I. Grundbegrepp

Inledning

I denna kurs skall vi studera många bekanta begrepp från kurserna i analys och flerdimensionell analys men i ännu allmännare situationer. Sådana begrepp är t.ex. gränsvärde, kontinuitet och till dessa hörande topologiska begrepp såsom kompakthet.

Ett allmänt angreppssätt kan vara av stor nytta. Detta eftersom ett mera abstrakt behandlingssätt hjälper en att bättre se vad som är väsentligt i varje situation.
Å andra sidan slipper man också att upprepa samma resonemang då beviset utförs tillräckligt allmänt.

Många strukturer som vi skall behandla i denna kurs är abstraktioner av rymden $\mathbb{R}^n$:s strukturdrag.

I det följande räknar vi upp vissa centrala egenskaper som $\mathbb{R}^n$ har:

1) $\mathbb{R}^n$ är ett vektorrum över talkroppen $\mathbb{R}$

2) I $\mathbb{R}^n$ är skalärprodukten eller inreprodukten av vektorerna $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ och $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ definierad genom

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i = y\cdot x.$$

3) Med hjälp av skalärprodukten kan man definiera längden eller normen av vektorn $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ genom:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

4) Med hjälp av normen kan man definiera avståndet mellan vektorerna $x,y\in\mathbb{R}^n$ genom

$$d(x,y)=\|x-y\|.$$

5) Med hjälp av avståndsfunktionen eller metriken $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ kan man i $\mathbb{R}^n$ definiera konvergens av en följd, en funktions gränsvärde, kontinuitet o.s.v.

6) Med hjälp av metriken kan man i $\mathbb{R}^n$ definiera topologiska grundbegrepp såsom öppna mängder, kompakthet o.s.v.

En del av dessa begrepp kommer vi att definiera mycket allmänt i denna kurs.

Begreppet öppen mängd kan man tänka som en hästhage med ~~[illegible]~~ elstängsel. Du kan komma godtyckligt nära stängslet men du kan inte vara det!

Beteckningar och överenskommelser:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, naturliga talen

$\mathbb{R}$ = reella talkroppen

$\mathbb{C}$ = komplexa talens kropp.

Som mängd är $\mathbb{C}$ alltså $\mathbb{R}^2$ och där är addition och multiplikation definierade på känt sätt, dvs.
$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ och $(a,b)(c,d) = (ac-bd, bc+ad)$.
På vanligt sätt identifierar vi $\mathbb{R}$ med $\mathbb{C}$:s underkropp $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.
Vi betecknar $i = (0,1)$. Om $z \in \mathbb{C}$ så existerar det entydigt bestämda reella tal $x = \mathrm{Re}\, z$ och $y = \mathrm{Im}\, z$ med $z = x + iy$. <u>Konjugattalet</u> till $z = x+iy$ är $\bar{z} = x - iy$ och <u>absolutbeloppet</u> $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$\left[(x,y) = (x,0) + (0,y) = x + (0,1)y \right]$$

Vektorrummens skalärkropp är $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ $(= \mathbb{K})$. I varje vektorrum betecknar vi noll-elementet med 0.

Om $X \neq \emptyset$ är en mgd och E ett vektorrum över $\mathbb{K}$, så är mängden

$$E^X = \{ f : X \to E : f \text{ avbildning} \}$$

ett vektorrum över $\mathbb{K}$ med avseende på räkneoperationerna

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \ f, g \in E^X.$$

Speciellt är alltså $\mathbb{K}^X$ ett vektorrum.

Om A, B och X är mgder, $A \subseteq B$ och $f : B \to X$ är en avbildning, så är f:s <u>restriktion</u> till A avbildningen $f|A : A \to X$ för vilken $(f|A)(x) = f(x) \ \forall\, x \in A$.

Unitära rum

<u>Definition</u> Låt E vara ett komplext vektorrum (= ett vektorrum över $\mathbb{C}$). Operationen $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ kallas en <u>inre produkt</u> eller <u>skalärprodukt</u> om

(IP1) $\langle \alpha x + \beta y , z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(IP2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in E$.

(IP3) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$ (Enligt (IP2) är ~~(IP3)~~ $\langle x, x \rangle$ alltid reellt).

(IP4) $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Från (IP1) och (IP2) följer att

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \quad \forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ty $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \bar{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$.

<u>Anmärkningar</u> 1) Om E är ett reellt vektorrum så använder vi samma benämningar för operationen $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ såvitt den uppfyller ovanstående axiom. I detta fall betyder (IP2) att $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, dvs. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ är <u>symmetrisk</u>.

2) Om vi lämnar bort axiom (IP4) så säger vi att vi får en <u>semi-skalärprodukt</u>.

<u>Definition</u> Låt E vara ett reellt eller komplext vektorrum med en given skalärprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Då kallas E ett <u>unitärt rum</u>. Ett <u>semi-unitärt rum</u> är ett vektorrum med en given semi-skalärprodukt.

<u>Sats 1</u> Låt E vara ett reellt eller komplext semi-unitärt rum.
Då gäller <u>Cauchy-Schwarz olikhet</u>:

$$(1) \qquad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad \forall x,y \in E.$$

Om E är ett unitärt rum, så gäller likhet i (1) om och endast om x och y är linjärt beroende.

<u>Bevis</u>: Låt $\alpha \in \mathbb{R}$ och beteckna $\beta = \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$. Då gäller

$$0 \leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha^2\langle x,x\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle x,y\rangle + \beta\alpha\langle y,x\rangle$$
$$+ |\beta|^2\langle y,y\rangle = \alpha^2\langle x,x\rangle + \alpha\, 2|\langle x,y\rangle|^2 + |\beta|^2\langle y,y\rangle.$$

Sätt $a = \langle x,x\rangle$, $b = 2|\langle x,y\rangle|^2$ och $c = |\beta|^2\langle y,y\rangle$.

Alltså $\alpha^2 a + \alpha b + c \geq 0$ för alla $\alpha \in \mathbb{R}$. Då följer att diskriminanten $D = b^2 - 4ac = 4|\langle x,y\rangle|^4 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle|\langle x,y\rangle|^2 \leq 0$,
dvs. $4|\langle x,y\rangle|^2\left[|\langle x,y\rangle|^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\right] \leq 0$, så (1) följer.

Antag nu att E är ett unitärt rum.
Om $x=0$ eller $y=0$, så gäller påståendet.
Antag $x \neq 0$ och $y \neq 0$. Då är $\langle x,x\rangle > 0$ och $\langle y,y\rangle > 0$.
Om likhet nu gäller i (1), så är $D=0$ och $\langle x,y\rangle \neq 0$.
Alltså för ngt $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller $\langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\rangle = 0$ och $\beta \neq 0$,
dvs. för ngt $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y = 0$ och $\beta \neq 0$, dvs. x och y är linjärt beroende.
Omvänt antag att $y = \lambda x$. Då gäller

$$\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = |\lambda|^2\langle x,x\rangle^2 = \langle \lambda x, x\rangle\langle x, \lambda x\rangle = |\langle x,y\rangle|^2.$$

Sats 2 Låt E vara ett reellt eller komplext semi-unitärt rum. Sätt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ $\forall x \in E$. Då gäller

(N1) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ $\forall \alpha \in K, x \in E$.

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y \in E$ (triangelolikhet)

Om E är ett unitärt rum, så gäller dessutom

(N4) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Bevis: (N1) är klart.

(N2): $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x,x\rangle} = |\alpha| \, \|x\|$.

(N3): Med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet gäller:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=\overline{\langle x,y\rangle}} + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

(N4): Då E är ett unitärt rum, så ger (IP4) att $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$, dvs. $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \Rightarrow x = 0$.
Om $x = 0$, så är det klart att $\langle x,x\rangle = 0$.

Definition Avbildningen $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\|$, $E \to \mathbb{R}^+$, är en <u>semi-norm</u> inducerad av semi-skalärprodukten $\langle \cdot,\cdot\rangle$ och en <u>norm</u> om $\langle \cdot,\cdot\rangle$ är en skalärprodukt.

Sats 3 Om E är ett reellt eller komplext semi-unitärt rum, så gäller

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y \in E.$$

Bevis: Följer direkt ur Sats 1.

Exempel $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots, n\}$ är ett komplext vektorrum med avseende på operationerna

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Vi definierar en skalärprodukt i $\mathbb{C}^n$ genom

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \; y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Det är lätt att se att axiomen (IP1)–(IP4) är uppfyllda. Cauchy-Schwarz olikhet får i detta fall formen

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k \right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

På motsvarande sätt är $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}$ ett reellt unitärt rum med avseende på skalärprodukten $\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Den vanliga Schwarz olikhet för reella tal är

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Exempel Låt $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2 < \infty\}$.
Operationerna i $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ definieras på vanligt sätt:

$$(\lambda f)(n) = \lambda f(n) \quad \text{och} \quad (f+g)(n) = f(n) + g(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Klart att $\lambda f \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ för alla $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Emedan

$$(2) \qquad |f(n) g(n)| \le \frac{1}{2} \left[f(n)^2 + g(n)^2 \right],$$

så gäller att

$$[f(n) + g(n)]^2 = f(n)^2 + 2f(n)g(n) + g(n)^2 \le 2\left[f(n)^2 + g(n)^2 \right].$$

Alltså: $f + g \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ om $f, g \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ enligt majorantprincipen.
Således är $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ett vektorrum, emedan det är ett linjärt underrum av $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ur (2) följer också att serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$$
konvergerar absolut, om $f, g \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Således kan vi definiera
$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, g(n) \quad , \quad f, g \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}).$$
Det är lätt att se att detta definierar en skalärprodukt i $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Denna skalärprodukt inducerar normen
$$\|f\| = \|f\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2 \right)^{1/2}$$

<u>Exempel</u> Antag att $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sätt
$$C([a,b], \mathbb{C}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ kontinuerlig funktion} \}$$
Då är det klart att $C([a,b], \mathbb{C})$ är ett linjärt underrum av $\mathbb{C}^{[a,b]}$ med avseende på de vanliga operationerna.
Låt
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx \quad , \text{ om } f, g \in C([a,b], \mathbb{C}).$$
Det är lätt att se att detta definierar en skalärprodukt i $C([a,b], \mathbb{C})$. Vi visar t.ex (IP4): Om $f \in C([a,b], \mathbb{C})$ och $f \not\equiv 0$, dvs. $\exists\, x \in [a,b]$ med $f(x) \neq 0$, så fås
$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx > 0 \quad , \text{ då } f \text{ är kontinuerlig.}$$

Cauchy-Schwarz olikhet kan skrivas på formen:
$$\left| \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

<u>Definition</u> Två vektorer x och y i ett semi-unitärt rum E kallas <u>ortogonala</u> om $\langle x,y\rangle = 0$. Vi betecknar detta $x \perp y$.

<u>Anmärkning</u> Om $\langle x,y\rangle = 0$, så gäller ~~[illegible]~~ att $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = 0$ och omvänt. Alltså $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.

<u>Sats 4</u> Låt E vara ett unitärt rum.

a) Om $x_1, \dots, x_n \in E$ är sådana att $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $i \neq j$, så är

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \qquad \text{"Pytagoras sats"}$$

b) $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \forall x,y \in E$$
"parallellogramidentiteten"

<u>Bevis</u>: Hemuppgift.

<u>Anmärkning</u> Om E är ett vektorrum och $\langle \cdot,\cdot \rangle$ är en semi-skalärprodukt så kan man enkelt visa i det reella fallet att

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

och i det komplexa fallet att

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right].$$

Ur dessa så kallade <u>polarisationsidentiteter</u> följer speciellt att normen i ett unitärt rum definierar skalärprodukten som den induceras från.

Normerade vektorrum

<u>Definition</u> Låt E vara ett reellt eller komplext vektorrum. En i E definierad reellvärd avbildning $x \mapsto \|x\|$ kallas en <u>semi-norm</u>, om

(N1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall x \in E, \alpha \in \mathbb{K} (= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$.

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$.

Om dessutom gäller att

(N4) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

så kallas $\|\cdot\|$ en <u>norm</u>. Om E är ett vektorrum som är försett med en <u>semi-norm</u> $\|\cdot\|$ så sägs E eller $(E, \|\cdot\|)$ vara ett <u>semi-normerat rum</u>. Ifall $\|\cdot\|$ är en <u>norm</u>, så sägs $(E, \|\cdot\|)$ vara ett <u>normerat rum</u>

<u>Exempel</u> Varje unitärt rum E är ett normerat rum då man definierar $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in E$ (jfr. Sats 2).
Speciellt gäller att $\mathbb{R}^n$ är ett normerat rum med avseende på normen

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

I fallet $n=1$ blir normen absolutbeloppet: $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
I fallet $n=2$ får vi komplexa talens absolutbelopp:
Om $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dvs. $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, så gäller
$\|z\| = \sqrt{x^2+y^2} = |z| =$ absolutbeloppet av z.

<u>Sats 5</u> Om E är ett normerat vektorrum, så gäller

(a) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x+y\| \quad \forall x, y \in E$

och

(b) $\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \quad \forall x_1, \dots, x_n \in E.$

<u>Bevis:</u> Emedan $\|x\| = \|x+y-y\| \leq \|x+y\| + \|y\|$ fås $\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$ och på motsvarande sätt $-(\|x\|-\|y\|) = \|y\| - \|x\| \leq \|x+y\|$. Härur följer (a). (b) bevisas med induktion.

<u>Anmärkning</u> Sats 5 (a) visar att avbildningen $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ är en kontinuerlig avbildning.

<u>Exempel</u> Sätt $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty \}$ och $\|f\| = \|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ för alla $f \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Då är $\|f\| \geq 0$ och $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$, dvs. $f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall f \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha f(n)| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty, \text{ varför } \alpha f \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

och $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1$.

Om $f, g \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ gäller

$$\sum_{n=1}^{p} |f(n) + g(n)| \leq \sum_{n=1}^{p} |f(n)| + \sum_{n=1}^{p} |g(n)| \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

varför $f + g \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ och $\|f+g\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n) + g(n)| \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Alltså $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ är ett linjärt underrum av $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ och $f \mapsto \|f\|_1$ är en norm i $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Men $(\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$ är <u>inte</u> ett unitärt rum.

<u>Lösning</u>: Låt $x = (1,0,\ldots)$, $y = (0,1,0,\ldots) \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Då gäller

$$\|x+y\|_1 = \|(1,1,0,\ldots)\|_1 = 2$$

$$\|x-y\|_1 = \|(1,-1,0,\ldots)\|_1 = 2$$

$$\|x\|_1 = 1 \text{ och } \|y\|_1 = 1,$$

varför $\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 2^2+2^2 = 8 \neq 4 = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2)$, vilket strider mot Sats 4 b). Alltså $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ är inte ett unitärt rum.

<u>Exempel</u> Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och beteckna

$$B(X) = B(X,\mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ är en begränsad funktion}\}$$
$$= \{f : X \to \mathbb{K} : \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}.$$

Sätt $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$, om $f \in B(X)$.

Klart att $\|f\| \geq 0$ och $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ (nollfunktionen $f(x) = 0 \ \forall x \in X$)

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\forall f \in B(X)$ gäller:

$$\sup_{x\in X} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty, \text{ så } \alpha f \in B(X) \text{ och}$$

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \, \|f\|_\infty.$$

Om $f, g \in B(X)$,

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \forall x \in X, \text{ så}$$

$$\sup_{x \in X} |(f+g)(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \text{ Alltså } f+g \in B(X) \text{ och}$$

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Därmed har vi visat att $B(X)$ är ett linjärt underrum av funktionsrummet $\mathbb{K}^X$ och att $f \longmapsto \|f\|_\infty$ är en norm i $B(X)$.
Då $X = \mathbb{N}$ betecknar vi $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = B(X, \mathbb{K})$, dvs. $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ är ett normerat rum med normen $\|f\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |f(n)| < \infty$. Alltså $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ består av alla begränsade följder $(f(n))_{n=1}^\infty$.

Exempel Om E är ett normerat (vektor)rum, så är också varje linjärt underrum av E ett normerat rum försedd med restriktionen av E:s norm.

T.ex. låt $X = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Då är

$$C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ kont. funktion}\}$$

ett linjärt underrum av $B(X, \mathbb{R})$, ty varje kontinuerlig funktion på ett kompakt intervall är begränsad. Således är $C([a,b], \mathbb{R})$ eller $C([a,b], \mathbb{C})$ ett normerat rum med avseende på normen

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Lemma 1 Låt $f \in C([a,b], \mathbb{K})$. Då gäller

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

Bevis: Se beviset av Lemma 2.48 i Staffans Lecture Notes.

I fallet $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ har vi följande bevis:

Sätt $F = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{C}$. Vi kan anta att $F \neq 0$.

Då gäller $F = |F| e^{i\theta}$ för något $\theta \in [0, 2\pi[$. Alltså

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |F| = e^{-i\theta} F = e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}[e^{-i\theta} f(x)]\,dx \leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Sats 6 Låt E vara ett normerat vektorrum och definiera avståndsfunktionen $d(x,y) = \|x-y\|$, $x,y \in E$. Då gäller

(M1) $\quad d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in E$

(M2) $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $\quad d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$

(M4) $\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in E$

Om E är ett semi-normerat rum, så ersätts (M2) med

(M2)' $\quad d(x,y) = 0$ då $x = y$.

Bevis: (M1) följer ur (N1) och (M2) ur (N4).

(M3): $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| \overset{(N2)}{=} |-1|\,\|y-x\| = d(y,x)$.

(M4): $d(x,y) = \|x-z+z-y\| \overset{(N3)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

Linjära operatorer

<u>Definition</u> Låt E och F vara två vektorrum över samma skalärkropp $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. En avbildning $T : E \to F$ är <u>linjär</u>, om

(L1) $\quad T(x+y) = Tx + Ty \quad \forall x, y \in E.$

(L2) $\quad T(\lambda x) = \lambda Tx \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E.$

Om vi ersätter (L2) med

$\overline{(L2)}$ $\quad T(\lambda x) = \bar{\lambda} Tx,$

så får vi en <u>anti-linjär</u> avbildning. I specialfallet, att $F = \mathbb{K}$, kallas T en <u>funktional</u>.

<u>Definition</u> Låt E och F vara två normerade vektorrum. En linjär (eller anti-linjär) operator $T : E \to F$ är <u>begränsad</u>, om det existerar $M > 0$ så att

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Mängden av alla begränsade linjära operatorer betecknas vi med $L(E, F)$.

<u>Exempel</u> Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ a_{n1} \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{n \times m}$ och definiera $T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ genom $Tx = Ax$ (matrismultiplikation)

Vi förser $\mathbb{C}^m$ med normen $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\right)^{1/2}$ och analogt för $\mathbb{C}^n$.

<u>Påstående</u>: T är en begränsad linjär operator.

Lösning:

T linjär operator: Låt $x, y \in \mathbb{C}^m$ och $\lambda \in \mathbb{C}$. Då gäller

$$T(\lambda x + y) = A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay = \lambda Tx + Ty.$$

T begränsad: Beteckna $y = Ax \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^m$. Då följer, om $x = (x_1, \dots, x_m)$, att $y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m$, $k = 1, \dots, n$.
Vi använder Cauchy-Schwarz olikhet:

$$|y_k|^2 = \left|\sum_{j=1}^m a_{kj} x_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^m |a_{kj}|^2 \sum_{j=1}^m |x_j|^2 = \sum_{j=1}^m |a_{kj}|^2 \|x\|^2$$

för alla $k = 1, \dots, n$. Alltså, då $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, fås

$$\|y\|^2 = |y_1|^2 + \dots + |y_n|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{kj}|^2\right) \|x\|^2,$$

dvs. $\|Tx\| \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{kj}|^2\right)^{1/2}}_{=M} \|x\|$ för alla $x \in \mathbb{C}^n$.

Sats 7 Låt E och F vara två normerade vektorrum. Då är $L(E,F)$ ett normerat vektorrum försedd med normen $\|T\|_{L(E,F)} = \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F$ (3)

Bevis:

1° Är $L(E,F)$ ett vektorrum? Emedan F^E är ett vektorrum och $L(E,F) \subseteq F^E$, så räcker det att visa att om $S, T \in L(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, så gäller $T + S \in L(E,F)$ och $\lambda T \in L(E,F)$, då $(T+S)x = Tx + Sx$ och $(\lambda T)x = \lambda T(x)$.

Klart att $T+S$ och λS är linjära operatorer. (17

Emedan $T, S \in L(E,F)$, följer att det finns $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, så att

$$\|Tx\| \leq M_1 \|x\| \quad \text{och} \quad \|Sx\| \leq M_2 \|x\|, \quad x \in E.$$

Således gäller för alla $x \in E$,

$$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (M_1 + M_2)\|x\|$$

och

$$\|(\lambda T)x\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda| \, \|Tx\| \leq |\lambda| M_1 \|x\|.$$

Alltså $T+S, \lambda T \in L(E,F)$.

2° Är $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ en norm?

(N1): Klart att $\|T\| \geq 0 \quad \forall T \in L(E,F)$.

(N2): $$\|\alpha T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\alpha Tx\|_F}{\|x\|_E} = |\alpha| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = |\alpha| \, \|T\|, \alpha \in K.$$

(N3): $$\|T+S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T+S)x\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx + Sx\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} + \frac{\|Sx\|_F}{\|x\|_E} \right) \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|_F}{\|x\|_E}$$

$$= \|T\| + \|S\|.$$

(N4): Om $T \equiv 0$, så är det klart att $\|T\| = 0$.
Antag att $T \not\equiv 0$. Då finns ett $x \in E$ med $Tx \neq 0$.
Emedan $T(0) = 0$ följer att $x \neq 0$. Vidare är $\|Tx\|_F \neq 0$.
och $\|x\| \neq 0$. Alltså

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \neq 0.$$

Således är $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ en norm och $L(E,F)$ ett normerat vektorrum.

<u>Lemma 2</u> Låt E och F vara normerade vektorrum. Då gäller att

$$\|T\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F \quad , T \in L(E,F).$$

<u>Bevis:</u> Vi har $\|T\|_{L(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$. Sätt $\lambda = 1/\|x\|_E$ och $y = \lambda x$, $x \neq 0$. Då gäller

$$\|y\|_E = \|\lambda x\|_E = |\lambda| \, \|x\|_E = 1 ,$$

och

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \lambda \|Tx\|_F = \|\lambda Tx\|_F = \|T(\lambda x)\|_F = \|Ty\|_F$$

Alltså $\|T\|_{L(E,F)} = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\|_F$

Klart att $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_F = \|T\|_{L(E,F)}$.

Låt $\|x\| \leq 1$ och sätt $y = \frac{x}{\|x\|_E}$, $x \neq 0$. Då gäller

$$\|T(x)\|_F = \|x\|_E \|Ty\|_F \leq \|x\|_E \|T\|_{L(E,F)} ,$$

ty $\|y\|_F = 1$. Alltså $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)}$, och påståendet är bevisat.

<u>Anmärkning</u> Låt $T \in L(E,F)$. Om $x \in E$ och $x \neq 0$, så är $\| x \, \|x\|_E^{-1} \|_E = 1$, varför

$$\|Tx\|_F = \|x\|_E \, \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)} \|x\|_E .$$

Alltså:

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)} \|x\|_E \quad \forall x \in E .$$

Lemma 3 Låt E, F och G vara normerade rum och $T \in L(E,F)$, $S \in L(F,G)$. Den sammansatta avbildningen $ST := S \circ T : E \to G$ definierar en operator $ST \in L(E,G)$ och

$$\|ST\|_{L(E,G)} \leq \|S\|_{L(F,G)} \|T\|_{L(E,F)}. \qquad (4)$$

Bevis: Klart att ST är linjär. Om $x \in E$ och $\|x\|_E \leq 1$, så gäller

$$\|STx\|_G \overset{\downarrow}{\leq} \|S\|_{L(F,G)} \|Tx\|_F \leq \|S\|_{L(F,G)} \|T\|_{L(E,F)} < \infty.$$

Alltså $ST \in L(E,G)$ och (4) gäller.

Exempel Låt oss betrakta det normerade rummet $E = (C([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ med normen $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Rummet $F = C^1([0,1],\mathbb{C}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : f$ är kontinuerligt deriverbar i $[0,1]\}$ är ett underrum av E. I detta rum ska man inte använda den inducerade normen $\|\cdot\|_\infty$, utan istället

$$\|f\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})} = \max_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

Orsaken är att då blir F ett fullständigt rum. Vi återkommer senare till detta begrepp. Följande gäller för $f, g \in C^1([0,1],\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$:
$(\alpha f)' = \alpha f'$ och $(f+g)' = f' + g'$

(N1) $\|f\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})} \geq 0$ är klart

(N2) $\|\alpha f\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})} = \max_{x\in[0,1]} (|\alpha f(x)| + |\alpha f'(x)|) = |\alpha| \max_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|) = |\alpha| \|f\|_{C^1}$

(N3) $\|f+g\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})} = \max_{x\in[0,1]} (|f(x)+g(x)| + |f'(x)+g'(x)|) \leq \max_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|g(x)|+|f'(x)|+|g'(x)|)$
$\leq \max_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|) + \max_{x\in[0,1]}(|g(x)|+|g'(x)|) = \|f\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})} + \|g\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})}.$

(N4) $\|f\|_{C^1([0,1],\mathbb{C})} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow f \equiv 0.$

Metriska rum

<u>Definition</u> Låt $X \neq \emptyset$ vara en mgd och $d: X \times X \to \mathbb{R}$ en avbildning som uppfyller följande egenskaper:

(M1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$.

Då kallas d en <u>metrik</u> in X och paret (X,d) eller endast X ett <u>metriskt rum</u>.

<u>Anmärkning</u> Notera att ett metriskt rum <u>inte</u> behöver vara ett vektorrum.

<u>Exempel</u> Enligt Sats 6 är varje normerat vektorrum E el. metriskt rum då metriken d definieras genom

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x,y \in E.$$

Ett normerat rum är alltid försett med denna metrik.

<u>Exempel</u> Låt X beteckna mängden av alla följder $a = (a_1, a_2, \ldots)$, dvs. $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sätt

$$d(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}, \quad a = (a_1, a_2, \ldots), \; b = (b_1, b_2, \ldots) \in X.$$

Notera att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

så $d(a,b) \in \mathbb{R}$.

Klart att (M1), (M2) och (M3) gäller. Återstår att visa (M4):
För varje $n \in \mathbb{N}$ gäller med $a=(a_1,a_2,\dots)$, $b=(b_1,b_2,\dots)$, $c=(c_1,c_2,\dots)$ att

$$\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|} \le \frac{|a_n-c_n|+|c_n-b_n|}{1+|a_n-c_n|+|c_n-b_n|}$$

$$= \frac{|a_n-c_n|}{1+|a_n-c_n|+|c_n-b_n|} + \frac{|c_n-b_n|}{1+|a_n-c_n|+|c_n-b_n|},$$

ty $|a_n-b_n| \le |a_n-c_n|+|c_n-b_n|$ och $\frac{x}{1+x} \le \frac{y}{1+y}$ då $0 \le x \le y$,

Alltså $$\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|} \le \frac{|a_n-c_n|}{1+|a_n-c_n|} + \frac{|c_n-b_n|}{1+|c_n-b_n|}.$$

Då detta gäller för alla $n \in \mathbb{N}$ följer att $d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$.

<u>Exempel</u> Om $X=\mathbb{R}^n$, så är X ett normerat vektorrum (i egenskap av ett unitärt rum) och således ett metriskt rum med metriken

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k-y_k|^2\right)^{1/2}, \; x=(x_1,\dots,x_n) \text{ och } y=(y_1,\dots,y_n).$$

Öppna mängder

Definition Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $a \in X$. Om $r>0$ betecknar vi

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

och kallar $B(a,r)$ en öppen boll med radien $r>0$ och mittpunkten a.

Definition Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subseteq X$.

(a) Punkten $a \in A$ är en inre punkt till A, om det finns ett tal $r>0$ så att $B(a,r) \subseteq A$. Härvid sägs A vara en omgivning av a.

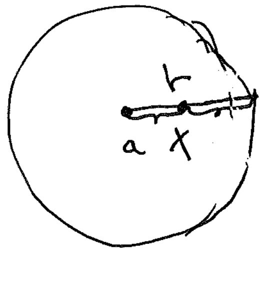
(b) Mängden A är öppen, om varje punkt i A är en inre punkt.

Exempel Om $X = \mathbb{R}$ och $d(x,y) = |x-y|$ och $A = [0,2[$, så är 1 en inre punkt till A men 0 är inte en inre punkt till A.
Om $X = \mathbb{R}^2$ och $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 2,\ x_2 = 0\}$, så saknar A inre punkter. Härvid är $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$.

Sats 8 Om (X,d) är ett metriskt rum och $a \in X$, så är $B(a,r)$ en öppen mängd i X för varje $r>0$.

Bevis: Låt $x \in B(a,r)$. Vi visar att x är en inre punkt till $B(a,r)$.
Nu gäller $d(a,x) < r$. Sätt $\delta = r - d(a,x) > 0$. Då gäller $B(x,\delta) \subseteq B(a,r)$, ty om $y \in B(x,\delta)$ så fås

$$d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \delta = r,$$ dvs. $y \in B(a,r)$.



Alltså $B(a,r)$ är öppen.

Sats 9 Låt (X,d) vara ett metriskt rum. Då gäller:

(i) ϕ är en öppen mängd och X är en öppen mängd.

(ii) Om $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ är en familj av öppna mängder i X, så är $\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$ öppen.

(iii) Om $(A_k)_{k=1}^n$ är en ändlig familj av öppna mängder i X, så är $\bigcap_{k=1}^n A_k$ öppen.

Bevis: (i) följer av definitionen på öppen mängd.

(ii) Tag $x \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$. Då gäller $x\in A_\lambda$ för något $\lambda\in I$. Emedan A_λ är öppen, så finns ett tal $r>0$ så att $B(x,r) \subseteq A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$. Alltså x är en inre punkt till $\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$ och $\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$ är öppen.

(iii) Låt $x \in \bigcap_{k=1}^n A_k$. Emedan $x\in A_k$ för alla $k=1,\dots,n$ och varje A_k är öppen, så kan man välja tal $r_k>0$, $k=1,\dots,n$ med $B(x,r_k)\subseteq A_k$. Sätt $r = \min\{r_k : k=1,\dots,n\}>0$. Då gäller

$$B(x,r) = \bigcap_{k=1}^n B(x,r_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^n A_k,$$

och x är en inre punkt till $\bigcap_{k=1}^n A_k$. Därmed är $\bigcap_{k=1}^n A_k$ öppen.

Exempel Låt $X\neq\phi$ vara en mgd. Då kan man definiera en metrik d på X genom
$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x\neq y \\ 0 & \text{om } x=y. \end{cases}$$

Denna metrik kallas den *diskreta metriken*

Påstående: Alla delmängder $A \subseteq X$ är öppna med avseende på den diskreta metriken.

Låt $A \subseteq X$ och tag godtyckligt $x \in A$. Vi söker $r > 0$ så att $B(x,r) \subseteq A$. Tag $r = \frac{1}{2}$. Då gäller

$$B(x, \tfrac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A,$$

varför $x \in A$ är en inre punkt till A och A är öppen.

Slutna mängder

<u>Definition</u> En mängd $A \subseteq X$ är <u>sluten</u>, om

$$X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\} \text{ är öppen.}$$

<u>Definition</u> Vi kallar

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$$

en <u>sluten boll</u> med radien $r > 0$ och mittpunkten $a \in X$.

<u>Anmärkning</u> Notera att $B(a,r)$ och $\overline{B}(a,r)$ med $r > 0$ är båda omgivningar av $a \in X$.

Sats 10 Om (X,d) är ett metriskt rum och $a \in X$, så är $\overline{B}(a,r)$ en sluten mängd i X för alla $r>0$.

Bevis: Antag att $x \in X \setminus \overline{B}(a,r)$. Då gäller att $x \notin \overline{B}(a,r)$, dvs. $d(a,x) > r$. Sätt $\varepsilon = d(a,x) - r > 0$. Då gäller

$$B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus \overline{B}(a,r),$$

ty om $y \in B(x,\varepsilon)$ så fås

$$d(y,a) \geq d(a,x) - d(y,x) > d(a,x) - \varepsilon = r,$$

dvs. $y \notin \overline{B}(a,r)$. Alltså $X \setminus \overline{B}(a,r)$ är en öppen mängd och därmed är $\overline{B}(a,r)$ en sluten mängd.

Sats 11 Låt (X,d) vara ett metriskt rum. Då gäller

(i) $\emptyset$ och X är slutna.

(ii) Om F_λ är slutna mängder för alla $\lambda \in I$, så är $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ sluten

(iii) Om $F_1, \ldots, F_n$ är slutna mängder, så är $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ en sluten mängd

Bevis: Vi använder de Morgans regler: För en godtycklig indexmängd I gäller

$$X \setminus \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in I} (X \setminus A_\lambda) \quad \text{och} \quad X \setminus \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in I} (X \setminus A_\lambda).$$

(i) Emedan $\emptyset$ och X är öppna samt $X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus X = \emptyset$, får att $\emptyset$ och X är slutna.

(ii) Emedan $X \setminus F_\lambda$ är öppna mängder för alla $\lambda \in I$ följer enligt Sats 9 att $\bigcup_{\lambda \in I} (X \setminus F_\lambda) = X \setminus \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ är öppen. Alltså $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ är sluten.

(iii) Visas analogt

Definition Låt (X,d) vara ett metriskt rum och låt $A \subseteq X$.

(a) $x \in A$ är en *isolerad punkt* av A om det existerar ett $r>0$ så att $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

(b) $x \in X$ kallas en *hopningspunkt* av A, om det för varje $r>0$ gäller att $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

(c) *Slutna höljet* $\bar{A}$ av A utgör snittet av alla slutna delmängder i X vilka innehåller A.

Exempel Punkten 0 är en hopningspunkt till mängden $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Sats 12 Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subseteq X$.

(i) $\bar{A}$ är den minsta slutna mängden som innehåller A.

(ii) A är sluten om och endast om $A = \bar{A}$.

(iii) $\bar{A}$ är unionen av A och A:s alla hopningspunkter.

Bevis: (i) Låt Φ beteckna mängden av alla slutna delmängder i X vilka innehåller A. Då är

$$A \subseteq \bigcap_{F \in \Phi} F = \bar{A}.$$

Enligt Sats 11 (ii) är $\bar{A}$ sluten. Tag godtyckligt $F_0 \in \Phi$. Då gäller $\bar{A} = \bigcap_{F \in \Phi} F \subseteq F_0$.

(ii) Om $A = \bar{A}$, så är A sluten enligt (i). Om A är sluten, så är $\bar{A} \subseteq A$ enligt (i) och emedan vi alltid har $A \subseteq \bar{A}$, följer att $\bar{A} = A$.

(iii) Låt $x \in X$ vara en hopningspunkt av A. Vi visar att $x \in \overline{A}$.
Antites: $x \in X \setminus \overline{A}$. Sätt $F := \overline{A}$. Då är $F \subseteq X$ sluten och $x \notin F$ samt $A \subseteq F$. Emedan $X \setminus F$ är öppen gäller att $(X \setminus F) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$, vilket strider mot att $A \subseteq F$.
Omvänt, tag $x \in \overline{A}$. Vi visar att $x \in A$ eller att x är en hopningspunkt av A. Antag att $x \notin A$. Låt $r > 0$. Om $B(x,r) \cap A = \emptyset$, så är $X \setminus B(x,r)$ en sluten mängd som innehåller A, varför $x \in X \setminus B(x,r)$. Detta är omöjligt, varför $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Emedan $x \notin A$ följer att $B(x,r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$.
Alltså x är en hopningspunkt av A.

<u>Definition</u> Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subseteq X$.

(a) Det <u>inre</u> av A består av alla inre punkter till A och betecknas A°.

(b) Det <u>yttre</u> av A består av alla punkter som är inre punkter till $X \setminus A$.

(c) De återstående punkterna kallas <u>randpunkter</u>.

Konvergens

<u>Definition</u> En följd $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a(n))_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$, där (X,d) är ett metriskt rum, <u>konvergerar</u> mot ett gränsvärde $a \in X$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $n_0 \in \mathbb{N}$ så att

$$d(a_n, a) < \varepsilon, \text{ dvs. } a_n \in B(a,\varepsilon) \text{ för alla } n \geq n_0.$$

Detta betecknar vi $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eller $a_n \to a$ i X då $n \to \infty$.
En följd sägs vara <u>konvergent</u> om den har ett gränsvärde i X.

Exempel Låt E vara ett normerat rum med metriken $d(x,y) = \|x-y\|$. Nu gäller att $a_n \in B(a,\varepsilon) = \{x \in E : d(x,a) < \varepsilon\} \Leftrightarrow d(a_n,a) < \varepsilon$ $\Leftrightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon$.

Sats 13 I ett metriskt rum (X,d) är gränsvärdet till följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ entydigt bestämt, dvs. om $a_n \to a$ och $a_n \to b$, då $n \to \infty$, så är $a = b$.

Bevis: Låt $a,b \in X$ med $a \neq b$. Sätt $r = d(a,b) > 0$. Då gäller att

$$B(a, \tfrac{r}{2}) \cap B(b, \tfrac{r}{2}) = \emptyset,$$

ty antag att $z \in B(a,\frac{r}{2}) \cap B(b,\frac{r}{2})$. Då är

$$r = d(a,b) \leq d(a,z) + d(z,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$ vilket är en motsägelse.

För följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gäller att $a_n \to a$ och $a_n \to b$, då $n \to \infty$, varför det existerar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ med

$$n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in B(a, \tfrac{r}{2})$$

och

$$n \geq n_2 \Rightarrow a_n \in B(b, \tfrac{r}{2}).$$

Alltså för $n \geq \max(n_1,n_2)$ gäller att $a_n \in B(a,\frac{r}{2}) \cap B(b,\frac{r}{2})$, vilket är en motsägelse.

Exempel (a) För en följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i ett metriskt rum (X,d) gäller att $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ om och endast om $\lim_{n\to\infty} d(a_n,a) = 0$.

(b) Låt $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ vara en följd i $\mathbb{R}^n$ med $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$ och $\mathbb{R}^n$ försedd med normen $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$.

För varje $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gäller:

$$\max_{1\leq j\leq n} |x_j| \leq \Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big]^{1/2} \leq \Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |x_i x_j|\Big]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Alltså om $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, så gäller att

$$0 \le |x_j^{(m)} - x_j| \le \Big[\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j)^2\Big]^{1/2} = \|x^{(m)} - x\| \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

varför $\lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$ för alla $j = 1, \ldots, n$.

Omvänt, om $\lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$ för alla $j = 1, \ldots, n$, så gäller

$$0 \le \|x^{(m)} - x\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j| \xrightarrow{m\to\infty} 0, \text{ varför } \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x.$$

Speciellt gäller i $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ att $\lim_{k\to\infty} (x_k + i y_k) = x + iy$ om och endast om $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ och $\lim_{k\to\infty} y_k = y$, då $x_k, y_k, x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Låt $X \neq \emptyset$ och betrakta det normerade vektorrummet $B(X, \mathbb{C})$ av begränsade funktioner från X till $\mathbb{C}$ med normen

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|, \quad f \in B(X, \mathbb{C}).$$

Låt $f_n, f \in B(X, \mathbb{C})$ och antag att $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $B(X, \mathbb{C})$, dvs. $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Alltså följden $(f_n)_{n\ge1}^{\infty}$ konvergerar likformigt i X mot f.

(d) Låt $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vara försedd med metriken

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(n) - g(n)|}{1 + |f(n) - g(n)|}, \quad f, g \in X.$$

Låt $f, f_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$. Vi visar att $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ med avseende på d om och endast om $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$ för all $n \in \mathbb{N}$.

Antag att $\lim_{k\to\infty} f_k = f$. Emedan

$$a_k := \frac{1}{2^n} \frac{|f_k(n) - f(n)|}{1 + |f_k(n) - f(n)|} \le d(f_k, f)$$

följer att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Således, för varje $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_k(n) - f(n)| = \frac{2^n \cdot a_k}{1 - 2^n a_k} \to 0, \text{ då } k \to \infty.$$

Omvänt, antag att $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.
Låt $\varepsilon > 0$. Välj n_1 så att $\sum_{n \geq n_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$. Sedan väljer vi $k_0 \in \mathbb{N}$ så att

$$\frac{|f_k(n) - f(n)|}{2^n(1 + |f_k(n) - f(n)|)} < \frac{\varepsilon}{2n_1} \quad \text{för alla } n = 1, \dots, n_1, \text{ då } k \geq k_0.$$

Nu följer

$$d(f_k, f) = \sum_{n=1}^{n_1} \frac{1}{2^n} \frac{|f_k(n) - f(n)|}{1 + |f_k(n) - f(n)|} + \sum_{n \geq n_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_k(n) - f(n)|}{1 + |f_k(n) - f(n)|}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \geq n_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{för } k \geq k_0.$$

Alltså $f_k \to f$, då $k \to \infty$, med avseende på d.

Slutna mängder (fortsättning)

Sats 14 Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subseteq X$.
För punkten $x \in X$ är följande tre villkor ekvivalenta:

(i) x är en hopningspunkt av A.

(ii) Det finns en följd (a_n) i A med $a_n \neq x$ för alla $n \in \mathbb{N}$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

(iii) För varje $\varepsilon > 0$ gäller att $B(x,\varepsilon)$ innehåller oändligt många av A:s punkter.

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Antag (i). För varje $n \in \mathbb{N}$ finns det $a_n \in (B(x,\frac{1}{n}) \setminus \{x\}) \cap A$. Emedan $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$ och $a_n \neq x$ gäller att $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Antag (ii). Låt $\varepsilon > 0$. Om mängden

$$B(x,\varepsilon) \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \text{ är ändlig,}$$

så skulle $r = \min_n d(a_n, x) > 0$, ty $x \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alltså $B(x,r) \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, vilket strider mot att $a_n \to x$, då $n \to \infty$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Om (iii) gäller, så innehåller varje $B(x,\varepsilon)$ punkter av A som är olika x. Alltså är x en hopningspunkt.

Definition Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subseteq X$. Punkten $x \in X$ kallas en höljepunkt av A, om det för varje $r > 0$ gäller att $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Sats 15 Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A \subseteq X$.

(i) Punkten $x \in X$ är en höljepunkt av A om och endast om det finns en följd i A som konvergerar mot x.

(ii) $x \in \overline{A}$ om och endast om det finns en följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i A med $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

(iii) A är sluten om och endast om $\lim_{n\to\infty} a_n = x \in A$ för varje konvergent följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i A.

Bevis: (i) "$\Leftarrow$" Låt $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.
För varje $r>0$ finns ett $n_r \in \mathbb{N}$ så att $a_n \in B(x,r)$ för $n \geq n_r$, varför $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Alltså är x en höljepunkt.
"$\Rightarrow$" Låt x vara en höljepunkt av A. Till varje $n \in \mathbb{N}$ har då $a_n \in B(x,\tfrac{1}{n}) \cap A$. Då $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$ följer att $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

(ii) "$\Rightarrow$" Låt $x \in \overline{A}$. Om $x \in A$, sätt $a_n = x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Om $x \notin A$, så är x en hopningspunkt och påståendet följer från Sats 14 (i)$\Rightarrow$(ii).
"$\Leftarrow$" Omvänt, antag att $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ och varje $a_n \in A$. Om $x \in A$, så gäller $x \in \overline{A}$. Om $x \notin A$, så är varje $a_n \neq x$ och Sats 14 (ii) $\Rightarrow$ (i) och Sats 12 (iii) ger påståendet.

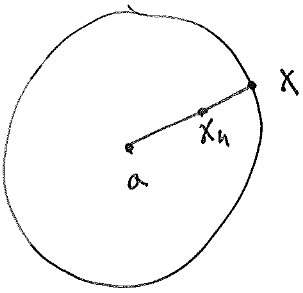
(iii) Antag att $\overline{A} = A$ och låt $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ med $a_n \to x \in X$, då $n \to \infty$. Enligt (ii) gäller att $x \in \overline{A}$. Alltså $x \in A$.

För att visa omvändningen, antar vi att $A \neq \overline{A}$. Då finns $y \in \overline{A}$ men $y \notin A$. Enligt (ii) hittar vi en följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i A med $a_n \to y$, då $n \to \infty$. Vi har fått en konvergent följd (a_n) i A med gränsvärde $y \notin A$. Detta är en motsägelse, varför $A = \overline{A}$.

Sats 16 Låt E vara ett normerat vektorrum och $a \in E$ samt $r>0$. Då gäller att $\bar{B}(a,r) = \overline{B(a,r)}$.

Bevis: Emedan $\bar{B}(a,r)$ är sluten, så följer från Sats 12 (ii) att $\overline{B(a,r)} \subseteq \bar{B}(a,r)$, emedan $B(a,r) \subseteq \bar{B}(a,r)$.

Omvänt, bör vi ännu visa att $\bar{B}(a,r) \subseteq \overline{B(a,r)}$. Låt $d(a,x) = \|a-x\|$.
Tag $x \in \bar{B}(a,r)$, dvs. $d(a,x) \le r$. Om $d(x,r) < r$, så $x \in B(a,r) \subseteq \overline{B(a,r)}$.
Därför kan vi anta att $d(x,a) = r$, dvs. $\|x-a\| = r$.



Vi väljer nu punkter x_n mellan a och x.
Sätt $x_n = a + (1-\frac{1}{n})(x-a)$. Nu gäller
$\|x_n - a\| = \|(1-\frac{1}{n})(x-a)\| = (1-\frac{1}{n})r < r$, dvs.
varje $x_n \in B(a,r)$. Vidare,

$$\|x_n - x\| = \|a + (1-\tfrac{1}{n})(x-a) - x\| = \|\cancel{a} + \cancel{x} - \cancel{a} - \tfrac{x}{n} + \tfrac{a}{n} - \cancel{x}\|$$
$$= \tfrac{1}{n}\|x-a\| = \tfrac{1}{n}\cdot r \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

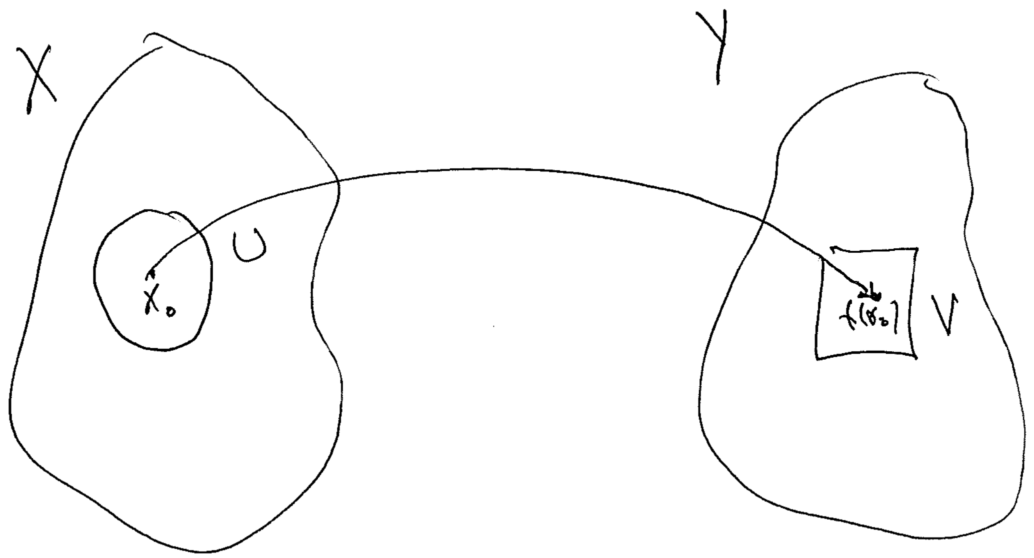
Från Sats 15 (ii) följer nu att $x \in \overline{B(a,r)}$. Alltså $\bar{B}(a,r) \subseteq \overline{B(a,r)}$.

Anmärkning I allmänna metriska rum (X,d) kan $\overline{B(x,r)}$ vara en *äkta* delmängd av $\bar{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \le r\}$.
Till exempel, låt $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ med metriken $d(x,y) = 0$ för $x=y$ och $d(x,y) = 1$ för $x \ne y$. För $x=0$ och $r=1$ fås $\bar{B}(0,1) = \{x \in X : d(0,x) \le 1\} = X$ och $B(0,1) = \{0\} = \overline{B(0,1)}$.

II. Kontinuitet och gränsvärde

En avbildnings kontinuitet

<u>Definition</u> Låt X och Y vara metriska rum. Vi säger att avbildningen $f: X \to Y$ är <u>kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$</u>, om till varje omgivning V av punkten $f(x_0) \in Y$ finns en omgivning U av x_0 med $f(x) \in V$ för alla $x \in U$, dvs. $f(U) \subseteq V$.



<u>Sats 17</u> Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum. Avbildningen $f: X \to Y$ är kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$ om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ hör ett $\delta > 0$ så att

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon),$$

dvs. $e(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ alltid då $d(x, x_0) < \delta$.

<u>Bevis:</u> "$\Rightarrow$" Antag att f är kontinuerlig i x_0 och låt $\varepsilon > 0$. Emedan $B(f(x_0), \varepsilon)$ är öppen och därmed en omgivning av $f(x_0)$, så finns det en omgivning U av x_0 så att $f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.

Nu finns det ett $\delta > 0$ med $B(x_0, \delta) \subseteq U$, varför

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

"$\Leftarrow$" Omvänt, antag att ε-δ-villkoret gäller. Om V är en omgivning av $f(x_0)$, så finns ett $\varepsilon > 0$ med $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Låt nu $\delta > 0$ vara sådan att

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V.$$

Välj $U = B(x_0, \delta)$, ty $B(x_0,\delta)$ är öppen och följaktligen en omgivning av x_0. Därmed är påståendet bevisat.

<u>Definition</u> Låt X och Y vara metriska rum. Avbildningen $f: X \to Y$ är <u>kontinuerlig</u> om den är kontinuerlig i varje punkt i X.

<u>Exempel</u> (a) För alla metriska rum X och Y är varje konstant avbildning $f: X \to Y$ kontinuerlig. Ty, om $f(x) = a$ $\forall x \in X$ och V är en omgivning av a, så är $U = X$ en omgivning av x_0 med $f(U) \subseteq V$.

(b) Om X är ett diskret metriskt rum, så gäller för alla metriska rum Y att varje avbildning $f: X \to Y$ är kontinuerlig, ty för alla $x_0 \in X$ är $\{x_0\}$ en omgivning av x_0 i X.

<u>Sats 18</u> Låt X, Y vara metriska rum, $A \subseteq X$ och $f: X \to Y$ en avbildning. Om x_0 är en höljepunkt av A och f är kontinuerlig i x_0, så är $f(x_0)$ en höljepunkt av $f(A)$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$ och betrakta omgivningen $B(f(x_0), \varepsilon)$ av $f(x_0)$. Emedan $f: X \to Y$ är kontinuerlig i $x_0 \in X$, så finns ett $\delta > 0$ med

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Då x_0 är en höljepunkt av A, så finns $x \in B(x_0, \delta) \cap A$. Emedan $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \cap f(A)$ följer att $B(f(x_0), \varepsilon) \cap f(A) \neq \emptyset$. Alltså $f(x_0)$ är en höljepunkt till $f(A)$.

Sats 19 Låt X, Y, Z vara metriska rum och $f: X \to Y$ och $g: Y \to Z$ avbildningar. Om f är kontinuerlig i $x_0 \in X$ och g är kontinuerlig i punkten $f(x_0) \in Y$, så är den sammansatta avbildningen $g \circ f$ kontinuerlig i punkten x_0.

Bevis: Låt W vara en omgivning av punkten $g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. Emedan g är kontinuerlig i $f(x_0)$, så finns det en omgivning V av $f(x_0)$ med $g(V) \subseteq W$. Vidare, emedan f är kontinuerlig i punkten x_0, så finns en omgivning U av x_0 med $f(U) \subseteq V$. Alltså om $x \in U$, så $f(x) \in V$ varför $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in W$.

Sats 20 Låt X och Y vara metriska rum. För avbildningen $f: X \to Y$ är följande villkor ekvivalenta:

(i) f är kontinuerlig.

(ii) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ för varje $A \subseteq X$.

(iii) inversa bilden $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$ av varje sluten mängd F i Y är sluten i X.

(iv) inversa bilden $f^{-1}(G)$ av varje öppen mängd G i Y är öppen i X.

Bevis: Vi visar, (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii): Om f är kontinuerlig och $x \in \overline{A}$, så är $f(x)$ en höljepunkt till $f(A)$ (Sats 18). Enligt Sats 15 gäller då att $f(x) \in \overline{f(A)}$, varför $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ii) ⇒ (iii): Antag (ii). Låt $F \subseteq Y$ vara sluten. Vi tillämpar (ii) på mängden $A = f^{-1}(F)$. Emedan $f(f^{-1}(F)) \subseteq F$ och F är sluten, så gäller $\overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$. Enligt (ii) fås:

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq F \text{ eller } \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F),$$

varför $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$. Således är $f^{-1}(F)$ sluten enligt Sats 12.

(iii) ⇒ (iv): Låt $G \subseteq Y$ vara öppen. Då är $Y \setminus G$ sluten. Enligt (iii) fås att $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ är sluten, varför $f^{-1}(G)$ är öppen.

(iv) ⇒ (i): Låt $x_0 \in X$ och låt V vara en omgivning av $f(x_0)$. Då finns $\delta > 0$ så att $B(f(x_0), \delta) \subseteq V$. Om (iv) gäller, så är mängden $U := f^{-1}(B(f(x_0), \delta))$ öppen och $x_0 \in U$. Vidare $f(U) \subseteq B(f(x_0), \delta) \subseteq V$. Alltså f är kontinuerlig i en godtycklig punkt x_0.

Exempel Låt E vara ett normerat rum. Emedan

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

är norm $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ kontinuerlig i E. Alltså $\overline{B}(0,r) = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ är sluten, ty $\overline{B}(0,r)$ är inversa bilden av den slutna mängden $[0,r]$ med avseende på den kontinuerliga avbildningen $x \mapsto \|x\|$.

Anmärkning Enligt Sats 20 är inversa bilden av en öppen resp. sluten mängd med avseende på en kontinuerlig avbildning alltid öppen resp. sluten.

Å andra sidan behöver en kontinuerliga avbildningens bild av en öppen resp. sluten mängd inte vara öppen resp. sluten.

Låt $d(x,y) = |x-y|$ i $\mathbb{R}$ och e den diskreta metriken i $\mathbb{R}$. Då är identiteten $id : (\mathbb{R}, e) \to (\mathbb{R}, d)$ kontinuerlig (se tidigare exempel). Mängden $\{0\}$ är öppen i $(\mathbb{R}, e)$ men inte i $(\mathbb{R}, d)$ och mängden $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ är sluten i $(\mathbb{R}, e)$ men inte i $(\mathbb{R}, d)$.

Följdkontinuitet

Sats 21 Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum. Avbildningen $f : X \to Y$ är kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$ om och endast om för varje följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i X med $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gäller att $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot punkten $f(x_0)$ i Y.

Bevis: "$\Rightarrow$" Låt f vara kontinuerlig i x_0 och låt $\varepsilon > 0$. Enligt Sats 17 hittar vi ett $\delta > 0$ så att

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon).$$

Om $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, så existerar $n_0 \in \mathbb{N}$ med $x_n \in B(x_0,\delta)$ för $n \geq n_0$. Alltså $f(x_n) \in B(f(x_0),\varepsilon)$ för alla $n \geq n_0$.

"$\Leftarrow$" Antag att för varje följd (x_n) med $\lim_n x_n = x_0$ gäller att $(f(x_n))$ konvergerar mot $f(x_0)$.

Antag att f ej är kontinuerlig i x_0. För något $\varepsilon > 0$ finns det inte något $\delta > 0$ sådant att

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon).$$

Speciellt, om $n \in \mathbb{N}$ och $\delta = \frac{1}{n}$ så finns det $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ med $f(x_n) \notin B(f(x_0),\varepsilon)$. För denna följd (x_n) gäller att $d(x_n,x_0) < \frac{1}{n} \to 0$, dvs. $\lim_n x_n = x_0$. Men följden $(f(x_n))$ kan inte konvergera mot $f(x_0)$, då $f(x_n) \notin B(f(x_0),\varepsilon)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Denna motsägelse visar att f är kontinuerlig i punkten x_0.

<u>Sats 22</u> Låt E, F vara normerade vektorrum och låt $T: E \to F$ vara en <u>linjär</u> avbildning. Då är följande villkor ekvivalenta:

(i) T är kontinuerlig.

(ii) T är kontinuerlig i 0.

(iii) $\sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| < \infty$.

(iv) Det finns en konstant $0 < M < \infty$, så att

$$\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x \in E.$$

<u>Bevis:</u> Klart att (i) $\Rightarrow$ (ii). Om (iii) inte gäller, så för varje $n \in \mathbb{N}$ hittar vi ett $x_n \in X$ med $\|x_n\| \le 1$ med $\|Tx_n\| \ge n$. Emedan $\|T(\frac{1}{n}x_n)\| \ge 1$ fastän $\frac{1}{n}x_n \to 0$, då $n \to \infty$, kan T inte vara kontinuerlig i punkten 0 (Sats 17).

Om (iii) gäller, så väljer vi $M = \|T\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| < \infty$ och (iv) gäller enligt tidigare anmärkning.

Slutligen (iv) $\Rightarrow$ (i), ty $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le M\|x-y\| \quad \forall x,y \in E$.

Sats 23 Om F är ett reellt normerat rum, så är varje linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to F$ kontinuerlig.

Bevis: Från matriskursen vet vi att $T(\mathbb{R}^n) \subseteq F$ är ändligt dimensionellt, då $\dim \mathbb{R}^n = n$.
Låt $\{u_1, \dots, u_m\}$ vara en bas i $T(\mathbb{R}^n)$ (vi kan utan att inskränka på allmängiltigheten anta att $\dim T(\mathbb{R}^n) > 0$). Då existerar det entydigt definierade linjära avbildningar $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, så att

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Varje f_i är kontinuerlig, ty för $e_j = (0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$ gäller

$$|f_i(x_1, \dots, x_n)| = \left|f_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j f_i(e_j)|$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} f_i(e_j)^2\right)^{1/2}}_{:= K < \infty} = K \|x\|,$$

varför $\|f_i\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in \mathbb{R}^n}} |f_i(x)| \leq K < \infty$. Alltså

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| \, \|u_i\| \leq \|x\| \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \|f_i\| \, \|u_i\|}_{:= M} = M \|x\|$$

och $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq M < \infty$ och T är kontinuerlig enligt Sats 22.

Exempel I ett metriskt rum (X,d) är avståndet från en given punkt $a\in X$ en kontinuerlig funktion, dvs. $f: X\to\mathbb{R}$, $f(x)=d(a,x)$, $x\in X$, är kontinuerlig.

Bevis: Om $x_1,x_2\in X$, så gäller $d(a,x_1)\le d(a,x_2)+d(x_2,x_1)$ och $d(a,x_2)\le d(a,x_1)+d(x_1,x_2)$. Alltså

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |d(a,x_1)-d(a,x_2)| \le d(x_1,x_2).$$

Vi skall nu generalisera detta exempel.

Definition Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $\emptyset\ne A\subseteq X$.

(a) Om $c\in X$, så kallas $d(c,A)=\inf\{d(c,x): x\in A\}$ avståndet från c till mängden A.

(b) Om $\emptyset\ne B\subseteq X$, så ges avståndet mellan mängderna A och B av talet

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A,\ y\in B\}.$$

Sats 24 Om (X,d) är ett metriskt rum och $\emptyset\ne A\subseteq X$, så är funktionen $x\mapsto d(x,A)$ kontinuerlig i X.

Bevis: För alla $x_1,x_2\in X$ och $y\in A$ gäller:

$$d(x_1,A)\le d(x_1,y)\le d(x_1,x_2)+d(x_2,y),$$

varför $d(x_1,A)\le d(x_1,x_2)+\inf\limits_{y\in A} d(x_2,y) = d(x_1,x_2)+d(x_2,A)$.

Alltså $d(x_1,A)-d(x_2,A)\le d(x_1,x_2)$.

På grund av symmetrin gäller också $d(x_2,A)-d(x_1,A)\le d(x_2,x_1)=d(x_1,x_2)$, och följaktligen

$$|d(x_1,A)-d(x_2,A)|\le d(x_1,x_2).$$

Härav följer påståendet.

Jämförelse av metriker, homeomorfismer, ekvivalenta metriker och normer samt isometri

Definition Låt d och e vara två metriker på samma mängd X. Vi säger att d är finare än e (och e är grövre än d) om för varje $a \in X$ och varje $r > 0$ finns ett $\varepsilon > 0$ så att

$$B_d(a,\varepsilon) = \{x \in X : d(a,x) < \varepsilon\} \subseteq B_e(a,r) = \{x \in X : e(a,x) < r\}.$$

Om det samtidigt gäller att d är finare än e och e är finare än d, så säger vi att metrikerna d och e är ekvivalenta.

Anmärkning Ur Sats 17 följer att d är finare än e om och endast om identiteten $id : (X,d) \longrightarrow (X,e)$ är kontinuerlig.

Definition Låt (X,d) och (Y,e) vara två metriska rum och $f : X \to Y$ en kontinuerlig bijektion, vars inversa avbildning $f^{-1} : Y \to X$ också är kontinuerlig. Då säger vi att f är en homeomorfism från X till Y. Om det existerar en homeomorfism från X till Y säger vi att X och Y är sinsemellan homeomorfa.

Sats 25 Låt d och e vara två metriker i X. Följande villkor är ekvivalenta:

(i) metrikerna d och e är ekvivalenta.

(ii) de metriska rummen (X,d) och (X,e) har samma öppna mängder.

(iii) de metriska rummen (X,d) och (X,e) har samma slutna mängder.

(iv) den identiska avbildningen $id : (X,d) \to (X,e)$ är en homeomorfism

(v) en följd (x_n) i X konvergerar mot x i (X,d) om och endast om (x_n) konvergerar mot x i (X,e)

(vi) samma följder konvergerar i rummen (X,d) och (X,e)

Bevis: (i) ⟺ (ii) enligt definitionen på öppen mängd.
(ii) ⟺ (iii) enligt definition på sluten mängd.
Vidare är det klart att (i) ⟺ (iv).
Sats 21 ger att (iv) ⟺ (v). Klart att (v) ⟹ (vi).
Antag att (vi) gäller. Vi visar att (v) gäller.
Låt $\lim_n x_n = x$ i (X,d). Enligt (vi) finns det ett $y \in X$ med $\lim_n e(x_n, y) = 0$. Vi visar att $x = y$.

Betrakta följden $x_1, x, x_2, x, x_3, x, x_4, \ldots$. Denna följd konvergerar också mot x i (X,d) på enligt antagandet är den också konvergent i (X,e). Emedan varje delföljd av en konvergent följd konvergerar mot den ursprungliga följdens gränsvärde, konvergerar följden $x, x, x, \ldots$ mot följden (x_n):s gränsvärde i (X, e), varför $x = y$. På motsvarande sätt visar man att ur villkoret $\lim_n e(x_n, x) = 0$ följer att $\lim_n d(x_n, x) = 0$.

Definition Vi säger att normerna $x \mapsto \|x\|$ och $x \mapsto \|x\|'$ i ett vektorrum E är ekvivalenta om metrikerna $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ och $(x,y) \mapsto \|x-y\|'$ som de definierar på E är ekvivalenta.

Sats 26 Låt E vara ett vektorrum med två normer $\|\cdot\|$ och $\|\cdot\|'$. Då är $\|\cdot\|$ och $\|\cdot\|'$ ekvivalenta om och endast om det finns konstanter $m > 0$ och $M > 0$ så att

$$m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Bevis: Följer direkt av Sats 25 (i) ⟺ (iv) och Sats 22.

Anmärkning Det är lätt att se att metrikerna d och e i X är ekvivalenta, om det existerar $m, M > 0$ så att

$$m\, d(x,y) \leq e(x,y) \leq M\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

I motsats till norm situationen, så är detta villkor i allmänhet inte nödvändigt.

Definition Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum. Avbildningen $f: X \to Y$ är en isometri om

$$e(f(x), f(y)) = d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Om det existerar en surjektiv isometri $f: X \to Y$ så säger man att de metriska rummen (X,d) och (Y,e) är isometriska.

Anmärkning Klart att en isometri är injektiv och att en surjektiv isometri är en homeomorfism.

Likformigt kontinuitet och likformigt ekvivalenta metriker

Definition Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum. Avbildningen $f: X \to Y$ är likformigt kontinuerlig om till varje $\varepsilon > 0$ hör ett $\delta > 0$ så att $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$ alltid då $d(x,y) < \delta$.

Klart att varje likformigt kontinuerlig funktion är kontinuerlig.

Omvändningen gäller ej som följande exempel visar.

Exempel Definiera $f : [0,1[\to [0,\infty[$ genom $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Då är f kont., strängt växande bijektion, vars inversa funktion $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$ också är kontinuerlig.
Alltså f är en homeomorfism från $[0,1[$ till $[0,\infty[$. Men f är ej likformigt kontinuerlig. Motivering:
Betrakta följderna $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $y_n = 1 - \frac{2}{n}$. För varje n gäller:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - \frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \right| = \left|n - \frac{n}{2}\right| = \frac{n}{2}$$

och $|x_n - y_n| = \left|-\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$, då $n \to \infty$.

Definition Metrikerna d och e i mängden X är likformigt ekvivalenta, om $id : X \to X$ är likformigt kontinuerlig både från (X,d) till (X,e) och (X,e) till (X,d).

Exempel Om $f : [0,1[\to [0,\infty[$ är som i ovanstående exempel kan man definiera

$$e(x,y) = |f(x) - f(y)| \quad , x,y \in [0,1[.$$

Då är e en metrik i $[0,1[$, emedan $(u,v) \mapsto |u-v|$ är en metrik i $[0,\infty[$ och f är en bijektion. Vidare följer att e är ekvivalent med $[0,1[$:s vanliga metrik $d(x,y) = |x-y|$ (Sats 25). Men d och e är inte likformigt ekvivalenta.

Sats 27 (a) Om E och F är normerade vektorrum och $T: E \to F$ är en linjär avbildning som är kontinuerlig i punkten 0, så är T likformigt kontinuerlig.

(b) Om normerna $\|\cdot\|$ och $\|\cdot\|'$ på vektorrummet E är ekvivalenta, så är metrikerna som de definierar likformigt ekvivalenta.

Bevis: (a) Vi vet att $\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| < \infty$, så påståendet följer av olikheten

$$\|Tx - Ty\| \le \|T\| \, \|x-y\| \quad \forall x,y \in E.$$

(b) Följer direkt ur (a)-fallet och Sats 26.

Sats 28 Metrikerna d och e på mängden X är likformigt ekvivalenta, om det existerar $m>0$ och $M>0$ med

$$m \cdot d(x,y) \le e(x,y) \le M \, d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Bevis: Följer direkt från definitionen av likformigt ekvivalenta

Kartesiska produkten av metriska rum

Definition Om $X_1, X_2, \dots, X_n$ är icke-tomma mängder och $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$ är deras kartesiska produkt, så sägs avbildningen $pr_j = pr_{X_j} : X \to X_j$, $pr_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$, $j = 1, \dots, n$, vara X:s projektion på X_j för varje $j = 1, \dots, n$.

Sats 29 Låt $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ vara metriska rum och $X = X_1 \times \dots \times X_n$. För alla $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ och $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ låt

(1) $$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)^2 \right)^{1/2}$$

(2) $$d'(x,y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j) \quad \text{och}$$

(3) $$d''(x,y) = \max_{1 \le j \le n} d_j(x_j, y_j).$$

Då är d, d' och d'' metriker i X. För varje $x, y \in X$ gäller

(4) $$d''(x,y) \le d(x,y) \le d'(x,y) \le \sqrt{n}\, d(x,y) \le n\, d''(x,y),$$

varför speciellt gäller att d, d' och d'' är sinsemellan likformigt ekvivalenta.

Bevis: Vi visar att d är en metrik. Att d' och d'' är metriker lämnas som övning åt läsaren. Klart att d uppfyller axiomen (M1)-(M3). Återstår att visa M4: Om $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ och $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ samt $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$ så får vi genom att tillämpa triangelolikheten i $\mathbb{R}^n$ på vektorerna $(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n))$ och $(d_1(y_1, z_1), \dots, d_1(y_n, z_n))$:

$$d(x,z) = \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,z_j)^2\Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{j=1}^{n} \big(d_j(x_j,y_j)+d_j(y_j,z_j)\big)^2\Big)^{1/2}$$

Minkowskis olikhet. (Cauchy-Schwarz olikhet då $p=2$)

$$\le \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(y_j,z_j)^2\Big)^{1/2}$$

$$= d(x,y) + d(y,z).$$

$$\boxed{\text{Cauchy-Schwarz: } \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)\,d_j(y_j,z_j) \le \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(y_j,z_j)^2\Big)^{1/2}}$$

Vi visar ännu (4): För varje $j=1,\dots,n$ gäller

$$d_j(x_j,y_j) \le d(x,y) \le \Big[\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^2 + 2\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1}}^{n} d_i(x_i,y_i)\,d_j(x_j,y_j)\Big]^{1/2}$$

$$= d'(x,y) = \sum_{j=1}^{n} 1\cdot d_j(x_j,y_j) \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \sqrt{n}\, d(x,y) \le \sqrt{n}\big(n\, d''(x,y)^2\big)^{1/2},$$

varför $d''(x,y) \le d(x,y) \le d'(x,y) \le \sqrt{n}\, d(x,y) \le n\, d''(x,y)$.

Det sista påståendet följer från Sats 28.

<u>Definition</u> Det metriska rummet (X,d), där $X = X_1 \times \dots \times X_n$ och $(x,y) \mapsto \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^2\Big)^{1/2} = d(x,y)$ sägs vara <u>produkten</u> av de metriska rummen (X_j,d_j), $j=1,\dots,n$.

<u>Exempel</u> $\mathbb{R}^n$ försedd med den vanliga metriken är produkten av n stycken rum $\mathbb{R}$.

Lemma 30 Projektionerna $pr_j : X \to X_j$ är likformigt kontinuerliga.

Bevis: Följer från olikheten $d_j(x_j, y_j) \leq d(x,y)$.

Sats 31 Låt (X,d) vara produkten av de metriska rummen (X_j, d_j), $j=1,\dots,n$.

(a) En följd $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ i X konvergerar mot en punkt x i X om och endast om $\lim_{m\to\infty} pr_j(x_m) = pr_j(x)$ för alla $j=1,\dots,n$.

(b) Låt (Y,e) vara ett metriskt rum. Avbildningen $f : Y \to X$ är kontinuerlig i punkten $y_0 \in Y$ om och endast om $pr_j \circ f : Y \to X_j$ är kontinuerlig i $y_0 \in Y$ för alla $j=1,\dots,n$.

Bevis: (a) Enligt Sats 29 gäller

$$\max_{1\leq j\leq n} d_j(pr_j(x_m), pr_j(x)) \leq d(x_m, x) \leq n \max_{1\leq j\leq n} d_j(pr_j(x_m), pr_j(x)).$$

Alltså $\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) \iff \lim_{m\to\infty} d_j(pr_j(x_m), pr_j(x)) = 0 \quad \forall j=1,\dots,n.$

(b) Om f är kontinuerlig i y_0, så är också $pr_j \circ f$ kontinuerlig i y_0, emedan pr_j är kontinuerlig.
Omvänt, antag att varje $pr_j \circ f$ är kontinuerlig i y_0. Låt $\varepsilon > 0$.
Då kan vi välja $\delta_j > 0$ så att

$$d_j(pr_j(f(y)), pr_j(f(y_0))) < \varepsilon/\sqrt{n} \quad \text{så snart} \quad e(y, y_0) < \delta_j, \ j=1,\dots,n.$$

Sätt $\delta = \min_{1\leq j\leq n} \delta_j > 0$. Om $e(y, y_0) < \delta$, så gäller enligt Sats 29 att

$$d(f(y), f(y_0)) \le \sqrt{n} \max_{1\le j\le n} d_j(pr_j(f(y)), pr_j(f(y_0))) < \sqrt{n}\cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon.$$

Alltså f är kontinuerlig i y_0.

Sats 32 Låt E vara ett normerat rum.

(a) Om $(x_n)_{n\ge1}^{\infty}$ och $(y_n)_{n\ge1}^{\infty}$ är följder i E med $x_n \to x$ och $y_n \to y$ i E, då $n\to\infty$, så gäller att $\lim_n (x_n+y_n) = x+y$ i E.

(b) Avbildningen $(x,y) \longmapsto x+y$ är kontinuerlig med avseende på produkten i $E\times E$.

Bevis: (a) $\|(x_n+y_n) - (x+y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$

(b) Följer från (a)-fallet och satserna 21 och 31.

Sats 33 Låt E, F, G vara normerade rum över $\mathbb{K}$. Låt $p: E\times F \to G$ vara en avbildning sådan att för varje $x, y, w \in E$, $z, u, v \in F$ gäller

$$p(x-y, z) = p(x,z) - p(y,z),$$
$$p(w, u-v) = p(w,u) - p(w,v)$$

och

$$\|p(x,z)\| \le C\,\|x\|\cdot\|z\| \text{ för något } 0<C<\infty.$$

(a) Om $(x_n)_{n\ge1}^{\infty}$ är en följd i E och $(y_n)_{n\ge1}^{\infty}$ en följd i F sådana att $x_n \to x$ och $y_n \to y$, då $n\to\infty$, så gäller $\lim_n p(x_n, y_n) = p(x,y)$.

(b) p är kontinuerlig med avseende på produkten i $E\times F$.

Bevis: (a) $\|p(x_n,y_n) - p(x,y)\| = \|p(x_n,y_n) - p(x_n,y) + p(x_n,y) - p(x,y)\|$
$\le \|p(x_n, y_n-y) + p(x_n-x, y)\| \le C\|x_n\|\,\|y_n-y\| + C\|x_n-x\|\cdot\|y\|$.

Tag $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Då $\exists n_0$ så att $\|x_n - x\| < \frac{1}{2}$ för $n\ge n_0$. Sätt $M = \max(\frac{1}{2}+\|x\|, \|x_1\|, \dots, \|x_{n_0}\|)$.

Då gäller att $\|x_n\| \leq M$ för alla n. Alltså

$$\| p(x_n, y_n) - p(x, y) \| \leq C \cdot M \|y_n - y\| + C\|y\| \|x_n - x\| \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

(b) Följer från (a)-fallet samt satserna 31(a) och 21.

Sats 34 Låt E, F, G och p vara som i Sats 33.
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och låt avbildningarna $f: X \to E$, $g: X \to E$ och $h: X \to F$ vara kontinuerliga i $x_0 \in X$.

(a) Avbildningen $f+g: X \to E$ är kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$.

(b) Avbildningen $x \mapsto p(g(x), h(x))$ är kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$.

(c) Om $f(x_0) \neq 0$ och $E = \mathbb{K}$, så är funktionen $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$, som är definierad i mängden $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$, kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$.

Bevis: (a) $f+g$ är sammansättningen av funktionerna $x \mapsto (f(x), g(x))$ från X till $E \times E$ och $(u, v) \mapsto u + v$ från $E \times E$ till E. Påståendet följer av satserna 31(b), 32 och 19.

(b) Avbildningen $x \mapsto (g(x), h(x))$ är kontinuerlig i x_0 (Sats 31(b)) och p är kontinuerlig (Sats 33(b)), så påståendet följer från Sats 19.

(c) Avbildningen $u \mapsto \frac{1}{u}$ är kontinuerlig i $\mathbb{K} \setminus \{0\}$, varför den sammansatta avbildningen $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ är kontinuerlig i x_0.

Exempel I satserna 33 och 34 kan man t.ex. välja p som avbildningen $\mathbb{K} \times F \to F$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Likformig konvergens och kontinuitet

<u>Definition</u> Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd, (Y, e) ett metriskt rum och $f_n : X \to Y$ en avbildning, $n \in \mathbb{N}$. Vi säger att följden $(f_n)_n$ <u>konvergerar likformigt i mängden $A \subseteq X$</u> mot avbildningen $f : X \to Y$, om till varje $\varepsilon > 0$ hör ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att

$$e(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{för } \underline{\text{varje}}\ x \in A, \text{ då } n \geq n_\varepsilon.$$

Om $X = A$ så säger vi kort att följden $(f_n)_n$ <u>konvergerar likformigt</u> mot avbildningen f. Bet. $f_n \to f$ likf.

<u>Sats 35</u> Med beteckningar som i ovanstående definition.

(a) Följden $(f_n)_n$ konvergerar likformigt i A mot f om och endast om $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} e(f_n(x), f(x)) = 0$.

(b) Om $(f_n)_n$ konvergerar likformigt i A mot f, så konvergerar $(f_n)_n$ likformigt i B mot f för varje delmängd B av A.

(c) Om $(f_n)_n$ konvergerar likformigt i A_i mot f för alla $i = 1, \ldots, m$, där alla $A_i \subseteq X$ och är ett <u>ändligt</u> antal, så konvergerar $(f_n)_n$ likformigt i unionen $\bigcup_{i=1}^m A_i$ mot f.

<u>Bevis:</u> Lätt.

<u>Anmärkning</u> Enligt Sats 35 (c) följer att följden $(f_n)_n$ <u>konvergerar punktvis</u> mot f, dvs. $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$, då $n \to \infty$, om och endast om $(f_n)_n$ konvergerar likformigt i varje <u>ändlig</u> delmängd av X mot f.

(b) Avbildningen $f: X \to Y$ är <u>begränsad</u>, om $f(X)$ är begränsad i Y.

Vi använder följande beteckningar:

$$B(X,Y) = \{f: X \to Y : f \text{ begränsad avbildning}\}$$

och om X är ett metriskt rum,

$$BC(X,Y) = \{f: X \to Y : f \text{ är kontinuerlig och begränsad avbildning}\}.$$

<u>Sats 37</u> Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och (Y,e) ett metriskt rum. Om $f,g \in B(X,Y)$, så är $\sup_{x \in X} e(f(x), g(x)) < \infty$.
Avbildningen $\rho: B(X,Y) \times B(X,Y) \to \mathbb{R}$, definierad genom $\rho(f,g) = \sup_{x \in X} e(f(x), g(x))$, är en metrik i $B(X,Y)$.
Att en följd konvergerar med avseende på denna metrik betyder likformig konvergens för följden.

<u>Bevis</u>: Låt $a_1, a_2 \in Y$ och $r_1, r_2 > 0$ vara sådana att

$$f(X) \subseteq \overline{B}(a_1, r_1) \quad \text{och} \quad g(X) \subseteq \overline{B}(a_2, r_2).$$

Då gäller för alla $x \in X$:

$$e(f(x), g(x)) \leq e(f(x), a_1) + e(a_1, a_2) + e(a_2, g(x)) \leq r_1 + e(a_1, a_2) + r_2,$$

varför $\sup_{x \in X} e(f(x), g(x)) < \infty$.

Klart att $\rho(f,g) \geq 0$ och $\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow e(f(x), g(x)) = 0 \ \forall x \in X$ $\Leftrightarrow f(x) = g(x) \ \forall x \in X \Leftrightarrow f \equiv g$ samt att $\rho(f,g) = \rho(g,f)$.

Sats 36 Låt (X,d) och (Y,e) vara metriska rum. Om $f_n: X \to Y$ är en kontinuerlig funktion i punkten $x_0 \in X$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och $(f_n)_n$ konvergerar likformigt mot en funktion $f: X \to Y$, så är f kontinuerlig i $x_0 \in X$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att $e(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$ för alla $x \in X$, då $n \geq n_\varepsilon$. Emedan f_{n_ε} är kontinuerlig i x_0, kan vi välja $\delta > 0$ så att $e(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) < \varepsilon/3$ då $d(x, x_0) < \delta$. För varje $x \in X$ med $d(x, x_0) < \delta$ gäller:

$$e(f(x), f(x_0)) \leq e(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + e(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + e(f_{n_\varepsilon}(x_0), f(x_0))$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Alltså f är kontinuerlig i x_0.

Exempel Definiera $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ genom $f_n(x) = x^n$. Då gäller $\lim_n f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{om } x = 1. \end{cases}$ Emedan f ej är kontinuerlig fastän alla f_n är kontinuerliga, följer att konvergensen ej är likformig i $[0,1]$.

Funktionsrummen $B(X,Y)$ och $BC(X,Y)$

Definition Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och (Y,e) ett metriskt rum.

(a) Mängden $A \subseteq Y$ är begränsad, om det existerar $a \in Y$ och $r > 0$ så att $A \subseteq \overline{B}(a,r)$. Om Y är ett normerat rum, ~~så~~ gäller att $A \subseteq Y$ är begränsad om och endast om det finns ett $0 < M < \infty$, så att $\|x\| \leq M$ för alla $x \in A$.

Om $f, g, h \in B(X,Y)$ så gäller för alla $x \in X$:

$$e(f(x), h(x)) \leq e(f(x), g(x)) + e(g(x), h(x)) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h),$$

varför $\rho(f,h) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h)$. Alltså ρ är en metrik.

Från Sats 35 (a) följer det sista påståendet i satsen.

<u>Sats 38</u> Om $X \neq \emptyset$ är ett metriskt rum och (Y, e) är ett metriskt rum, så är $BC(X,Y)$ en sluten delmängd i $(B(X,Y), \rho)$, där ρ är metriken definierad i Sats 37.

<u>Bevis</u>: Tag $f \in \overline{BC(X,Y)} \subseteq (B(X,Y), \rho)$. Enligt Sats 15(ii) finns en följd $(f_n)_n$ i $BC(X,Y)$ med $\rho(f_n, f) \to 0$, då $n \to \infty$. Från Sats 37 följer att f_n konvergerar likformigt mot f, då $n \to \infty$. Således är f kontinuerlig enligt Sats 36, och $f \in BC(X,Y)$, dvs. $BC(X,Y)$ är sluten i $(B(X,Y), \rho)$.

<u>Anmärkning</u>. Om $X \neq \emptyset$ är ett metriskt rum, så är $BC(X,Y)$ ett metriskt rum med avseende på den inducerade metriken ρ.

Om $Y = E$ är ett normerat rum, så är $B(X,E)$ ett normerat rum med avseende på normen $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ (jfr tidigare exempel), som tydligt definierar metriken ρ.

Om X är ett metriskt rum, så följer av Sats 34 att $BC(X,E)$ är ett vektorunderrum av $B(X,E)$ och slutet enligt Sats 38.