast en rot.

<u>Bevis:</u> Klart att f är kontinuerlig. För godt. $x,y\in\mathbb{R}$ fås enligt medelvärdessatsen

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\,|x-y|\le k\,|x-y|$$

där $\xi\in\,]x,y[$ eller $\xi\in\,]y,x[$. Alltså f är en kontraktion, då $\mathbb{R}$ är försedd med den naturliga metriken $d(x,y)=|x-y|$. Eftersom $(\mathbb{R},d)$ är fullständigt kan Sats 64 tillämpas och vi får att det finns ett entydigt $x\in\mathbb{R}$ med $f(x)=x$.

Arzela-Ascolis sats

Ett av de viktigaste metriska rummen i analys är funktionsrummet $C([a,b],\mathbb{R})$. För delmängder i $C([a,b],\mathbb{R})$ skall vi nu bevisa ett kompakthetskriterium.

Definition Låt (X,d) vara ett metriskt rum. En familj $\mathcal{F}$ av funktioner $f: X \to \mathbb{R}$ kallas <u>ekvikontinuerlig i punkten $x_0 \in X$</u>, om till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ (beror av x_0 och ε) med $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ för alla $x \in X$ med $d(x,x_0) < \delta$ och alla $f \in \mathcal{F}$.
Familjen $\mathcal{F}$ kallas <u>ekvikontinuerlig</u>, om $\mathcal{F}$ är ekvikontinuerlig i alla punkter i X.

Anmärkning Om $\mathcal{F} = \{f\}$, så betyder ekvikontinuitet att f är kontinuerlig.

Låt (X,d) vara ett <u>kompakt</u> metriskt rum. Då är $C(X,\mathbb{R})$ ett Banachrum med normen $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

Sats 66 (Arzela–Ascoli) En mängd $\mathcal{F} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ är prekompakt i $C(X,\mathbb{R})$ om och endast om $\mathcal{F}$ är begränsad i $C(X,\mathbb{R})$ och ekvikontinuerlig.

Bevis: 1) Antag att $\mathcal{F}$ är prekompakt i $C(X,\mathbb{R})$. Enligt Sats 52(b) är $\mathcal{F}$ begränsad i $C(X,\mathbb{R})$.
Om $\varepsilon > 0$, så finns $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ med

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3\}$$

För varje $i=1,\dots,n$ och varje $x_0 \in X$ finns ett $\delta_i > 0$ så att $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3$ för alla $x \in X$ med $d(x,x_0) < \delta_i$.

Sätt $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$. Då gäller

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3 \text{ för alla } x \in X \text{ med } d(x,x_0) < \delta,$$

och alla $i=1,\dots,n$.

Tag godtyckligt $f \in \mathcal{F}$ och låt f_i vara sådan att $\|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3$.
För alla $x \in X$ med $d(x,x_0) < \delta$ gäller

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Därmed har vi visat att $\mathcal{F}$ är ekvikontinuerlig.

2) Antag att $\mathcal{F}$ är ekvikontinuerlig och begränsad. Då $\mathcal{F}$ är begränsad i $C(X,\mathbb{R})$ kan vi anta att $\mathcal{F} \subseteq \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.
Låt $\varepsilon > 0$. Till varje $x \in X$ finns ett $\delta_x > 0$ så att

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 \text{ för all } y \in X \text{ med } d(x,y) < \delta_x \text{ och alla } f \in \mathcal{F}.$$

Då X är kompakt, så finns $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ så att

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in X : d(x_i, x) < \delta_{x_i}\}.$$

Mängden $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha| \leq 1\}$ är kompakt i $\mathbb{R}$, så det finns $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq A$ med

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \{\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha - \alpha_j| < \varepsilon/6\}.$$

Det finns m^n <u>olika</u> funktioner från den ändliga mängden $\{x_1, \dots, x_n\}$ till den ändliga mängden $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.
Låt Φ vara mängden av alla dessa funktioner, dvs.

$$\Phi = \{\phi : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}\}.$$

För varje $\phi \in \Phi$ betecknar vi

$$\tilde{\mathcal{F}}_\phi = \{ f \in \tilde{\mathcal{F}} : |f(x_i) - \phi(x_i)| < \varepsilon/6 \quad \forall x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}\}.$$

Då är $\tilde{\mathcal{F}}_\phi \neq \emptyset$, ty för varje $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ gäller att $f(x) \in A$ för alla $x \in X$. Alltså för varje $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ finns ett $\phi \in \Phi$ med $f \in \tilde{\mathcal{F}}_\phi$, varför

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\phi \in \Phi} \tilde{\mathcal{F}}_\phi .$$

Låt nu $f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_\phi$ och $x \in X$. Då gäller att $d(x_{i_0}, x) < \delta_{x_{i_0}}$ för något i_0. Alltså

$$|f(x) - f(x_{i_0})| < \varepsilon/3 \quad \text{och} \quad |g(x) - g(x_{i_0})| < \varepsilon/3.$$

Eftersom $f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_\phi$, följer att $|f(x_{i_0}) - g(x_{i_0})| \leq |f(x_{i_0}) - \phi(x_{i_0})| + |\phi(x_{i_0}) - g(x_{i_0})| < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/3$. Därför gäller

$$|f(x) - g(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_{i_0})|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f(x_{i_0}) - g(x_{i_0})|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|g(x_{i_0}) - g(x)|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon.$$

Då $x \in X$ var godtyckligt vald, får att

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Alltså för varje $\varepsilon > 0$ finns det en ändlig mängd Φ med

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\phi \in \Phi} \{ f \in C(X, \mathbb{R}) : \|f - f_\phi\|_\infty < \varepsilon\},$$

där $f_\phi = g$ är något element i $\tilde{\mathcal{F}}_\phi$.

Därför är $\tilde{\mathcal{F}}$ prekompakt i $C(X, \mathbb{R})$.

Följresultat 67 Om X är ett kompakt metriskt rum och $\mathcal{F} \subseteq C(X,\mathbb{R})$, så är $\mathcal{F}$ kompakt i $C(X,\mathbb{R})$ om och endast om $\mathcal{F}$ är sluten, begränsad i $C(X)$ och ekvikontinuerlig.

Bevis: 1) Antag att $\mathcal{F}$ är kompakt i $C(X,\mathbb{R})$. Då är $\mathcal{F}$ prekompakt i $C(X,\mathbb{R})$ och dessutom sluten i $C(X,\mathbb{R})$ (Sats 50), samt begränsad i $C(X,\mathbb{R})$ och ekvikontinuerlig (Sats 66).

2) Antag $\mathcal{F}$ är sluten och begränsad i $C(X,\mathbb{R})$ samt ekvikontinuerlig. Då är $\mathcal{F}$ prekompakt i $C(X,\mathbb{R})$ (Sats 66) och fullständigt i $C(X,\mathbb{R})$ (Sats 40(b)). Således ger Sats 53 att $\mathcal{F}$ är kompakt i $C(X,\mathbb{R})$.

V Ortogonala utvecklingar

Ortogonala komplementet och den närmaste punkten till en konvex mängd

Vektorerna $x, y \in H$ i ett unitärt rum H kallas <u>ortogonala</u> om $\langle x, y \rangle = 0$.
Vektormängden $S \subseteq H$ är <u>ortogonal</u>, om

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in S,\ x \neq y.$$

En ortogonal vektormängd S kallas <u>ortonormal</u>, om $\|x\| = 1 \quad \forall x \in S$.

Om S är en ortogonal vektormängd, som inte innehåller nollvektorn, så är S linjärt oberoende.

<u>Lösning</u>: Låt $x_1, \ldots, x_p \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ och

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0.$$

Då gäller för varje $k = 1, \ldots, p$, att

$$\langle \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p, x_k \rangle = \langle 0, x_k \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1 \langle x_1, x_k \rangle + \ldots + \lambda_k \langle x_k, x_k \rangle + \ldots + \lambda_p \langle x_p, x_k \rangle = 0,$$

dvs.

$$\lambda_k \underbrace{\|x_k\|^2}_{\neq 0} = 0 \text{ eller } \lambda_k = 0.$$

<u>Definition</u> Låt $S \subseteq H$ vara en mängd och H ett Hilbertrum. Mängden

$$S^\perp := \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H\}$$

kallas <u>ortogonala komplementet</u> av S.

Sats 68 Låt $S \subseteq H$ vara en delmängd av Hilbertrummet H. Mängden $S^\perp$ är ett slutet linjärt underrum i H.

Bevis: Klart att $0 \in S^\perp$. Låt $x_1, x_2 \in S^\perp$ och $\alpha \in K$.
För varje $y \in S$ gäller

$$\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0, \text{ varför } \alpha x_1 + x_2 \in S^\perp.$$

Alltså $S^\perp$ är ett underrum i H.

Vi visar nu att $S^\perp \subseteq H$ är slutet.

Tag $x \in \overline{S^\perp}$. Då finns en följd $(x_n)_n \subseteq S^\perp$ sådan ~~att~~ $x_n \to x$, då $n \to \infty$. För varje $n \in \mathbb{N}$ gäller: $\langle x_n, y\rangle = 0 \quad \forall y \in S$.
För godtyckligt $y \in S$ ger inre produktens kontinuitet att

$$\langle x, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = 0.$$

Alltså $x \in S^\perp$. Således är $\overline{S^\perp} = S^\perp$ och $S^\perp$ är slutet.

Det är lätt att visa att

a) $H^\perp = \{0\}$ och $\{0\}^\perp = H$,

b) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$,

c) $S \cap S^\perp \subseteq \{0\}$ (med likhet om t.ex S är ett linjärt underrum).

Om $L, M \subseteq H$ är linjära underrum i H, så är också deras summa

$$L + M := \{x + y : x \in L, y \in M\}$$

ett linjärt underrum.

Vi skall nu betrakta ett minimeringsproblem. Det är ganska överraskande att man i Hilbertrum kan lösa minimeringsproblemet ganska allmänt.

I detta minimeringsproblem visar det sig att konvexiteten är en central egenskap.

Linjesegmentet mellan punkterna x och y ges av mängden

$$\{y + t(x-y) : t \in [0,1]\} = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}.$$

En delmängd S i H är <u>konvex</u>, om

$$tx + (1-t)y \in S \quad \text{alltid då } x, y \in S \text{ och } 0 \le t \le 1.$$

Följande s.k. minimumnormsats är en viktig grundsats i teorin för Hilbertrum och den är mycket användbar också i optimeringsteorin.

<u>Sats 69</u> (Minimumnormsatsen) Låt $\emptyset \neq S$ vara en sluten, konvex mängd i Hilbertrummet H och låt $x \in H$. Då finns det exakt en punkt $x_0 \in S$ sådan att

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x-y\| : y \in S\}.$$

Bevis: Enligt definitionen av infimum finns det en följd $(y_n)_n \subseteq S$ med $\|x - y_n\| \longrightarrow d := \inf\{\|x-y\| : y \in S\}$.
Emedan S är konvex, så gäller att $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in S$, varför

$$\|x - \tfrac{1}{2}(y_n + y_m)\| \ge d \quad \text{eller} \quad \|2x - (y_n + y_m)\| \ge 2d.$$

Enligt parallellogramidentiteten (Sats 46)) följer att

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\ &\leq 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - 4d^2.\end{aligned}$$

Emedan $2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \to 0$, då $n, m \to \infty$, fås att $(y_n)_n$ är en Cauchyföljd i H. Emedan H är fullständigt så finns $y_0 \in H$ med $y_n \to y_0$ då $n \to \infty$. Emedan S är sluten följer att $y_0 \in S$. Vidare är normen $\|\cdot\| : x \longmapsto \|x\|$, en kontinuerlig funktion, så

$$\|x - y_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d.$$

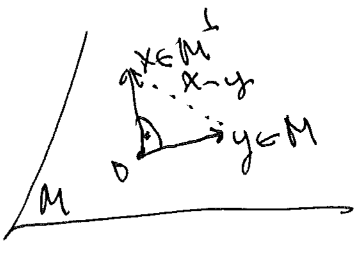
Antag nu att y_1 är en annan vektor i S med $\|x - y_1\| = d$. Då gäller $\frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in S$ och parallellogramidentiteten ger som ovan att

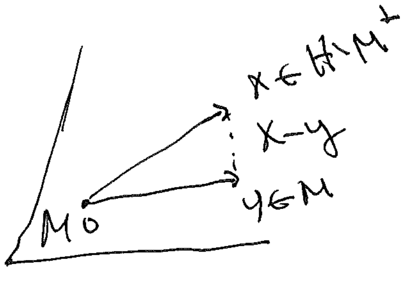
$$\|y_0 - y_1\|^2 \leq 2\left(\|x - y_0\|^2 + \|x - y_1\|^2\right) - 4d^2.$$

Emedan $\|x - y_0\| = d = \|x - y_1\|$ fås att $0 \leq \|y_0 - y_1\|^2 \leq 0$, varför

$y_0 = y_1$.

<u>Lemma 70</u> Låt M vara ett linjärt underrum i det unitära rummet H, och låt $x \in H$. Då gäller $x \in M^{\perp}$ om och endast om $\|x - y\| \geq \|x\|$ $\forall y \in M$.





Bevis: 1) Låt $x \in M^\perp$. Om $y \in M$ så gäller $\langle x,y\rangle = 0$.
Alltså

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2, \text{ så } \|x-y\| \geq \|x\|.$$

2) Antag att $\|x-y\| \geq \|x\| \ \forall y \in M$.

Emedan $\lambda y \in M$, då $y \in M$ och $\lambda \in \mathbb{K}$, så $\|x-\lambda y\| \geq \|x\|$.
Alltså

$$\|x-\lambda y\|^2 = \|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda \underbrace{\langle y,x\rangle}_{\overline{\langle x,y\rangle}} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

och vi får $-\bar{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\overline{\langle x,y\rangle} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0$.

Om $y \neq 0$, låt $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$ och således $\bar{\lambda} = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|^2}$.
Detta ger

$$-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

eller

$$\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \leq 0. \text{ Alltså } \langle x,y\rangle = 0 \ \forall y \in M, y \neq 0.$$

Om $y = 0$, så är $\langle x,y\rangle = 0$. Detta ger $x \in M^\perp$.

Sats 7.1 Låt H vara ett Hilbertrum och M ett slutet linjärt underrum av H. Då kan varje vektor $x \in H$ framställas på ett entydigt sätt som $x = y + z$, där $y \in M$ och $y \in M^\perp$.

Bevis: Om $M = \{0\}$, så är satsen trivial emedan $M^\perp = H$ och $x = x + 0$ för varje $x \in H$.
Antag att $M \neq \{0\}$ och $x \in H$. Mängden M är konvex och sluten. Minimumnormsatsen ger att det finns ett $y \in M$ med

$$\|x-y\| \leq \|x-u\| \ \forall u \in M.$$

Sätt $z := x - y$, varvid $x = z + y$. Emedan M är ett linjärt underrum, så gäller att $y + u \in M \ \forall u \in M$, och därför

$$\|z\| = \|x - y\| \le \|x - (y+u)\| = \|\underbrace{x-y}_{=z} - u\|$$

Alltså $\|z\| \le \|z - u\| \ \forall u \in M$. Nu ger Lemma 70 att $z \in M^\perp$.

Antag att $x = y + z = y_1 + z_1$, där $y, y_1 \in M$ och $z, z_1 \in M^\perp$.
Alltså $y - y_1 = z_1 - z$ och $y - y_1 \in M$, $z_1 - z \in M^\perp$ varför
$y - y_1 \in M \cap M^\perp$, $z_1 - z \in M \cap M^\perp$.
Klart att $M \cap M^\perp = \{0\}$ och därför $y = y_1$ och $z = z_1$.

<u>Följdsats 72</u> Låt H vara ett Hilbertrum. Om M är ett slutet linjärt underrum av H och $M \neq H$, så finns ett $z \neq 0$ med $z \in M^\perp$.

<u>Bevis:</u> Emedan $H \neq M$, så finns ett $x \in H$ med $x \notin M$.
Enligt Sats 71 fås att $x = y + z$, där $y \in M$ och $z \in M^\perp$.
Om $z = 0$, så gäller $x = y \in M$ vilket är en motsägelse. Alltså $z \neq 0$.

Låt L, M vara linjära underrum av ett Hilbertrum H. Vi säger att H är <u>direkta summan</u> av L och M, som vi betecknar $H = L \oplus M$, om $L \cap M = \{0\}$ och varje $x \in H$ har en framställning $x = y + z$, där $y \in L$, $z \in M$.

<u>Följdsats 73</u>: Om H är ett Hilbertrum och M är ett slutet linjärt underrum av H, så gäller $H = M \oplus M^\perp$.

Sats 74 Låt H vara ett Hilbertrum och $S \subseteq H$ en delmängd. Då gäller att $\overline{[S]} = H$ om och endast om $S^{\perp} = \{0\}$.

Bevis: 1) Antag först att $\overline{[S]} = H$. Klart att $0 \in S^{\perp}$.
Låt $x \in S^{\perp}$. Emedan $x \in H = \overline{[S]}$, så finns en följd $(x_n)_n \subseteq [S]$ med $x_n \to x$, då $n \to \infty$.
Varje $x_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \lambda_i^{(n)} y_i^{(n)}$, där $\lambda_i^{(n)} \in K$, $y_i^{(n)} \in S$, $i = 1, \ldots, m(n)$, $m(n) \in \mathbb{N}$.
För varje $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\langle x, x_n \rangle = \sum_{i=1}^{m(n)} \overline{\lambda}_i^{(n)} \underbrace{\langle x, y_i^{(n)} \rangle}_{=0} = 0.$$

Emedan inre produkten är kontinuerlig följer att

$$\langle x, x \rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, x_n \rangle = 0.$$

Alltså $\|x\| = 0$ eller $x = 0$. Således $S^{\perp} \subseteq \{0\}$ och därmed $S^{\perp} = \{0\}$.

2) Antag att $S^{\perp} = \{0\}$.
Låt oss anta att $\overline{[S]} \neq H$. Då ger Följdsats 72 att det finns ett $z \neq 0$ med $z \in \overline{[S]}^{\perp}$. Alltså $\langle z, y \rangle = 0$ $\forall y \in \overline{[S]}$.
Speciellt gäller att $\langle z, y \rangle = 0$ $\forall y \in S$, dvs. $z \in S^{\perp}$. Således är $z = 0$, vilket är en motsägelse. Alltså $\overline{[S]} = H$.

Ortonormala följder

Låt $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$. Om $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ och $e_3 = (0,0,1)$, som är en ortonormal vektormängd i $\mathbb{R}^3$, så gäller

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3,$$

där $\xi_1 = \langle x, e_1 \rangle$, $\xi_2 = \langle x, e_2 \rangle$ och $\xi_3 = \langle x, e_3 \rangle$. Således följer att

$$\|x\|^2 = \langle x, e_1 \rangle^2 + \langle x, e_2 \rangle^2 + \langle x, e_3 \rangle^2.$$

Vår avsikt är nu att följa samma process i Hilbertrum.

Ett Hilbertrum $H \neq \{0\}$ innehåller alltid ortonormala mängder, t.ex. om $0 \neq x \in H$, så är vektorn $\{x/\|x\|\}$ en sådan.

Allmännare, om $\{x_1, x_2, \ldots \} \subseteq H$ är en ändlig eller numrerbar linjärt oberoende vektormängd, så kan man visa att den s.k. Gram-Schmidt proceduren ger vektorerna $\{y_1, y_2, \ldots \}$ som är ortogonala och skilda från noll:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1$$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \quad \text{o.s.v.}$$

Om vi dessutom utför normeringen $e_n = y_n / \|y_n\|$, så får vi en ändlig eller numrerbar ortonormal vektormängd $\{e_1, e_2, \ldots \}$.

Lemma 75 Låt $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vara en ortonormal vektormängd i ett unitärt rum H samt låt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. För varje $x \in H$ gäller

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n |\lambda_i - c_i|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2,$$

där $c_i = \langle x, e_i \rangle$.

Bevis: Det är lätt att se att

$$\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_i.$$

Således fås att

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 = \langle x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, x \rangle - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \langle x, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_i.$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{c}_i - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i c_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_i$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i \bar{\lambda}_i - \lambda_i \bar{c} - \bar{\lambda}_i c_i + c_i \bar{c}_i) - \sum_{i=1}^n c_i \bar{c}_i.$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - c_i)(\bar{\lambda}_i - \bar{c}_i) - \sum_{i=1}^n |c_i|^2$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n |\lambda_i - c_i|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

Låt oss nu anta att x och alla e_i är fixerade. Nu gäller

$$\{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\} = [\{e_1, \dots, e_n\}],$$

som är ett linjärt underrum som är slutet.

Emedan $c_i = \langle x | e_i \rangle$ är fixerad, så följer av föregående lemma, att uttrycket

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \|$$

får sitt minsta värde då $\lambda_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$.

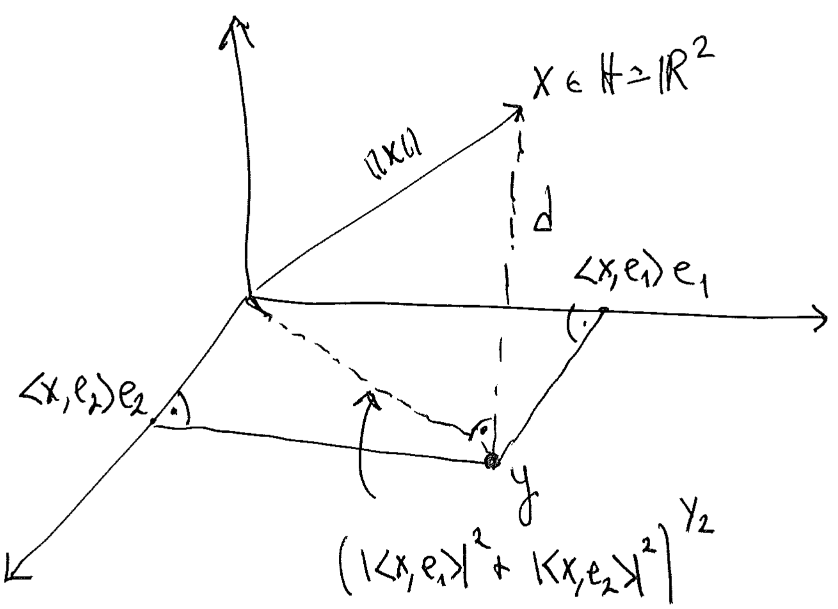
Vi har följande resultat:

<u>Sats 76</u> Låt $\{e_1, \dots, e_n\}$ vara en ortonormal vektormängd i ett unitärt rum H och låt $x \in H$. Den punkt $y \in [\{e_1, \dots, e_n\}]$, vars avstånd till punkten x är minst, ges av

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

och avståndet $d = \|x - y\|$ fås med formeln

$$d^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 .$$



$y \in [\{e_1, e_2\}] = \mathbb{R}^2$

$y = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$

Följdsats 77 Om $x \in [\{e_1, \ldots, e_n\}]$, så gäller
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Sats 78 (Bessels olikhet) Om $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ är en ortonormal följd i ett unitärt rum H, så gäller för varje $x \in H$, att
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{och} \quad \lim_{k \to \infty} \langle x, e_k \rangle = 0.$$

Bevis: För $N \in \mathbb{N}$, låt $y_N = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k$. Sats 76 ger att
$$\|x - y_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2,$$
och således att
$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 - \|x - y_N\|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$
Då $N \to \infty$ fås, $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ och $\lim_{k \to \infty} \langle x, e_k \rangle = 0$.

Vår önskan är att den formella serien $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ skulle framställa x i ett Hilbertrum H. För den saken skull låt oss påminna vad vi menar med att en oändlig serie konvergerar.

Låt H vara ett Hilbertrum med normen $\|\cdot\|$, och $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en följd i H. Om följden av delsummor $\left(\sum_{n=1}^{k} x_n\right)_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot en vektor $x \in H$, dvs. $\|\sum_{n=1}^{k} x_n - x\| \to 0$ då $k \to \infty$, säger vi att serien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerar i H och dess summa är x. Då betecknar vi $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sats 79 Låt $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en ortonormal vektormängd i ett Hilbertrum H. Om $\lambda_n \in \mathbb{K}$ för varje $n \in \mathbb{N}$, så gäller att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ konvergerar i H om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

Bevis: 1) Antag att $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n = x$, dvs. $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n = x$.
Då $k \geq m$ gäller

$$\left\langle \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n, e_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \langle e_n, e_m \rangle = \lambda_m .$$

Alltså

$$\langle x, e_m \rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n, e_m \right\rangle \overset{\text{inre produkten är kontinuerlig}}{=} \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n, e_m \right\rangle$$

$$= \lim_{k\to\infty} \lambda_m = \lambda_m .$$

Bessels olikhet ger nu att

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

2) Låt $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ och $x_k := \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n$.

Enligt Pythagoras sats gäller för alla $k, p \in \mathbb{N}$, $k > p$, att

$$\|x_k - x_p\|^2 = \left\| \sum_{n=p+1}^{k} \lambda_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=p+1}^{k} |\lambda_n|^2 \underbrace{\|e_n\|^2}_{=1\ \forall n}$$

$$= \sum_{n=p+1}^{k} |\lambda_n|^2 \longrightarrow 0, \text{ då } k, p \to \infty .$$

Alltså $(x_k)_k$ är en Cauchyföljd i H, och således konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ i H.

Låt $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en ortonormal mängd i Hilbertrummet H och låt $x \in H$. Vi skall vilja att

$$x \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n .$$

Enligt Bessels olikhet och Sats 79 får vi att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ konvergerar i H. Men vi kan inte vara säkra på att gränsvärdet är x.

Exempel Låt $e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, och betrakta l^2 med inre produkten $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$, där $x, y \in l^2$. Nu gäller att

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{om } n = m \\ 0, & \text{om } n \neq m, \end{cases}$$

dvs. $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq l^2$ är en ortonormal mängd.

Sätt $f_n := e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, så $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ är en ortonormal mängd i l^2. Om $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$, så gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x | f_n \rangle f_n = \sum_{n=2}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = (0, x_2, x_3, \ldots) \neq x .$$

Vi bildar nu "felet" y som ges av

$$y = x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n .$$

Då $j \in \mathbb{N}$ gäller

$$\langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_j \rangle = 0.$$

Om $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ är <u>total</u>, dvs. $\langle y, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y = 0$, så gäller den önskade framställningen.

<u>Sats 80</u> Låt $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en total, ortonormal följd i Hilbertrummet H. För varje $x \in H$ gäller att

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{och} \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

<u>Bevis:</u> Första delen av satsen bevisade vi redan.
Då $N \in \mathbb{N}$ ger Pytagoras sats att

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2, \text{ ty } \|e_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Emedan normen $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$ är kontinuerlig fås

$$\|x\|^2 = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2 = \lim_{N \to \infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \Big\|^2$$
$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

<u>Definition</u> Låt H vara ett Hilbertrum. Vektorföljden $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ är en <u>ortonormal bas</u> i H, om den är ortonormal och total.

Sats 81 Låt H vara ett Hilbertrum och $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en ortonormal följd i H. Följande påståenden är ekvivalenta:

(a) $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ är total, dvs. en ortonormal bas.

(b) $\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = H$.

(c) $\forall x \in H$ gäller $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

(d) $\forall x \in H$ gäller $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$. Detta kallas Bessels likhet.

Bevis: (a) $\Leftrightarrow$ (b): Enligt Sats 74 gäller att om $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, så är $\overline{[S]} = H$ om och endast om $S^{\perp} = \{0\}$. Men $S^{\perp} = \{0\}$ om och endast om det gäller att $\langle x, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0$, dvs. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ är total.

(a) $\Rightarrow$ (c): Låt $x \in H$. Föregående sats ger att $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Följer av beviset till föregående sats.

(d) $\Rightarrow$ (a): Antag att $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ inte är total, dvs. det finns ett $x \in H$, $x \neq 0$ med $\langle x, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Då är $\|x\| \neq 0$ men $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = 0$, vilket är en motsägelse.

Exempel (a) Låt

$$\ell^2 = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in K \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ och } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$$

och

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i .$$

Låt $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$. Då är $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en ortonormal följd i ℓ^2. Låt $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$. Då gäller

$$\langle x, e_k \rangle = x_k$$

och

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 .$$

Nu följer det från Sats 81 att $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ i ℓ^2 är en ortonormal bas och $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

(b) Låt

$$L^2([a,b], \mathbb{K}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f \text{ mätbar och } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

och

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx , \text{ då } \cancel{f, g \in}\ f, g \in L^2([a,b], \mathbb{K}).$$

Klart att $C([a,b], \mathbb{K}) \subseteq L^2([a,b], \mathbb{K})$

Då kan man visa att $L^2([a,b], \mathbb{K})$ är ett Hilbertrum.

Rummet $L^2([a,b], \mathbb{K})$ har många olika ortonormala baser.

Låt $a = -\pi$ och $b = \pi$. Vi inför nu

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Då gäller

$$\langle e_k, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\overline{e^{int}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}\,dt = \begin{cases} 1, & \text{om } k=n \\ 0, & \text{om } k \neq n. \end{cases}$$

Således är $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ en ortonormal följd i $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K})$.
En annan ortonormal följd i $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K})$ ges av

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \ldots$$

Man kan visa att $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ är också <u>total</u>, dvs. en ortonormal bas.

Låt $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en ortonormal bas i ett Hilbertrum H.
Då kan varje $x \in H$ framställas som en <u>Fourier-serie</u>

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k,$$

och talen $\langle x, e_k\rangle$ kallas vektorns x <u>Fourierkoefficienter</u> med avseende på följden $(e_k)_{k=1}^{\infty}$.
Enligt Sats 81 (d) gäller den s.k. <u>Bessels likhet</u> eller <u>Parsevals formel</u>,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Emedan följden $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, där $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$, är en ortonormal bas har vi följande resultat:

<u>Följdsats 82</u>: För varje $f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{K})$ gäller att

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}.$$

Låt oss beteckna

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

och vi får <u>Fourier-serien</u>

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-ikt},$$

där serien konvergerar i L^2-mening. Konkret betyder detta att

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{-ikt} \right|^2 dt = 0.$$

<u>Parsevals formel</u> eller <u>Bessels likhet</u> ges av

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Vi har använt att

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, e_k\rangle \text{ för alla } k \in \mathbb{Z}.$$

VI Linjära funktionaler och Fréchet-Riesz sats

Låt X vara ett vektorrum över $\mathbb{K}$. Låt $F : X \to \mathbb{K}$ vara en linjär funktional. Då gäller speciellt $F(0) = 0$.

Vi har följande linjära funktionaler:

<u>Exempel</u> (a) Definiera $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ genom

$$F(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots c_n x_n,$$

där $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

(b) Definiera $F_c : \ell^1 \to \mathbb{C}$ genom

$$F_c((x_n)_{n\geq 1}^{\infty}) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} c_n x_n,$$

där $c = (c_n)_{n\geq 1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$, dvs. $\sup_n |c_n| < \infty$. Då gäller $\sum_{n\geq 1}^{\infty} |c_n x_n| < \infty$ och F_c är väldefinierad.

(c) Låt H vara ett Hilbertrum och låt $y \in H$. Vi definiera $F_y : H \to \mathbb{C}$ genom $F_y(x) = \langle x, y \rangle$.

Alla ovanstående linjära funktionaler är också begränsade, dvs. kontinuerliga.

Enligt Sats 22 gäller att F är kontinuerlig i hela H $\Leftrightarrow$ F är kontinuerlig i punkten $0 \in H$ $\Leftrightarrow$ $\|F\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)| < \infty$.

Dualrummet H^* av Hilbertrummet H består av alla (111)
kontinuerliga linjära funktionaler $F: H \to \mathbb{K}$.
Man kan visa att H^* är ett Banachrum med
normen
$$\|F\| = \sup_{\|x\| \le 1} |F(x)|, \quad \text{där } F \in H^*.$$

Låt oss återvända till exempel (c). Inre produkten är linjär och kontinuerlig med avseende på den första variabeln. Alltså då den andra variabeln $y \in H$ är fixerad, följer att
$$F_y(x) = \langle x, y \rangle \;, \quad x \in H,$$

definierar en kontinuerlig linjär funktional $F_y: H \to \mathbb{K}$, dvs. $F_y \in H^*$.

Vidare gäller, enligt Cauchy-Schwarz olikhet, att
$$|F_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|,$$
varför
$$\|F_y\| = \sup_{\|x\| \le 1} |F(x)| \le \|y\| < \infty.$$

Å andra sidan, om $y \neq 0$, så får vi
$$\|F_y\| \ge \left|F_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \frac{1}{\|y\|} |\langle y, y \rangle| = \|y\|,$$
och vi får följande anmärkningsvärda resultat:
$$\|F_y\| = \|y\| \quad \forall y \in H.$$
Alltså varje $y \in H$ definierar ett element $F_y \in H^*$.

Nu kan man fråga sig om alla element i H^* är av denna typ?

Ett positivt svar till denna fråga ger följande s.k. Fréchet-Riesz sats:

Sats 83 Låt H vara ett Hilbertrum och låt $F \in H^*$, dvs. F är en kontinuerlig linjär funktional. Då finns det exakt en vektor $y \in H$ så att $F = F_y$, dvs.

$$F(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H.$$

Bevis: Om en sådan $y \in H$ existerar, så är den entydigt bestämd, ty om för varje $x \in H$ gäller

$$\langle x, y \rangle = F(x) = \langle x, z \rangle,$$

så $\langle x, y-z \rangle = 0$ för alla $x \in H$ och därmed $y = z$.

Vi visar nu att y existerar. Om $F \equiv 0$, så duger $y = 0$.
Antag nu att $F \not\equiv 0$. Då gäller att

$$M := \operatorname{Ker} F = \{x \in H : F(x) = 0\}$$

är ett äkta linjärt underrum av H, dvs. $M \neq H$. Nu gäller att M är sluten, emedan F är kontinuerlig.
Enligt Sats 71 är $H = M \oplus M^\perp$ och $M^\perp \neq \{0\}$.
Välj $0 \neq z_0 \in M^\perp$ och beteckna $z := z_0 / F(z_0)$. Då gäller $z_0 \notin M$ och $F(z) = 1$.

Om nu $z_1 \in M^\perp$, så $F(z_1 - F(z_1)z) = F(z_1) - F(z_1) = 0$, så $z_1 - F(z_1)z \in M \cap M^\perp = \{0\}$. Alltså $z_1 = F(z_1)z$. Detta betyder att $M^\perp = [z]$ och därmed $\dim M^\perp = 1$.

Låt oss välja ett godtyckligt $x \in H$. Då gäller

$$x = x_0 + \lambda z, \text{ där } x_0 \in M \text{ och } \lambda z \in M^\perp.$$

Om vi nu betecknar $y = \frac{z}{\|z\|^2} \in M^\perp$, så följer

$$\langle x, y\rangle = \langle x_0 + \lambda z, \tfrac{z}{\|z\|^2}\rangle = \frac{\lambda}{\|z\|^2}\langle z, z\rangle = \lambda.$$

Emedan $F(x) = F(x_0) + \lambda F(z) = \lambda$, får att

$$F(x) = \langle x, y\rangle.$$

Därmed har vi hittat vektorn $y \in H$ som vi sökte.

Avbildningen $y \mapsto F_y$ är en bijektion $H \to H^*$ och dessutom är den en isometri, $\|y\| = \|F_y\|$.

Riktigt linjär är den inte, utan konjugatlinjär,

$$F_{\alpha y + \beta z} = \langle \cdot, \alpha y + \beta z\rangle = \bar\alpha \langle \cdot, y\rangle + \bar\beta \langle \cdot, z\rangle = \bar\alpha F_y + \bar\beta F_z.$$

Genom avbildningen $y \mapsto F_y$ kan man ersätta element i dualrummet H^* med element i H.

Det visar sig också att H^* är ett Hilbertrum med inre produkten

$$\langle F_y, F_x\rangle = \langle y, x\rangle.$$

Hilbertrummet H kallas <u>separabelt</u>, om det har en ortonormal bas (som kan vara ändlig). Jfr. Sats 81.

Vi visar nu att alla separabla Hilbertrum "ser ut" som l_2.

<u>Definition</u> Avbildningen $T: H \to K$, där H och K är Hilbertrum, kallas <u>unitär</u>, om den är linjär, bijektiv och uppfyller villkoret

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Hilbertrummen H och K är <u>isomorfa</u> om det finns en unitär avbildning mellan H och K.

<u>Sats 84</u> Låt H och K vara Hilbertrum och antag att avbildningen $T: H \to K$ är linjär och surjektiv. Då är T unitär om och endast om $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x \in H$.

<u>Bevis:</u> 1) Antag att $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x \in H$. Klart att T är injektiv. Polarizationsidentiteten ger för alla $x, y \in H$ att

$$\langle Tx, Ty\rangle = \frac{1}{4}\left[\|Tx-Ty\|^2 - \|Tx-Ty\|^2 + i\|Tx+iTy\|^2 - i\|Tx-iTy\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\|x-y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right] = \langle x, y\rangle.$$

2) Omvänt, om $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \; \forall x, y \in H$, så gäller $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$, dvs. $\|Tx\| = \|x\| \; \forall x \in H$.

Sats 85 Låt H vara ett separabelt Hilbertrum. Då är H isomorft med antingen ℓ^2 eller $\mathbb{K}^n$ för något $n \in \mathbb{N}$.

Bevis: Låt oss först anta att H har en ändlig total ortonormal följd $e_1, \dots, e_n$. Om $x \in H$, så ger Sats 81 att

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i .$$

Nu definierar vi en avbildning $T : H \to \mathbb{K}^n$ genom

$$T(x) = T(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n), \text{ där } \xi_i = \langle x, e_i \rangle, i = 1, \dots, n.$$

Det är klart att T är linjär och bijektiv. Emedan

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \quad \forall x \in H,$$

fås att

$$\|T(x)\|^2 = \|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2,$$

dvs. $\|T(x)\| = \|x\|$. Sats 84 ger att H och $\mathbb{K}^n$ är isomorfa.

Nu antar vi att H har en total ortonormerad följd $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vi definierar avbildningen $T : H \to \ell^2$ genom

$$T(x) = T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i\Big) = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ där } \xi_n = \langle x, e_n \rangle.$$

Igen har vi använt Sats 81. Enligt Bessels likhet fås för varje $x \in H$ att

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty .$$

Alltså $Tx \in l^2$ för alla $x \in H$ och $\|T(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in H$.
Klart att T är linjär. Enligt föregående sats räcker det att visa att T är ~~surj~~ surjektiv.

Låt $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 < \infty$. Då ger Sats 79 att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n e_n$ konvergerar, dvs. det finns ett $x \in H$ sådant att $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n e_n$. Härav följer att $\langle x, e_n \rangle = \eta_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$, och $T(x) = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dvs. T är surjektiv.
Således är H och l^2 isomorfa.

<u>Exempel</u> Betrakta Hilbertrummet $L^2([-1,1], \mathbb{R})$ med dess underrum $H = [\{1, x, x^2\}]$. För $p(x) = ax^2 + bx + c \in H$ definierar vi $F : H \to \mathbb{R}$ genom $F(p) = 2(a+b+c)$. Då gäller $F \in H^*$. Sök $q \in H$ så att $F(p) = \langle p, q \rangle$ $\forall p \in H$.

Låt $q(x) = d_1 x^2 + d_2 x + d_3$, $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$F(p) = \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)(d_1 x^2 + d_2 x + d_3)\, dx = 2(a+b+c)$$

Alltså $\int_{-1}^{1} (ad_1 x^4 + ad_2 x^3 + ad_3 x^2 + bd_1 x^3 + bd_2 x^2 + bd_3 x + cd_1 x^2 + cd_2 x + cd_3)\, dx = 2(a+b+c)$

och $\int_{-1}^{1} [ad_1 x^4 + (ad_2 + bd_1)x^3 + (ad_3 + bd_2 + cd_1)x^2 + (bd_3 + cd_2)x + cd_3]\, dx = 2(a+b+c)$

$$= \frac{2}{5} ad_1 + (ad_3 + bd_2 + cd_1)\frac{2}{3} + 2cd_3 = 2\left[\frac{ad_1}{5} + \frac{(ad_3 + bd_2 + cd_1)}{3} + cd_3\right] = 2[a+b+c]$$

$$\frac{ad_1}{5} + \frac{ad_3}{3} + \frac{bd_2}{3} + \frac{cd_1}{3} + cd_3 = a+b+c$$

$$\frac{d_1}{5} + \frac{d_3}{3} = 1$$

$\frac{d_2}{3} = 1$, så $\underline{\underline{d_2 = 3}}$

$\frac{d_1}{3} + d_3 = 1$, så $\frac{d_1}{3} + \left(3 - \frac{3}{5}d_1\right) = 1$ eller $\frac{d_1}{3} - \frac{3}{5}d_1 = -2$.

Alltså $\frac{4 \cdot d_1}{15} = 2$, dvs. $\underline{\underline{d_1 = \frac{15}{2}}}$ och $\underline{\underline{d_3}} = 1 - \frac{d_1}{3} = 1 - \frac{15}{6} = -\frac{9}{6} = \underline{\underline{\frac{-3}{2}}}$

Slutligen, $q(x) = \frac{15}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$. Därför gäller för $F: H \to \mathbb{R}$ att

$$F(p) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{15}{2}x^2 \cdot p(x) + 3x\,p(x) - \frac{3}{2}p(x)\right] dx$$ för varje $p \in H$.

<u>The End</u>