Föreläsningsanteckningar i analys I
januari 2009

Paavo Salminen Göran Högnäs

baserat på
Protter-Morrey: *A First Course in Real Analysis*

Innehåll

Kapitel 1

Introduktion

1.1 De reella talen

De reella talen karakteriseras av **axiom** (räkneregler, postulat, grundantaganden).

A. Axiomen för addition

M. Axiomen för multiplikation

O. Ordningsaxiomet

C. Kontinuitetsaxiomet

Många andra strukturer uppfyller vissa av axiomen, men man kan visa att de reella talen väsentligen är den enda struktur som uppfyller dem alla.

Låt M vara en mängd, vars element kallas tal.

(A) Axiomen för addition

Det existerar en operation kallad addition, bet. +, i M, dvs. för varje a, $b \in M$ existerar ett element $a + b \in M$, **summan** av a och b.

Additionen uppfyller

A(i) **Associationslagen**

$$\forall a, b, c \in M : (a + b) + c = a + (b + c)$$

A(ii) **Kommutationslagen**

$$\forall a, b \in M : a + b = b + a$$

A(iii) Det existerar ett tal i M, kallat 0, sådant att

$$\forall a \in M : a + 0 = a$$

A(iv) Till varje $a \in M$ existerar ett tal, (a:s motsatta tal eller additiva invers), kallat $-a$ så att

$$a + (-a) = 0$$

Exempel

1) $\mathbb{N}$ uppfyller A(i), A(ii)
2) $\mathbb{N}_0$ uppfyller A(i), A(ii), A(iii)
3) $\mathbb{Z}$ uppfyller A(i)–(iv)
4) $\mathbb{Q}$ uppfyller A(i)–(iv)
5) $\mathbb{N}_0$ med operationen $a \oplus b = \max(a, b)$ uppfyller (i)–(iii)

Anmärkning Motsatta talet är entydigt bestämt om M uppfyller A(i)-A(iv):

$$\begin{aligned}
&a + x_1 = a + x_2 = 0 \implies (-a) + (a + x_1) = (-a) + (a + x_2) \overset{\text{A(i)}}{\implies} \\
&\big((-a) + a\big) + x_1 = \big((-a) + a\big) + x_2 \overset{\text{A(iv)}}{\implies} \\
&0 + x_1 = 0 + x_2 \overset{\text{A(iii)}}{\implies} x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Exempel Eftersom både $-(-a) + (-a) = 0$ och $a + (-a) = 0$ fås att $-(-a) = a$.

Sats 1.1 Antag att M försedd med operationen $+$ uppfyller axiomen A. Då har ekvationen

$$a + x = b$$

en entydig lösning $x = b + (-a)$, bet. $b - a$.

Bevis

$$a + \big(b + (-a)\big) \overset{\text{A(ii)}}{=} a + \big((-a) + b\big) \overset{\text{A(i)}}{=} (a + (-a)) + b \overset{\text{A(iv)}}{=} 0 + b \overset{\text{A(iii)}}{=} b$$

Alltså har ekvationen den angivna lösningen.

Antag att x_2 är en annan lösning än $x = b - a$

$$a + x_2 = b, \; a + x = b$$

Då fås

$$-a + (a + x_2) = -a + (a + x) \overset{\text{A(i)}}{\Longrightarrow} \big((-a) + a\big) + x_2 = \big((-a) + a\big) = x \overset{\text{A(iv)}}{\Longrightarrow}$$
$$0 + x_2 = 0 + x \overset{\text{A(iii)}}{\Longrightarrow} x_2 = x$$

□

Anmärkning Observera att $-\big(b + (-a)\big) = (-b) + a$, ty $\big(b + (-a)\big) + (-b) + a = 0$, och $-(-a) = a$, ty $(-a) + a = 0$.

(M) Axiomen för multiplikation

Det existerar en operation kallad multiplikation, bet. $\cdot$, som tillordnar varje par $a, b \in M$ ett tal, **produkten** av a och b, bet. $a \cdot b$ eller ab. Multiplikationen uppfyller

M(i) associationslagen:

$$\forall a, b, c \in M : (ab)c = a(bc)$$

M(ii) kommutationslagen

$$\forall a, b \in M : ab = ba$$

M(iii) det existerar ett tal, bet. 1, sådant att

$$\forall a \in M : a \cdot 1 = a$$

M(iv) för varje $a \neq 0$ existerar ett tal $\frac{1}{a}$ (**multiplikativ invers**) sådant att

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

(alt.: för varje $a \neq 0$ kan ekvationen $ax = 1$ lösas.)

M(v) **distributionslagen**

$$\forall a, b, c \in M : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Exempel

1) $\mathbb{Z}$ med $+, \cdot$ uppfyller (i), (ii), (iii), (v) men ej (iv)

2) Mängden av 2×2-matriser med matrisaddition och matrismultiplikation uppfyller (i), (iii) med $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ som etta, (v) men ej (ii) och (iv)

Sats 1.2 Antag att M uppfyller axiomen för multiplikation. Då gäller

(i) $\forall a \in M : a \cdot 0 = 0$.
$0 \neq 1$ om M har fler än ett element

(ii) $\forall a, b \in M : ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

(iii) $\forall a \neq 0,\ b \in M\ \exists\, x \in M : ax = b$. Lösningen x är entydig $(x = \dfrac{1}{a} \cdot b)$

(iv) $\forall a, b \in M : a(-b) = -ab$

Bevis

(i) Om $\exists\, a \in M,\ a \neq 0$, så $a \cdot 1 = a$ men $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \overset{\text{M(v)}}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 \overset{\text{Sats 1.1}}{\Longrightarrow} a \cdot 0 = 0$

(ii) $ab = 0,\ a \neq 0 \overset{\text{se ovan}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} \cdot ab = 0 \overset{\text{M(i)}}{\Longrightarrow} (\dfrac{1}{a} \cdot a)b = 0 \overset{\text{M(iv)}}{\Longrightarrow} 1 \cdot b = 0 \overset{\text{M(iii)}}{\Longrightarrow} b = 0$

(iii) $ax_1 = ax_2 (= b) \implies \dfrac{1}{a}(ax_1) = \dfrac{1}{a}(ax_2) \implies 1 \cdot x_1 = 1 \cdot x_2 \implies x_1 = x_2$
$\because$ entydig lösning
$a \cdot \dfrac{1}{a} b = (a \cdot \dfrac{1}{a}) b = 1 \cdot b = b$
$\because$ $\dfrac{1}{a} b$ lösning

(iv) $a(-b) + ab \overset{\text{M(v)}}{=} a((-b) + b) \overset{\text{A(iv)}}{=} a \cdot 0 \overset{\text{(i)}}{=} 0$

$\square$

Anmärkning Associationslagarna kan utvidgas till $4, 5, \ldots$ termer resp. faktorer:

$$(a + b) + (c + d) \overset{\text{A(i)}}{=} a + \big(b + (c + d)\big) \overset{\text{A(i)}}{=} a + \big((b + c) + d\big) \text{ etc.}$$

Parenteserna spelar alltså ingen roll och kan bortlämnas i "rena" additionsuttryck, liksom i "rena" multiplikationsuttryck. Men: Operationen $-$ är **inte** associativ.

(O) Ordningsaxiomet

Låt mängden M, som uppfyller (A) och (M), bestå av tre disjunkta delmängder $M_+,\ \{0\},\ M_-$ sådana att

O(i) För varje $a \in M$ gäller exakt ett av följande alternativ:

$$a \in M_+,\ a = 0,\ -a \in M_+.$$

O(ii) För varje $a, b \in M_+$:

$$a + b \in M_+, \; a \cdot b \in M_+.$$

M_+ kallas de **positiva** talen och M_- de **negativa** talen.

Beteckningar

$$\begin{aligned} a \in M_+ &\iff a > 0 \\ a \in M_- &\iff a < 0 \\ a + (-b) > 0 &\iff a > b \\ a + (-b) < 0 &\iff a < b \end{aligned}$$

Anmärkning

- $a \in M_+ \implies -a \in M_-$ (Om ej så $-a \in M_+$ eller $-a = 0$ vilka båda leder till motsägelse.)
- $\forall a \neq 0 : a^2 \in M_+$ (Om $a \in M_- \implies -a \in M_+ \implies (-a)(-a) \in M_+$ och $(-a)(-a) = -(-a)a = -(-a^2) = a^2$.)
- $\forall a, b \in M_- : ab \in M_+$

Exempel

- 1) Betrakta de rationella talen $\mathbb{Q} = \{p/q \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\}$. Nu har vi $\mathbb{Q}_+ = \{p/q \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\}$ och $\mathbb{Q}_- = \{p/q \mid q \in \mathbb{N}, p < 0\}$. $\mathbb{Q}$ uppfyller (A), (M) och (O).
- 2) De komplexa talen $\mathbb{C}$ uppfyller (A), (M) men ej (O). Motivering: Vad skulle $\mathbb{C}_+$ i så fall vara? Enligt ovan är $a^2 > 0$ för alla $a \neq 0$. Alltså bör $1 = 1^2$ tillhöra $\mathbb{C}_+$ och $-1 \in \mathbb{C}_-$. Men $i^2 = -1$. Motsägelsen visar att $\mathbb{C}$ inte kan uppfylla (O).

(C) Kontinuitetsaxiomet

Detta behandlas senare i Kapitel 2, avsnitt 2.2.

1.2 Induktionsprincipen

Antag att mängden $\mathbb{R}$, de reella talen, är given.

Definition 1.1 En delmängd S av $\mathbb{R}$ säges vara **induktiv** om

(i) $1 \in S$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : x \in S \implies x + 1 \in S$

Definition 1.2 Ett reellt tal x kallas ett **naturligt** tal om det hör till varje induktiv delmängd av $\mathbb{R}$. Mängden av de naturliga talen betecknas med $\mathbb{N}$.

Anmärkning Vi kan också konstruera $\mathbb{N}$ genom att säga att $\mathbb{N}$ består av 1, $1 + 1$ (som betecknas 2), $2 + 1$ (som betecknas 3) osv.

Exempel $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}$ är induktiva. Ingen ändlig mängd kan vara induktiv.

Sats 1.3 $\mathbb{N}$ är en induktiv mängd.

Bevis Vi verifierar att $\mathbb{N}$ uppfyller (i) och (ii) i Definition 1.1:

(i) $1 \in \mathbb{N}$ ty 1 tillhör varje induktiv mängd.

(ii) Antag att $k \in \mathbb{N}$. Eftersom k tillhör varje induktiv mängd fås att $k + 1$ också tillhör varje induktiv mängd, med andra ord $k + 1 \in \mathbb{N}$.

$\square$

Från Sats 1.3 fås nu omedelbart:

Sats 1.4 ("Principen för matematisk induktion") Om S är en induktiv delmängd av $\mathbb{R}$ så är $\mathbb{N} \subset S$.

Vi ger två exempel på **induktionsbevis**.

Exempel Bevisa att för $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

Bevis: Låt $S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, (1.1) \text{ gäller för } n\}$

(i) $1 \in S$ ty $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$

(ii) Antag att $n \in S$ (**induktionsantagandet**). Visar att $n+1 \in S$:

$$\begin{aligned}
&1+2+3+\cdots+n+n+1 \overset{\text{ind. ant.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \\
&(n+1)(\frac{n}{2}+1) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Alltså: $n \in S \implies n+1 \in S$

$\because$ S induktiv och alltså $S = \mathbb{N}$. ($S \subset \mathbb{N}$ från början)

$\because$ (1.1) gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel Visa att $n! > 2^n$ för alla $n > 3$.

Låt $S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n = 1, 2 \text{ eller } 3 \text{ eller } n! > 2^n\}$

(i) $1 \in S$

(ii) $n \in S \implies n+1 \in S$?

Implikationen i (ii) är trivial för $n = 1, 2$.

$n = 3$? $\quad 24 = 4! > 2^4 = 16 \quad \because\ 4 \in S$

Antag $n \in S, n > 3$

$$\begin{aligned}
(n+1)\cdot n! &> 2\cdot 2^n \text{ (ty } n+1 > 2) \\
\because\ (n+1)! &> 2^{n+1};\ \underline{n+1 \in S}
\end{aligned}$$

1.3 Några grundläggande definitioner

(i) Låt $\mathbb{R}^2 \overset{\overset{\text{definitionsmässigt lika med}}{\downarrow}}{:=} \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y)|\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

En delmängd $M \subset \mathbb{R}^2$ kallas en **relation** från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Mängden $D_M := \{x \,|\, (x, y) \in M\}$ kallas relationens **definitionsmängd** och $V_M := \{y \,|\, (x, y) \in M\}$ dess **värdemängd**.

(ii) Relationen $f \subset \mathbb{R}^2$ är en **funktion** om för varje $x \in D_f$ finns exakt ett $y \in V_f$ med $(x, y) \in f$. Mängden D_f kallas funktionens definitionsmängd (eng. **domain**) och V_f funktionens värdemängd (eng. **range**).

Om $(x, y) \in f$ säger vi att y är f:s värde i punkten x, betecknas $y = f(x)$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betyder att f är en funktion med $D_f \subset \mathbb{R}$ och $V_f \subset \mathbb{R}$.

(iii) Funktionen f är **injektiv** om det för varje $y \in V_f$ finns exakt ett $x \in D_f$ med $(x, y) \in f$ dvs. $y = f(x)$. I detta fall ger föreskriften

$$(y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in f$$

upphov till en funktion f^{-1} (**inversen** till f) med $D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$.

(iv) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kallas en **talföljd** (eng. sequence) om $D_f \subset \mathbb{N}$.

Om $D_f = \mathbb{N}$ betecknas talföljden ofta $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eller dyl., där x_n, a_n är $f(n)$.

Beteckningar

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} x_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_m \\ \prod_{n=1}^{m} x_n &= x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_m \end{aligned}$$

Anmärkning Parenteser behövs ju inte pga associativiteten.

(iv) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $D_f \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ är en **dubbel talföljd**. Bet. $\{x_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ om $D_f = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Har t.ex.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1\le n\le N \\ 1\le m\le M}} x_{m,n} &= \sum_{n=1}^{N}(\sum_{m=1}^{M} x_{n,m}) \\ &\overset{\text{komm.}}{=} \sum_{m=1}^{M}(\sum_{n=1}^{N} x_{n,m}) \end{aligned}$$

Exempel $N = 2, M = 3$

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = x_{1,1} + x_{2,1} + x_{1,2} + x_{2,2} + x_{1,3} + x_{2,3}$$

1.4 Triangelolikheten

Absolutbeloppet $|x|$ av x definieras enligt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

För absolutbeloppet gäller den s.k. **triangelolikheten**

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Bevis Betrakta först påståendet

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.2}$$

Vi har

$$\begin{aligned} -|x| \leq \quad x \quad &\leq |x| \\ -|y| \leq \quad y \quad &\leq |y| \end{aligned}$$

Addition ger

$$-\big(|x|+|y|\big) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

Härav $|x+y| \leq |x|+|y|$, dvs. (1.2).

Sätt in $-y$ för y i (1.2)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$$

Sätt in $y-x$ för y i (1.2)

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R} \quad &: \quad |y| \leq |x| + |y-x|, \text{ varav} \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad &: \quad |y| - |x| \leq |y-x| \end{aligned} \tag{1.3}$$

Välj $x-y$ för x i (1.2):

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| - |y| \leq |x-y|. \tag{1.4}$$

(1.3), (1.4) ger $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \pm\big(|y|-|x|\big) \quad &\leq \quad |x-y| \\ \big||x|-|y|\big| \quad &\leq \quad |x-y| \end{aligned}$$

Slutligen: Sätt in $-y$ för y ovan; då fås

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$$

□

1.5 Medelvärden

Definition 1.3 Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara givna reella tal.

Talet

$$\bar{a} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

kallas det **aritmetiska medelvärdet** av $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Egenskaper

(i) $\bar{a} = a$ om $a_k = a, k = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $\bar{a} \in [\alpha, \beta]$ om $a_k \in [\alpha, \beta], k = 1, 2, \ldots, n$

(iii) $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \bar{a} \leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Anmärkning (ii) $\implies$ (i),(iii)

Bevis av (ii): Enligt antagandet $a_k \in [\alpha, \beta], k = 1, 2, \ldots, n$ gäller

$$\begin{aligned} \alpha \leq & a_1 \leq \beta \\ \alpha \leq & a_2 \leq \beta \\ & \vdots \\ \alpha \leq & a_k \leq \beta \\ & \vdots \\ \alpha \leq & a_n \leq \beta. \end{aligned}$$

Addition av olikheterna och division med n ger

$$\alpha \leq \bar{a} \leq \beta.$$

□

Definition 1.4 Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ och tag $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ så att $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Talet

$$\bar{v} := \sum_{k=1}^{n} t_k a_k$$

kallas det **vägda aritmetiska medelvärdet** av $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Talen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kallas **vikter**. [Om vikterna är lika, $\frac{1}{n}$ var, så blir $\bar{v} = \bar{a}$.]

Anmärkning $\bar{v}$ kallas också en **konvex kombination** av $a_1, a_2, \ldots, a_n$. $\bar{v}$ uppfyller (i), (ii), (iii) ovan.

Bevis av att $\bar{v}$ uppfyller (ii): Eftersom $t_1, t_2, \ldots, t_n$ är ickenegativa fås

$$\begin{aligned} t_1\alpha \leq & t_1 a_1 \leq t_1\beta \\ & \vdots \\ t_k\alpha \leq & t_k a_k \leq t_k\beta \\ & \vdots \\ t_n\alpha \leq & t_n a_n \leq t_n\beta. \end{aligned}$$

Addition ger $\alpha \leq \bar{v} \leq \beta$.

$\square$

Definition 1.5 Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara icke-negativa reella tal. Talet

$$\bar{g} := (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$$

kallas det **geometriska medelvärdet** av $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Anmärkning $\bar{g}$ har egenskaperna (i)–(iii) ovan.

Sats 1.5 Om $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$, gäller det att

$$\bar{g} \leq \bar{a}.$$

Likhet gäller bara när $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Kapitel 2

Kontinuitet och gränsvärden

2.1 Introduktion till kontinuerliga funktioner

Kapitlet börjar med allmänna definitioner. Därefter utvidgar vi successivt familjen av kontinuerliga funktioner, genom specifika exempel:

c kontinuerlig
x kontinuerlig
cx kontinuerlig
x^2 kontinuerlig
$\vdots$
x^n kontinuerlig, $n \in \mathbb{N}$
$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c$ (polynom) kontinuerliga
rationella funktioner är kontinuerliga
sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga
(senare: potensserier, funktionsserier)
trigonometriska funktioner, exponentialfunktioner, integralfunktioner...

Allmän teori behövs i synnerhet då funktionen är given implicit, som resultat av en algoritm.

$$x \to \boxed{\text{Algoritm}} \to f(x)$$

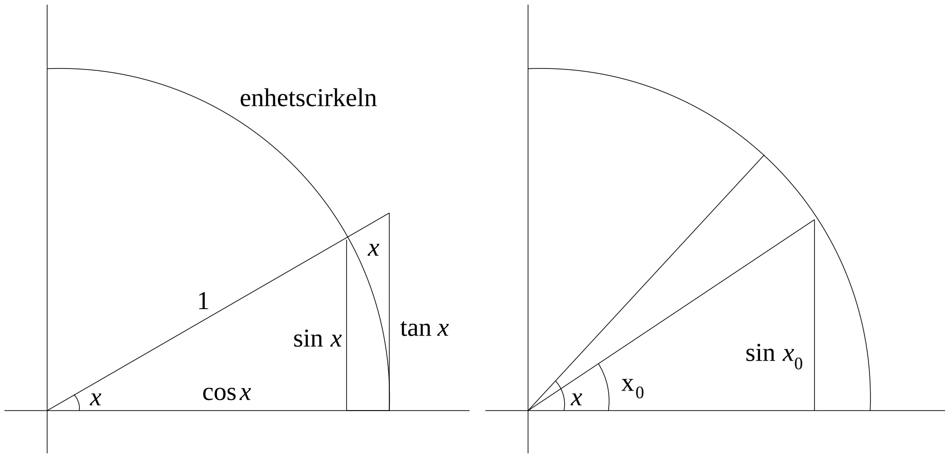
Trigonometriska olikheter, en informell härledning

Nedan härleds olikheter som utnyttjas flitigt i fortsättningen. Härledningen är informell eftersom vi inte definierat de trigonometriska funktionerna exakt.

(1) $\tan x > x > \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(3) $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$



Figuren visar att $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$ vilket medför att sinus är kontinuerlig i x_0.

$x \to 0$ i (3) ger:

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ p.g.a. att cosinus är kontinuerlig i 0.

2.2 Definitioner; gränsvärdets entydighet

Definition 2.1 Låt f vara en reell funktion, d.v.s. $D_f \subset \mathbb{R}$, $V_f \subset \mathbb{R}$. f är **kontinuerlig** i $x_0 \in D_f$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge x \in D_f \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

f är kontinuerlig på mängden A om den är kontinuerlig för varje $x \in A$. “f är kontinuerlig” betyder att den är kontinuerlig i varje $x_0 \in D_f$. Om f inte är kontinuerlig i x_0 sägs den vara **diskontinuerlig** i x_0.

f är diskontinuerlig i $x_0 \iff \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D_f : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Definition 2.2 För varje $\delta > 0$ kallas intervallet $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) := \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ en **omgivning** (eller öppen omgivning) av $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ är en **punkterad omgivning** av x_0.

Definition 2.3 Låt f vara en reell funktion och $x_0 \in \mathbb{R}$ sådan att varje omgivning av x_0 innehåller någon punkt ur D_f. (x_0 är en s.k. höljepunkt till D_f)

f sägs ha **gränsvärdet** A då $x \to x_0$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; 0 < |x - x_0| < \delta \, \wedge \, x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Om ett dylikt A ej finns säger vi att f saknar gränsvärde då $x \to x_0$.

Att f har gränsvärdet A då $x \to x_0$ betecknas

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Vi kan också uttrycka det sålunda: $f(x) \to A$ då $x \to x_0$.

Sats 2.1 Antag att $x_0 \in D_f$. Då är f kontinuerlig i x_0 om och endast om $f(x) \to f(x_0)$ då $x \to x_0$.

Följer omedelbart av definitionen på kontinuitet och Definition 2.3.

Definition 2.4 Talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sägs ha gränsvärdet A, eller **konvergera** mot A, då $n \to \infty$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : n > N \implies |x_n - A| < \varepsilon.$$

Beteckning

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

(C) Kontinuitetsaxiomet

Låt M vara en talmängd som uppfyller (A), (M) och (O) (se kap. 1). M uppfyller (C) kontinuitetsaxiomet om vi dessutom har: Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd med

(i) $x_{n+1} \geq x_n, \; n = 1, 2, \ldots$ (ickeavtagande)

(ii) $\exists K : x_n \leq K, \; n = 1, 2, \ldots$ (begränsad).

Då existerar ett tal $L \in M$ så att $\lim_{n \to \infty} x_n = L$ och $x_n \leq L \leq K$ för alla n=1,2,...

Man kan visa att (A), (M), (O) och (C) väsentligen karakteriserar de **reella talen**, d.v.s. om vi har en mängd M som uppfyller (A)–(C) så är den entydigt bestämd (sånär som på såkallad isomorfi).

Sats 2.2 (Gränsvärdets entydighet) Gränsvärdet är entydigt (om det existerar), det kan med andra ord inte finnas $B \neq A$ för vilket (2.1) också gäller. (Samma slutsats för Definition 2.4)

Bevis Antag att (2.1) gäller för $B \neq A$. Sätt $0 < \varepsilon < \frac{|A-B|}{2}$. Då finns $\delta > 0$ så att

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \wedge \ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

och ett $\delta' > 0$ med

$$0 < |x - x_0| < \delta' \wedge x \in D_f \implies |f(x) - B| < \varepsilon.$$

Tag nu ett $x \in D_f$ sådant att

$$0 < |x - x_0| < \min(\delta, \ \delta').$$

För detta x har vi

$$|f(x) - A|, \ |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2}.$$

Emellertid ger $\triangle - \mathit{olikheten}$

$$|A - B| = |f(x) - A - (f(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < |A - B|.$$

Alltså: $|A - B| < |A - B|$, vilket är en motsägelse. Detta bevisar att gränsvärdet är entydigt.

□

Sats 2.3 Låt f vara en reellvärd funktion definierad i en (punkterad) omgivning av x_0. Då gäller att $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ om och endast om $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ för alla talföljder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \ \ x_n \in D_f, \ \ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ och $x_n \neq x_0, \ \ n \in \mathbb{N}$.

Bevis ($\implies$) Tag ett $\varepsilon > 0$. Då existerar ett $\delta > 0$ så att

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Låt nu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, vara en talföljd med

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in D_f, x_n \neq x_0 \text{ och } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Enligt definition på gränsvärde för talföljder existerar ett N sådant att $n > N \implies 0 < |x_n - x_0| < \delta$. (Förutsatt att $x_n \neq x_0$) (N beror av δ som i sin tur beror av ε.) Härav fås nu

$$n > N \implies |f(x_n) - L| < \varepsilon, \text{ alltså}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ så att

$$n > N \implies |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

$$\because \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

($\Longleftarrow$) Vi antar nu att $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ för alla talföljder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $x_n \in D_f$, $x_n \neq x_0, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Antag också att $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **inte** existerar eller är $\neq L$. I så fall

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \wedge\ x \in D_f\ \wedge\ |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

Speciellt kan vi välja $\delta = \frac{1}{n}$ och kalla punkten x_n:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n\ \exists x_n\ :\ 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\ \wedge\ x_n \in D_f\ \wedge\ |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

Av detta ser vi att $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \in D_f,\ x_n \neq x_0$ men $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$, en motsägelse. $\square$

2.3 Satser om kontinuitet och gränsvärden

Sats 2.4

a) Låt c vara konstant. Funktionen f definierad genom $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = c$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

b) Den identiska funktionen ι definierad genom $\forall x \in \mathbb{R}$: $\iota(x) = x$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

c) Funktionen $x \curvearrowright \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, är kontinuerlig på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bevis

a) Tag ett $x_0 \in \mathbb{R}$ och ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Sätt $\delta = 1$ (t.ex.). Det gäller trivialt att

$$|x - x_0| < 1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ty $|f(x) - f(x_0)|$ är ju $|c - c| = 0$. I själva verket kan $\delta > 0$ väljas godtyckligt.

b) Tag ett $x_0 \in \mathbb{R}$ och ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Sätt $\delta = \varepsilon$. Om nu $|x - x_0| < \delta$ så $|\iota(x) - \iota(x_0)| < \varepsilon$ eftersom $|\iota(x) - \iota(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

c) Låt $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt. Studerar

$$|f(x) - f(x_0)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = |\frac{x_0 - x}{x x_0}| \leq \frac{|x_0 - x|}{\frac{x_0^2}{2}}.$$

Den sista olikheten gäller om $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$ ty då är $|x| > \frac{|x_0|}{2}$ ($\triangle$-olikheten).

Alltså

$$|x - x_0| < \frac{x_0^2 \varepsilon}{2},\ |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2} \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nu har vi att f är kontinuerlig i $x_0 \neq 0$; här kan vi alltså välja $\delta = \min(\frac{x_0^2\varepsilon}{2}, \frac{|x_0|}{2})$.

$\square$

Exempel Konkret kan vi fråga oss hur nära $x_0 = \frac{1}{2}$ vi måste välja x för att skillnaden mellan $f(x) = \frac{1}{x}$ och $f(x_0) = 2$ skall bli mindre än 0,001. Svaret är att $\frac{1}{8} \cdot 0{,}001$ räcker. Men om $x_0 = \frac{1}{10}$ är vårt svar $\frac{1}{200} \cdot 0{,}001$.

Sats 2.5 Antag att funktionerna f och g är definierade i en punkterad omgivning av $x_0 \in \mathbb{R}$ och låt $\delta^* > 0$ vara sådant att

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta^*\} \cap D_f \cap D_g = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta^*\}.$$

Antag att $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Då gäller

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$$

Korollarium 2.1 Om f och g är kontinuerliga i x_0 så är också $f + g$ kontinuerlig i x_0.

Bevis (av satsen). Låt $\varepsilon > 0$ och $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, båda mindre än δ^* med egenskapen att

(i) $0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ och

(ii) $0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$

Betrakta nu

(iii) $|\big(f(x) + g(x)\big) - (A + B)| \overset{\triangle\text{ -olikhet}}{\leq} |f(x) - A| + |g(x) - B|$

Om alltså δ definieras som $\min(\delta_1, \delta_2)$ har vi

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (A + B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Alltså: $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = A + B$ $\square$

Sats 2.6 Under antagandena i Sats 2.5 gäller också

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB.$$

Bevis Betrakta först

(i) $|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| \leq |f(x) - A||g(x)| + |A||g(x) - B|.$

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Välj $0 < \delta_1 < \delta^*$ så att

(ii) $0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies |g(x) - B| < \min\Big(\frac{\varepsilon}{2|A|}, 1\Big).$

Vi antar här att $A \neq 0$. Om $A = 0$ väljer vi till exempel δ_1 så att $|g(x) - B| < 1$, om $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Vi ser att för sådana x gäller

$$|g(x)| \leq |g(x) - B| + |B| < 1 + |B|$$

också om $A = 0$.

Nu väljs i sin tur $0 < \delta_2 < \delta^*$ så att

(iii) $0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}$

(också $\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}$ om A=0)

Sammanställer vi (i), (ii) och (iii) fås i fallet $A \neq 0$, med $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x)g(x) - AB|$$

$$\overset{\text{(i)}}{<} |g(x)| \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} + |A| \frac{\varepsilon}{2|A|} \overset{\text{(ii), (iii)}}{<} (1+|B|)\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

För $A = 0$ har vi:

$$|f(x)g(x)| \overset{\text{(i)}}{<} |g(x)||f(x) - A| < (1+|B|)\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} < \varepsilon.$$

Härav

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB.$$

Korollarium 2.2 Om f och g är kontinuerliga i x_0, så är även $f \cdot g$ kontinuerlig i x_0. Beviset följer omedelbart från Sats 2.6 eftersom

$$A = f(x_0) \text{ och } B = g(x_0).$$

□

Anmärkning Resultaten i Sats 2.5 och Sats 2.6 kan generaliseras till summan respektive produkten av ett ändligt antal funktioner.

Sats 2.7 Låt f och g vara funktioner med $D_f = D_g = \mathbb{R}$ och definiera

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; h(x) = (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

(**sammansatta funktionen** av f och g, **sammansättningen** eller **kompositionen** av f och g). Antag att $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ och att f är kontinuerlig i L. Då fås:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = f(L) \qquad \big(= \lim_{x \to L} f(x)\big)$$

Bevis Enligt antagandet gäller:

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \quad |x - L| < \delta \implies |f(x) - f(L)| < \varepsilon$

Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt. Välj δ_1 så att (ii) gäller. Välj därefter δ_2 så att (i) gäller för $\varepsilon = \delta_1$, alltså $0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - L| < \delta_1$. Nu fås $0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - L| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$. □

Sats 2.8 Om funktionerna f och g uppfyller antagandena i Sats 2.5 och om $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$ så gäller

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{B}{A}$$

Bevis $\frac{1}{f(x)} = h(f(x))$ där $h(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Från Sats 2.7 (modifierad en aning då $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) fås att $\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = h(A) = \frac{1}{A}$. Sats 2.6 kan tillämpas

$$\frac{g(x)}{f(x)} = g(x)h(f(x))$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x)h(f(x)) = B\frac{1}{A} = \frac{B}{A}$$

□

Anmärkning I allmänhet är $D_{f \circ g} = \{x |\ x \in D_g,\ g(x) \in D_f\}$. I den modifierade versionen av Sats 2.7 bör också $D_{f \circ g}$ innehålla en punkterad omgivning av x_0 och D_f en omgivning av L.

Sats 2.9 Låt f och g vara funktioner med $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Antag att $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ och att det existerar en punkterad omgivning av x_0:

$$S_{\delta^*} := \{x \mid \quad 0 < |x - x_0| < \delta^*\}$$

sådan att $g(x) \neq L$ för $x \in S_{\delta^*}$. Om $\lim_{x \to L} f(x) = A$ existerar gäller att

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = A$$

Bevis Genom att välja $\delta < \delta^*$ kan vi skriva

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists 0 < \delta < \delta^* : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies 0 < |g(x) - L| < \varepsilon$$

och satsen kan nu bevisas på samma sätt som Sats 2.7. □

Anmärkning Antagandet i Sats 2.9 gäller speciellt då g växer (eller avtar) monotont mot L.

Sats 2.10 Låt f och g vara funktioner sådana att det finns en punkterad omgivning av x_0

$$S_{\delta^*} := \{x \mid \quad 0 < |x - x_0| < \delta^*\}$$

som är en delmängd av D_f och D_g och inom vilken f och g sammanfaller, det vill säga: $\forall x \in S_{\delta^*} : \quad f(x) = g(x)$. Antag att $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Då är också

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

Bevis Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och bestäm δ_1 så att

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \wedge \quad x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Eftersom $f(x) = g(x)$ för $x \in S_{\delta^*}$ fås för $\delta = \min(\delta_1, \delta^*)$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - A| = |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{med andra ord } \lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

$\square$

Sats 2.11 Låt S_{δ^*} vara som i Sats 2.10 utom att $f(x) < g(x)$ då $x \in S_{\delta^*}$. Om $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ så gäller $A \leq B$.

Bevis Antag att $A > B$. Vi visar att detta leder till en motsägelse. Sätt $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Bestäm sedan δ_1 och δ_2 så att

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \wedge \quad x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \wedge \quad x \in D_g \implies |f(x) - B| < \varepsilon$$

Välj nu $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta^*)$. För $0 < |x - x_0| < \delta$ har vi

$$B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Men $B + \varepsilon = A - \varepsilon \quad$ (ε är ju $\frac{A-B}{2}$) varför

$$g(x) < f(x)$$

Detta motsäger antagandet att $f(x) \leq g(x)$ på S_{δ^*}.

$$\because A \leq B.$$

$\square$

Anmärkning Även om $f(x) < g(x)$ på S_{δ^*} kan vi **inte** dra slutsatsen $A < B$. Till exempel för funktionerna x^4 och x^2 gäller det att $x^4 < x^2$ på $(0,1)$ men trots det har de samma gränsvärden i ändpunkterna.

Sats 2.12 Låt f, g och h vara funktioner för vilka gäller

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

i en punkterad omgivning S_{δ^*} av x_0. Antag att $S_{\delta^*} \subset D_f \cap D_g \cap D_h$. Om $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$ så är också $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

Bevis Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt och välj δ_1 och δ_2 så att

$$0 < |x - x_0| < \delta_1, \quad x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad x \in D_h \implies |h(x) - A| < \varepsilon$$

Sätt $\delta = \min(\delta^*, \delta_1, \delta_2)$. Då gäller

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

det vill säga

$$|g(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\because \lim_{x\to x_0} g(x) = A$$

$\square$

2.4 Höger- och vänstergränsvärden och -kontinuitet

Definition 2.5 Funktionen f sägs vara **höger- (vänster-) kontinuerlig** i $x_0 \in D_f$ om

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ : \ 0 \leq x - x_0 < \delta, \ x \in D_f \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$(\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ : \ 0 \leq x_0 - x < \delta, \ x \in D_f \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.)$$

Definition 2.6 Funktionen f sägs ha **höger- (vänster-) gränsvärdet** A då $x \to x_0$ om

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ : \ 0 < x - x_0 < \delta, \ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ : \ 0 < x_0 - x < \delta, \ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.)$$

Beteckning:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \qquad (\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A)$$

eller

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = A \qquad (\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = A)$$

Sats 2.13 Antag att $\forall \delta > 0 : \quad (x_0 - \delta, x_0) \cap D_f \neq \emptyset$ och $(x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \neq \emptyset$.

Då gäller

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

Korollarium 2.3 f kontinuerlig i $x_0 \iff f$ är både höger- och vänsterkontinuerlig i x_0.

Bevis ($\Longrightarrow$) Tag ett $\varepsilon > 0$. Enligt antagandet gäller att det finns ett $\delta > 0$ med

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Av detta följer dels

$$0 < x - x_0 < \delta,\ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

och dels

$$0 < x_0 - x < \delta,\ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Härav kan vi dra slutsatsen att både $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$ och $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

($\Longleftarrow$) Om $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$ och $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$ så finns, för givet $\varepsilon > 0, \delta_1 > 0$, och $\delta_2 > 0$ så att

$$0 < x - x_0 < \delta_1,\ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < x_0 - x < \delta_2,\ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Med $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ har vi då

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\because \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$\square$

Vi kan bevisa varianter av de övriga värdessatserna i avsnitt 2.3 för höger- och vänstergränsvärden. Bevisa en sådan som övning!

2.5 Gränsvärden i oändligheten; oändliga gränsvärden

Definition 2.7 Funktionen f sägs ha gränsvärdet A då $x \to \infty$ (x går mot oändligheten), betecknas $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, om

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N : |x| > N,\; x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

f sägs ha gränsvärdet A då $x \to +\infty$ (respektive $x \to -\infty$) om

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N : x > N,\; x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(\text{respektive } \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N : x < -N,\; x \in D_f \implies |f(x) - A| < \varepsilon.)$$

Satserna 2.5 – 2.12 (avsnitt 2.3) gäller efter uppenbara modifikationer också då $x \to \infty$.

Anmärkning $(-\infty, -N) \cup (N, +\infty)$ kallas ibland en omgivning av oändligheten.

Följande sats är en motsvarighet till Sats 2.7:

Sats 2.14 Låt f och g vara två funktioner med $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Antag att $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ och att f är kontinuerlig i punkten L. Då

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f(L)$$

Definition 2.8 Funktionen f sägs ha gränsvärdet ∞, betecknas $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, då $x \to x_0$, om

$$\forall K > 0 \;\; \exists\delta > 0 \; : \; 0 < |x - x_0| < \delta,\; x \in D_f \implies |f(x)| > K.$$

Funktionen f sägs ha gränsvärdet $+\infty$ ($-\infty$) om

$$\forall K > 0 \;\; \exists\delta > 0 \; : \; 0 < |x - x_0| < \delta,\; x \in D_f \implies f(x) > K.$$

$$(\forall K > 0 \;\; \exists\delta > 0 \; : \; 0 < |x - x_0| < \delta,\; x \in D_f \implies f(x) < -K.)$$

Anmärkning Vi kan enkelt modifiera ovanstående definitioner till att gälla höger- och vänstergränsvärden då $x \to x_0$.

Anmärkning Man visar lätt att om $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ så finns det ej något A så att $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. (Jämför beviset till Sats 2.2)

Reglerna för addition, multiplikation av gränsvärden, gränsvärdet av en sammansatt funktion etc. måste modifieras. Exempelvis har vi för $f \circ g$:

Sats 2.15 Antag att $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ och $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ och att $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Då gäller

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = A.$$

Bevis Tag ett $\varepsilon > 0$. Då finns ett K så att $|x| > K \implies |f(x) - A| < \varepsilon$.

Å andra sidan existerar för detta K ett $\delta > 0$ så att $|x - a| < \delta \implies |g(x)| > K$. Av detta följer

$$|x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - A| < \varepsilon.$$

$\square$

Sats 2.9 motsvaras av:

Sats 2.16 Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to -\infty} g(x) = a$ och att $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Antag vidare att det finns ett M så att $g(x) \neq a$ för varje $x < -M$. Då gäller

$$\lim_{x\to -\infty} f(g(x)) = \infty$$

Anmärkning Villkoret $g(x) \neq a,\ x < -M$ är viktigt. Utan detta behöver ej gränsvärdet existera överhuvudtaget.

Sats 2.8 motsvaras av

Sats 2.17 Antag att f och g uppfyller

(i) $D_f \cap D_g \supset \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta^* \} = S_{\delta^*}$ för något $\delta^* > 0$,

(ii) $f(x) \neq 0$ för varje $x \in S_{\delta^*}$. Antag vidare att $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ och $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Då gäller

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty.$$

Obs! $B \neq 0$ nödvändigt: sätt $f(x) = g(x) = x,\ x_0 = 0$.

Det gäller också att

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \infty$$

om $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ och $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. (B får ej heller vara $\infty,\ +\infty$ eller $-\infty$)

2.6 Gränsvärdessatser för talföljder

Jämför definition 2.4 i avsnitt 2.2.

Definition 2.9 $\{x_n\}$ sägs ha gränsvärdet ∞ ($+\infty$ respektive $-\infty$) då $n \to \infty$ om

$$\forall M > 0\ \exists K : n > K \implies |x_n| > M$$

$$(\forall M > 0\ \exists K : n > K \implies x_n > M \text{ resp. } \forall M > 0\ \exists K : n > K \implies x_n < -M)$$

Genom att till tillämpliga delar utnyttja bevisen för satserna gällande gränsvärden för funktioner kan vi bevisa följande:

Sats 2.18 Låt $\{x_n\}$ och $\{y_n\}$ vara två talföljder så att $A := \lim_{n\to\infty} x_n$ och $B := \lim_{n\to\infty} y_n$ existerar. Då gäller

(i) det finns ett M så att: $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < M$ d.v.s. $\{x_n\}$ är begränsad,

(ii) om $x_n \leq y_n$ för varje n, så är $A \leq B$,

(iii) om $x_n = y_n$ för varje n så är $A = B$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = aA + bB$ (där a och b är godtyckliga reella konstanter)

(v) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = AB$

(vi) Om $A \neq 0$ så $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{B}{A}$.

Bevis Här endast (i) och (vi).

(i) Tag $\varepsilon = 1$. Då existerar ett N så att

$$n > N \implies |x_n - A| < 1.$$

Villkoret i (i) uppfylls om M väljs =

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |A+1|, |A-1|\}.$$

(vi) Välj ett $\varepsilon > 0$ godtyckligt. Undersöker

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - \frac{B}{A}\right| = \left|\frac{y_n}{x_n} - \frac{B}{x_n} + \frac{B}{x_n} - \frac{B}{A}\right| \leq$$

$$\frac{|y_n - B|}{|x_n|} + |B|\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|y_n - B|}{|x_n|} + |B|\frac{|x_n - A|}{|x_n||A|} \tag{2.2}$$

$$\exists N_1 : n > N_1 \implies |x_n - A| < \frac{|A|}{2}$$

För dessa x_n gäller också $|x_n| > \frac{|A|}{2}$ och, från (2.2),

$$\left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leq \frac{2}{|A|}|y_n - B| + \frac{2|B|}{|A|^2}|x_n - A|$$

Om vi nu väljer N_2 och N_3 så att

$$n > N_2 \implies |y_n - B| < \frac{\varepsilon|A|}{4}$$

och

$$n > N_3 \implies |x_n - A| < \frac{\varepsilon|A|^2}{4|B|}$$

så ger

$$n > \max(N_1, N_2, N_3) \implies \left|\frac{y_n}{x_n} - \frac{B}{A}\right| < \frac{2}{|A|}\frac{\varepsilon|A|}{4} + \frac{|A|^2\varepsilon}{4|B|}\frac{2|B|}{|A|^2} = \varepsilon.$$

□

Sats 2.19 Låt $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ vara talföljder som uppfyller

(i) $x_n \leq y_n \leq z_n$ för varje n

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n =: A$

Då är

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

I Sats 2.3 bevisades bl.a. detta resultat:

Sats 2.20 Antag att funktionen f är kontinuerlig i punkten a och att talföljden $\{x_n\}$ konvergerar mot a då $n \to \infty$. Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Anmärkning “Flytta in limes”

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Terminologi Om $\{x_n\}$ har gränsvärdet $A \in \mathbb{R}$ då $n \to \infty$ sägs talföljden $\{x_n\}$ vara **konvergent**. En talföljd som inte är konvergent är **divergent**. OBS! Om $A = \infty, +\infty, -\infty$ så är följden divergent!

2.7 Tillägg till kapitel 2

Existensen av kvadratroten av två

Vi börjar med att konstatera att **inget rationellt tal** har kvadraten 2. Detta visste redan de gamla grekerna och det var i själva verket ytterst bekymmersamt för deras matematiska tänkande.

Påstående För alla $r \in \mathbb{Q}$ är $r^2 \neq 2$. (Hippasos [1])

Bevis Vi visar att antagandet $r \in \mathbb{Q},\ r^2 = 2$, leder till en motsägelse.

Låt alltså $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ där $m,\ n$ är positiva heltal. Vi väljer m och n så att bråket är slutförkortat, dvs m och n saknar gemensamma faktorer > 1.

Om nu $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, är $m^2 = 2n^2$. m^2 är ett jämnt tal ty 2 är faktor i m^2. Härav följer att m är jämnt (ty om m vore udda skulle m^2 vara udda). m är alltså av formen $2p$, där p är ett heltal. Vi har $4p^2 = 2n^2$ och alltså $2p^2 = n^2$.

På samma sätt som ovan inses att n är jämnt. m och n är båda jämna, dvs innehåller en faktor 2. Detta är en motsägelse ty vi antog från början att m och n saknar gemensamma faktorer.

$\square$

Nedan konstrueras en talföljd $\frac{p_n}{q_n}$ som har ett gränsvärde $L \in \mathbb{R}$ med egenskapen $L^2 = 2$.

Låt $q_n = 10^n$ och $p_n = \max\{p \in \mathbb{N} \mid p^2 < 2 \cdot 10^{2n}\} = \max\{p \in \mathbb{N} \mid (\frac{p}{q_n})^2 < 2\}$

Vi ser att $p_1 = 14,\ p_2 = 141, \ldots$ och $\frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, n = 1, 2, \ldots$ ty $10\ p_n \leq p_{n+1}$.

Dessutom: $\frac{p_n}{q_n} \leq 2,\ n = 1, 2, \ldots$

Påstående Om $L = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ (vilket existerar i $\mathbb{R}$ enligt kontinuitetsaxiomet (C)) så gäller

$$L^2 = 2$$

Bevis Enligt konstruktionen är $(\frac{p_n}{10^n})^2 < 2$. (Likhet kan inte gälla ty $\frac{p_n}{10^n}$ är rationellt!)

Följdens gränsvärde är då ≤ 2. (Axiom (C))

Å andra sidan är

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{p_n}{10^n})^2 \overset{(2.18)}{=} \lim_{n\to\infty} (\frac{p_n}{10^n}) \cdot \lim_{n\to\infty} (\frac{p_n}{10^n})$$

d.v.s. $\lim_{n\to\infty} (\frac{p_n}{10^n})^2 = L^2$. Härav: $L^2 \leq 2$.

[1] Hippasos, 400-talet f Kr

Om $L^2 < 2$ så existerar ett $n \in \mathbb{N}$ med $\frac{5}{10^n} < 2 - L^2$. Vi bevisar att detta leder till att $(\frac{p_n+1}{10^n})^2 < 2$ vilket **motsäger** definitionen på p_n ovan:

$$(\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n})^2 = (\frac{p_n}{10^n})^2 + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{2p_n}{10^n} \cdot \frac{1}{10^n} <$$

$$< L^2 + \frac{1}{10^n} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{10^n} =$$

$$= L^2 + \frac{5}{10^n} < 2.$$

$\square$

Om talföljden $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n,\ n = 1, 2, \ldots$

Påstående 1 $\{x_n\}$ är begränsad uppåt.

Bevis $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}(\frac{1}{n})^n =$

$= 1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k + \cdots + \frac{n!}{n!}(\frac{1}{n})^n \leq$

$\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq$

$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^{k-1} + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1} \leq$

$\leq 1 + (1 + \frac{1}{2} + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1}) = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leq$

$\leq 1 + 2 = 3$ $\square$

Påstående 2 $\{x_n\}$ är växande.

Bevis För $a > -1$ gäller $(1 + a)^n \geq 1 + na,\ n = 1, 2, \ldots$

Bevisas genom induktion:

$(1 + a)^{p+1} = (1 + a)^p(1 + a) \geq (1 + pa)(1 + a) = 1 + pa + a + pa^2 \geq 1 + (p + 1)a$

Speciellt för $a = -\frac{1}{n^2}$ fås

$(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1-\frac{1}{n} \iff (1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n \geq 1-\frac{1}{n} \iff (1+\frac{1}{n})^n \geq (1-\frac{1}{n})^{-(n-1)} = (\frac{n}{n-1})^{n-1} = (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}$, vilket ju är liktydigt med att $x_n \geq x_{n-1}, n = 2, 3, \ldots$ $\square$

Påstående 1 & 2 samt axiom (C) ger att $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar. Detta tal kallas e (**Neperska** talet[2]).

Definition 2.10 $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e\ (\approx 2,718)$

[2] John Neper (Napier), (1550-1617), skotsk matematiker

Nedan använder vi konventionen att n är heltal och x reellt.

Påstående 3 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

Påstående 4 $\lim_{n\to\pm\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a$

Påstående 5 Om $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ så gäller $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{b_n}{n})^n = e^b$

Bevis Vi utnyttjar jämförelseföljder (jämför sats 2.19). För givet $\varepsilon > 0$ bildas följder y_n och z_n

$$(1+\frac{b-\varepsilon}{n})^n =: y_n \text{ och } (1+\frac{b+\varepsilon}{n})^n =: z_n.$$

Det finns ett N så att

$$n > N \implies b-\varepsilon < b_n < b+\varepsilon$$

För $n > N$ fås då

$$y_n \leq (1+\frac{b_n}{n})^n \leq z_n$$

Då $n \to \infty$, konvergerar y_n mot $e^{b-\varepsilon}$ och z_n mot $e^{b+\varepsilon}$.

Eftersom exponentialfunktionen är kontinuerlig (antas!) kan vi för givet $\varepsilon' > 0$ välja ε så att

$$|e^{b-\varepsilon} - e^b| < \varepsilon' \text{ och } |e^{b+\varepsilon} - e^b| < \varepsilon'$$

Av detta fås att

$$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists N \text{ (beror av } \varepsilon'\text{) så att}$$

$$n > N \implies |(1+\frac{b_n}{n})^n - e^b| < \varepsilon'.$$

$$\text{d.v.s. } \lim_{n\to\infty}(1+\frac{b_n}{n})^n = e^b.$$

□

Påstående 6 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{b}{x})^x = e^b$

Andra konsekvenser av (C)

Av (C) följer att $\mathbb{N}$ är **obegränsad** och att $\mathbb{Q}$ **ligger tätt** i $\mathbb{R}$.

(i) Antag $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; : \;\; n < M$. Då är $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ en växande följd som är begränsad. Enligt (C) finns ett L så att $\lim_{n\to\infty} n = L$. Då finns t.ex. ett N_1 med

$$n > N_1 \implies L - \frac{1}{2} < n \leq L.$$

För $n+1 \in \mathbb{N}$ har vi då $L + \frac{1}{2} < n+1 \leq L+1$, en motsägelse ty $n+1 > N_1$.

(ii) Alla icke-tomma intervall $(a, b) \subset \mathbb{R},\ a < b,$ innehåller punkter ur $\mathbb{Q}$

($\iff$ $\mathbb{Q}$ **ligger tätt** i $\mathbb{R}$).

(För $a > 0$) Sätt $b - a = \varepsilon > 0$. Då existerar $N \in \mathbb{N},\ N > \frac{1}{\varepsilon}$. Betrakta

$$M = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m}{N} > a\} =$$

$$= \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m > aN\}.$$

$\frac{M}{N} > a$. Om $\frac{M}{N}$ vore $\geq b = a + \varepsilon$ skulle $\frac{M}{N} - \frac{1}{N} > a$, vilket skulle motsäga definitionen på M.

$\because \frac{M}{N} \in (a, b)$.

Kapitel 3

Några egenskaper hos reellvärda funktioner

3.1 Satsen om mellanliggande värden

Satsen, som är "intuitivt uppenbar" åtminstone då man ser på saken grafiskt, är av fundamental betydelse i matematisk analys.

Sats 3.1 Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och att $f(a) < f(b)$. Låt c vara ett tal så att $f(a) < c < f(b)$. Då finns åtminstone en punkt $x_0 \in (a, b)$ så att $f(x_0) = c$.

Anmärkning Med andra ord har ekvationen $f(x) = c$ en lösning i $[a, b]$.

Exempel f är kontinuerlig på $[0, 1]$ och $f(0), f(1) \in [0, 1]$. Då kan ekvationen $f(x) = x$ lösas i $[0, 1]$. Detta följer direkt från Sats 3.1. Bevis: Sätt $g(x) = f(x) - x$. Då är $g(0) \geq 0$ och $g(1) \leq 0$. Härav $\exists x_0 \in [0, 1] : g(x_0) = 0$.

Anmärkning Om x_0 har egenskapen $f(x_0) = x_0$, så kallas x_0 **fixpunkt** för f.

Sats 3.1 bevisas med hjälp av följande sats som kommer till användning också senare:

Sats 3.2 Låt $\{I_n\}, I_n = [a_n, b_n]$, vara en följd av slutna intervall sådan att

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n.$$

Om $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ finns det ett och endast ett tal A som ligger i varje I_n:

$$\{A\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Bevis Eftersom $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ så gäller $a_n \leq a_{n+1} \leq b_1$ och $a_1 \leq b_{n+1} \leq b_n$; dvs $\{a_n\}$ är icke-avtagande och begränsad medan $\{b_n\}$ är icke-växande och begränsad. Enligt (C) gäller då att $\exists A$ och B med $\lim_{n\to\infty} a_n = A \leq b_1$ och $\lim_{n\to\infty} b_n = B \geq a_1$. Då $a_n \leq b_n$ för varje n har vi att $A \leq B$. Dessutom $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |A - B| \leq |A - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - B|.$$

Enligt antagandet går $|a_n - b_n| \to 0$ och enligt definitionen på gränsvärde $|A - a_n|$, $|b_n - B| \to 0$ då $n \to \infty$. Härav fås (jämför avsnitt 2.3) $|A - B| = 0$, dvs $A = B$.

Eftersom $a_n \leq A = B \leq b_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$, är $A \in [a_n, b_n] = I_n$ för alla n:

$$A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Antag att A' också $\in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, $A' > A$ (fallet $A' < A$ behandlas analogt). Eftersom I_n är ett intervall betyder $A, A' \in I_n$ också att $[A, A'] \subset I_n$ varav följer $0 < A' - A \leq b_n - a_n$, längden av I_n. Men $b_n - a_n \to 0$ då $n \to \infty$. $A' - A > 0$ är därför inte möjligt. Alltså: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ består av exakt en punkt.

$\square$

Bevis av sats 3.1: Låt $a_1 := a$ och $b_1 := b$. Vi har tre möjligheter:

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = c, \quad > c \text{ eller } < c.$$

Om $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = c$, sätt $x_0 = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)$, den sökta lösningen. I det andra fallet sätt $a_2 := a_1$ och $b_2 := \left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)$. I det tredje fallet sätt $a_2 := \left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)$, $b_2 := b_1$.

Vi noterar att i de två sistnämnda fallen är $f(a_2) < c$ och $f(b_2) > c$. Då kan vi åter bilda $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right)$. Vi har tre alternativ: $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) = c, > c, < c$.

I det första fallet sättes $x_0 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ (och processen kan avbrytas), i det andra definieras $a_3 := a_2$, $b_3 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ och i det tredje $a_3 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$, $b_3 := b_2$. På detta sätt fås antingen

x_0 med $f(x_0) = c$ eller så en följd $[a_n, b_n]$ av intervall som uppfyller inkapslingsvillkoret i Sats 3.2, ty $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$.

Vi har då $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = A$ (enligt Sats 3.2). Vi påstår nu att $f(A) = c$. Detta följer av $f(a_n) < c < f(b_n), n \in \mathbb{N}$, varav **på grund av f:s kontinuitet** (Sats 2.20)

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le c \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(A).$$

$\square$

3.2 Supremum och infimum av en talmängd

Definition 3.1 Talmängden S sägs vara **begränsad uppåt** av talet M om $x \le M$ för varje $x \in S$ [M **majorant** till S]. S är **begränsad nedåt** av talet m om $x \ge m$ för varje $x \in S$ [m **minorant** till S].

Talmängden S sägs vara **begränsad** om den är både uppåt och nedåt begränsad, dvs $\exists\, m, M : m \le x \le M$ för alla $x \in S$.

Anmärkning S är begränsad $\iff \exists M > 0 : |x| \le M$, för alla $x \in S$. (Vi kan välja $-M$ som m i definitionen.)

Sats 3.3

(i) Antag att talmängden S är icke-tom och begränsad uppåt. Då finns det ett och endast ett tal U sådant att

$$\forall x \in S: \; x \le U$$

[dvs U är majorant till S] och

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, x \in S: \; U - \varepsilon < x \le U \tag{3.1}$$

[dvs U minsta majorant till S].

(ii) Antag att talmängden S är icke-tom och begränsad nedåt. Då finns det ett och endast ett tal L så att

$$\forall x \in S : L \le x \text{ och}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, x \in S: \; L \le x < L + \varepsilon$$

Terminologi

U kallas S:s **supremum** och betecknas sup S [Engelska även: **least upper bound**, lub].

L kallas S:s **infimum**, betecknas inf S [**greatest lower bound**, glb]. L är den största minoranten till S.

Bevis Bara (i) bevisas, (ii) går analogt.

Eftersom S är uppåt begränsad finns ett M så att $x \leq M$ för alla $x \in S$. Om $M \in S$ så kan M uppenbarligen väljas till U (M är majorant som uppfyller (3.1)). Antag därför att $M \notin S$ och sätt $b_1 = M$. Då finns ett $a_1 \in S$ med $a_1 < b_1$. Bilda $\dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Det finns två möjligheter:

(1) $\dfrac{a_1 + b_1}{2}$ är majorant till S,

(2) $\dfrac{a_1 + b_1}{2}$ är inte majorant till S (dvs $\exists\, x \in S:\ x > \dfrac{a_1 + b_1}{2}$).

Ifall (1) sätt $a_2 := a_1,\ b_2 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ och ifall (2) $a_2 := \dfrac{a_1 + b_1}{2},\ b_2 := b_1$.

Vi fortsätter på samma sätt. Det finns två möjligheter:

(1) $\dfrac{a_2 + b_2}{2}$ är majorant till S,

(2) $\dfrac{a_2 + b_2}{2}$ är inte majorant till S.

Igen väljs $a_3 := a_2,\ b_3 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ i fall (1), $a_3 := \dfrac{a_2 + b_2}{2},\ b_3 := b_2$ i fall (2).

Fortsättes på samma sätt fås inkapslade intervall $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$

där $b_n - a_n = 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$.

Följden $\{a_n\}$ växer och $\{b_n\}$ avtar mot ett gemensamt gränsvärde

$$U = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Eftersom

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in S:\ x \leq b_n$ och

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x \in S:\ a_n \leq x$

så har U de önskade egenskaperna: Ekvationen (3.1) följer av att $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \ n > N_\varepsilon \implies U - \varepsilon < a_n \leq U$ och (b).

Men finns det $U' \neq U$ som också är majorant och uppfyller (3.1)? Låt t ex $U' < U$ och sätt $\varepsilon = \frac{U-U'}{2}$.

Eftersom U uppfyller (3.1) finns det $x \in S$ med $U - \varepsilon < x \leq U$.

Men detta $x > U'$ så U' kan inte vara majorant till S , vilket motsäger antagandet. I och med detta är satsen bevisad. □

Sats 3.4 Delmängden S av $\mathbb{R}$ är ett intervall med ändpunkterna a, b, där $a < b$ om och endast om (i) S har mer än en punkt och (ii) $\forall x_1, x_2 \in S : \ x \in (x_1, x_2) \implies x \in S$ [S konvex].

Bevis ($\implies$) Om S är ett intervall av formen $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ där $a < b$ och $a = -\infty$ och $b = +\infty$ möjliga i $(-\infty, b), (-\infty, b], [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, \infty)$. (i) och (ii) är uppenbara.

($\Longleftarrow$) Antag först att S är begränsad. Låt $a = \inf\ S$ och $b = \sup\ S$. Antag att $x \in (a, b)$. Vi visar nedan att $x \in S$, varför S måste vara $(a, b), (a, b], [a, b)$ eller $[a, b]$. Om $x \in (a, b)$ så existerar $x_1, x_2 \in S$ så att $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ (enligt Sats 3.3). Enligt antagandet (ii) följer nu $x \in S$.

Om nu S är begränsad nedåt och obegränsad uppåt sättes $a = \inf\ S$. Välj $x > a$. Då finns $x_1, x_2 \in S$ med $a \leq x_1 < x < x_2$. Enligt (ii) har vi igen $x \in S$. Härav följer: S är $(a, +\infty)$ eller $[a, +\infty)$. De övriga fallen bevisas analogt. □

Sats 3.5 Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet I. Då är mängden $f(I)$ ett intervall. Om f är konstant är $f(I)$ en enpunktsmängd $[a, a] := \{x : a \leq x \leq a\} = \{a\}$.

Bevis Om f inte är konstant har $f(I)$ minst två element. Antag nu att $y_1, y_2 \in f(I)$, dvs $\exists\ x_1, x_2 \in I$ med $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ y_1 < y_2$. Eftersom f är kontinuerlig på (I) är den också kontinuerlig på $[x_1, x_2]$ (om $x_1 < x_2$, om $x_1 > x_2$ betraktar vi $[x_2, x_1]$).

Låt nu $y_1 < c < y_2$. Vi vill visa att $c \in f(I)$, dvs $\exists\ x \in I : f(x) = c$. Men detta följer direkt av satsen om mellanliggande värden (Sats 3.1): Eftersom $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ och $y_1 < c < y_2$ så finns det ett $x_0 \in (x_1, x_2)$ så att $f(x_0) = c$. Enligt Sats 3.4 uppfyller $f(I)$ (i) och (ii), dvs $f(I)$ är ett intervall. □

3.3 Om numrerbarhet

Definition 3.2 Talmängden S sägs vara **numrerbar** eller **uppräknelig** (eng.: countable, denumerable) om den är ändlig eller kan avbildas bijektivt på de naturliga talen $\mathbb{N}$. (Bijektionen kallas en **uppräkning** av S.) En mängd som inte är numrerbar kallas **ickenumrerbar** (eng.: uncountable).

Sats 3.6 (Välordningsprincipen) Varje icke-tom delmängd T av de naturliga talen har ett minsta element.

Bevis Låt k vara vara ett element i T. Betrakta mängden

$$S = \{p \mid p \in T,\ p \leq k\}.$$

S är en icke-tom ändlig delmängd av T och har alltså ett minsta element s. Visar att s också är minsta elementet i T. Tag ett $t \in T$. Om $t > k$ så följer av $k \geq s$ att $t > s$. Om däremot $t \leq k$ så $t \in S$ och vi har $t \geq s$ pga. definitionen på s. □

Sats 3.7 (a) Varje icke-tom delmängd av $\mathbb{N}$ är numrerbar.

(b) Varje icke-tom delmängd av en numrerbar mängd är numrerbar.

Bevis (a) Låt S vara en oändlig delmängd av de naturliga talen. (En ändlig mängd är ju definitionsmässigt numrerbar.)

S har ett minsta element (enligt välordningsprincipen) som vi betecknar med k_1. Eftersom $S \setminus \{k_1\}$ är en oändlig delmängd av de naturliga talen har den mängden ett minsta element $k_2 > k_1$. Processen fortsätter och vi bildar successivt $k_3 = \min\{s \in S \mid s > k_2\} = \min(S \setminus \{k_1, k_2\})$, sedan $k_4, \ldots k_n, \ldots$.

Påstår nu att $S = \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$. Betecknar mängden $S \setminus \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ med U. Om nu $U \subset S \subset \mathbb{N}$ är icke-tom så har den ett minsta element u. $k_1 < u$ eftersom k_1 är minsta elementet i hela S. Låt T beteckna mängden $\{k_n \mid n \in \mathbb{N}, k_n \leq u\}$. Då är T ändlig och vi har att $k_i < u < k_{i+1}$ för något naturligt tal i. Detta är en motsägelse för k_{i+1} är definierat som det minsta elementet i $\{s \in S \mid s > k_i\}$. Motsägelse visar att U är tom och alltså $S = \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$.

Avbildningen $n \to k_n$ är en injektiv och surjektiv avbildning från $\mathbb{N}$ till S. $k_1, k_2, k_3, \ldots$ är en uppräkning av S.

(b) Låt f vara en bijektion mellan S och $\mathbb{N}$ (eller en delmängd av $\mathbb{N}$). Låt A vara en delmängd av S. f:s restriktion f_A är en bijektion mellan A och en delmängd av $\mathbb{N}$:

$$f_A(x) = f(x),\ x \in A$$

$$f_A :\ A \to V_{f_A} \subseteq \mathbb{N}$$

f_A är bijektiv eftersom $D_{f_A} = A,\ V_{f_A} = f_A(A)$ och f_A är injektiv på grund av att f är injektiv.

$\square$

Sats 3.8 Om S_i, i= 1,2,..., är numrerbara mängder så är $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ också numrerbar.

Bevis Vi betraktar först fallet då S_i, $i = 1, 2, \ldots$, samtliga är oändliga numrerbara mängder. Eftersom S_i är numrerbar kan den avbildas bijektivt på $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3), \ldots\}$. Mängden $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ kan således avbildas på $\{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots\}$. Elementen i denna mängd kan uppräknas t ex enligt följande schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & \ldots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & \ldots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & \ldots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & \ldots \\
\vdots & \nearrow & \vdots & \nearrow & \vdots &
\end{array}$$

Talparet (p, q) avbildas på $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + q$.

Denna blir **injektiv** om ett element tas med **bara då det förekommer första gången**. Vi får då en bijektion mellan $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ och en delmängd av $\mathbb{N}$ [om vi lämnar "hål" i uppräkningen]. Om S_i'na är disjunkta förekommer varje element bara en gång i uppräkningen.

I det fall att någon av mängderna S_i är ändlig kan vi använda ovan beskrivna injektiva avbildning mellan $\bigcup S_i$ och en delmängd av $\mathbb{N}$. Vi lämnar helt enkelt bort $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + q$ ur uppräkningen om q är större än antalet element i S_p. $\square$

Sats 3.9 Mängden av rationella tal är numrerbar.

Bevis

$$\begin{aligned}
Q &= \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q = 1, 2, \ldots\} \\
&= \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ relativt prima}\}
\end{aligned}$$

"relativt prima" $\iff$ "saknar gemensamma faktorer > 1".

$\mathbb{Q}$ kan alltså avbildas bijektivt på:

$$\begin{aligned}
M &= \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ relativt prima}\} \\
M \subset S &= \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

som är numrerbar enligt Sats 3.8 (se beviset till Sats 3.8). M är då numrerbar enligt Sats 3.7. $\square$

Sats 3.10 Varje familj av disjunkta intervall (innehållande mer än en punkt) är numrerbar.

Bevis Låt F vara en familj bestående av dylika disjunkta intervall. Varje intervall innehåller en punkt $r \in \mathbb{Q}$ (se kapitel 2). Varje intervall $I \in F$ kan således tillordnas ett $r \in Q$. För $I \neq J$ är motsvarande rationella tal olika (ty $I \cap J = \emptyset$). F kan avbildas bijektivt på en delmängd av $\mathbb{Q}$. F är då numrerbar. $\square$

Sats 3.11 $\mathbb{R}$ är ickenumrerbar.

Bevis (Cantors[1] diagonalförfarande.) Det är tillräckligt att bevisa att $[0,1)$ inte är numrerbar. Antag att elementen i $[0,1)$ kan numreras. Låt $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vara en uppräkning av talen i $[0,1)$. Betrakta deras decimalutveckling:

$$x_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13}\ldots$$

$$x_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23}\ldots$$

$$x_3 = 0, d_{31}d_{32}d_{33}\ldots$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0, d_{n1}d_{n2}d_{n3}\ldots$$

där $d_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Där decimalutvecklingen slutar på $, \ldots d_{nk}9999\ldots$ $(d_{nk} \neq 9)$ väljs (standard)formen $, \ldots (d_{nk}+1)0000\ldots$ Då är decimalutvecklingen av x_i:na entydig.

Bildar nu följden $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ enligt följande:

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{om } d_{ii} \neq 1, \text{ i=1,2,\ldots} \\ 0 & \text{om } d_{ii} = 1 \end{cases}$$

Talet $y = 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$ skiljer sig från **alla** tal i uppräkningen $x_1, x_2, x_3, \ldots$, ty $y \neq x_n$ eftersom x_n:s n'te decimal är d_{nn} som skiljer sig från y:s n'te decimal som är a_n.

$\because y \in [0,1)$ men $y \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$.

$\because [0,1)$ är inte uppräknelig.

$\square$

[1]Georg Cantor, 1845-1918

3.4 Monotona funktioner

Definition 3.3 Funktionen f definierad på intervallet I sägs vara **monoton** om den har följande egenskaper:

(i) $f(x_1) < f(x_2)$ för varje $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, ($f$ **strängt växande** på I), eller

(ii) $f(x_1) \leq f(x_2)$ för varje $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, ($f$ **icke-avtagande**), eller

(iii) $f(x_1) \geq f(x_2)$ för varje $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, ($f$ **icke-växande**), eller

(iv) $f(x_1) > f(x_2)$ för varje $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, ($f$ **strängt avtagande**).

Sats 3.12 Antag att f är icke-avtagande på $(a,b),\ a < b$, och uppåt begränsad. Då gäller att $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existerar och är lika med $\sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

Mera allmänt:

Sats 3.13 Antag att f är begränsad och monoton på intervallet $(a,b),\ a < b$. Låt $x_0 \in (a,b)$. Då existerar gränsvärdena

$$\lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \lim_{x\to x_0^+} f(x),\ \lim_{x\to b^-} f(x).$$

Bevis av Sats 3.12: $S = \{f(x)|\ x \in (a,b)\}$. Enligt antagandet är S uppåt begränsad av ett tal M. Då existerar sup $S = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$. Beteckna detta supremum med U (jämför Sats 3.3).

Enligt Sats 3.3 existerar, för varje $\varepsilon > 0$, ett $y(\varepsilon) \in S$ så att $U - \varepsilon < y(\varepsilon) \leq U$. Eftersom $y(\varepsilon) \in S$ finns ett $x(\varepsilon) \in (a,b)$ så att $f(x(\varepsilon)) = y(\varepsilon)$. Om nu $0 < b - x < b - x(\varepsilon)$ [dvs $x(\varepsilon) < x < b$] $U - \varepsilon < y(\varepsilon) = f(x(\varepsilon)) \leq f(x) \leq U$ eftersom f är ickeavtagande och $U = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

Vi har alltså hittat ett $\delta(= b - x(\varepsilon))$ så att $0 < b - x < \delta \implies U - \varepsilon < f(x) \leq U$.

$\because \lim_{x\to b^-} f(x) = U$. $\square$

Sats 3.13 bevisas analogt.

Sats 3.14 Mängden av diskontinuitetspunkter hos en monoton funktion är numrerbar.

Bevis Antag att f är icke-avtagande på $\mathbb{R}$. x_0 är en diskontinuitetspunkt om

$$l_{x_0} := \lim_{x \to x_0^-} f(x) \; < \; \lim_{x \to x_0^+} f(x) =: r_{x_0}$$

[vänstra ledet $\leq$ högra ledet ty om $y < x_0 < z$ så $f(y) \leq f(z)$, varav omedelbart följer $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$].

Varje diskontinuitetspunkt x ger således upphov till ett öppet intervall (l_x, r_x). Om x' är en annan diskontinuitetspunkt med $x' > x$, säg, så är $r_x \leq l_{x'} < r_{x'}$. Intervallen (l_x, r_x) och $(l_{x'}, r_{x'})$ är **disjunkta**.

Familjen $F = \{(l_x, r_x) |\ x$ diskontinuitetspunkt för $f\}$ är en familj disjunkta intervall (med fler än ett element). F är numrerbar, enligt Sats 3.10. Mängden diskontinuitetspunkter är alltså högst numrerbar (kan naturligtvis vara ändlig eller tom). Om f är icke-växande är beviset analogt.

□

3.5 Bolzano-Weierstrass sats

Betrakta talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ och låt $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots$ vara en växande följd av heltal. Talföljden $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ är då en **delföljd** av $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. [Fås genom "uttunning" av $\{x_n\}$ och omnumrering.]

Sats 3.15 (Bolzano-Weierstrass[2] sats) Varje begränsad oändlig talföljd innehåller åtminstone en konvergent delföljd.

Bevis Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då $\exists\ a, b$ så att $a < x_n < b$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Dela $I_1 := [a, b]$ i två lika långa slutna intervall. Åtminstone ett av dessa innehåller oändligt många element ur $\{x_n\}$. Låt $I_2 = [a, \frac{a+b}{2}]$ om detta innehåller oändligt många element ur $\{x_n\}$, i annat fall sätt $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$. Intervallet I_2 delas igen i två lika långa slutna intervall av vilka minst ett innehåller oändligt många element ur $\{x_n\}$. Definiera I_3 på motsvarande sätt som I_2 ovan, dvs I_3 är vänstra halvan av I_2 om denna innehåller oändligt många element, annars är I_3 den högra halvan av I_2. På detta sätt definieras en familj inkapslade intervall $\{I_n\}$, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, där längden $\{I_n\} = 2^{-n}(b - a)$.

Det finns exakt ett tal $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ (Sats 3.2). Visar nu att $\exists\ x_{k_n}$, delföljd av x_n, så att $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = x_0$.

Tag ett $x_{k_1} \in I_1$, därefter x_{k_2} med $k_2 > k_1$ så att $x_{k_2} \in I_2$, sedan $x_{k_3} \in I_3$ sådan att $k_3 > k_2$, etc. Detta är möjligt eftersom $I_1, I_2, \ldots$ innehåller **oändligt många element** ur $\{x_n\}$. Klart att $|x_{k_n} - x_0| < 2^{-n}(b - a)$, dvs $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = x_0$.

□

[2]Bernard Bolzano, 1781-1848 (Prag) och Karl Weierstrass, 1815-1897 (Berlin).

Anmärkning x_0 är ej alls entydigt. Det kan finnas massor av olika punkter som någon delföljd konvergerar emot. (Ex: Låt $\{x_n\}$ vara en uppräkning av $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.)

Anmärkning $B = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n}\ x_k)$ är också gränsvärde av en delföljd. Sätt $y_n = \sup_{k\geq n} x_k$. Då är y_n en **avtagande** följd, $a \leq y_n \leq b$. Likaså är $A = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n}\ x_k)$ gränsvärde för en delföljd. Vidare gäller $A \leq B$.

3.6 En sats om kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall

Anmärkning Ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ kallas **kompakt intervall**.

Sats 3.16 Antag att f är en kontinuerlig funktion på det slutna intervallet $I = [a, b]$. Då existerar $x_0, x_1 \in I$ så att

$$f(I) = [f(x_0), f(x_1)],$$

dvs f antar sitt infimum (som är lika med $f(x_0)$) och sitt supremum (som är lika med $f(x_1)$) på I.

Bevis Visar först att $f(I)$ är begränsad. Antag att $f(I)$ vore obegränsad. Då existerar $x_n \in I$ med $|f(x_n)| > n$. Enligt Bolzano-Weierstrass sats existerar en delföljd $\{x_{k_n}\}$ så att $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \bar{x} \in I$. Eftersom f är kontinuerlig på I gäller då att

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\bar{x}).$$

Men detta är ej möjligt ty $|f(x_{k_n})| > k_n$ varför $\lim_{n\to\infty}|f(x_{k_n})| = \infty$.

$\because f(I)$ är begränsad.

Vet att $M = \sup\ f(I)$ och $m = \inf\ f(I)$ existerar. Visar nu att $\exists\ x_1 : f(x_1) = M$ (beviset för $\exists\ x_0 : f(x_0) = m$ är analogt).

Enligt definitionen på supremum existerar, för varje n, ett $z_n \in I$ så att $M - \frac{1}{2n} < f(z_n) \leq M$.

En delföljd $\{z_{k_n}\}$ av $\{z_n\}$ konvergerar mot ett $x_1 \in I$. Då har vi

$$M - \frac{1}{2n} < M - \frac{1}{2k_n} < f(z_{k_n}) \leq M$$

(då $k_n \geq n$). Härav inses att $\lim_{n\to\infty} f(z_{k_n}) = M$.

Å andra sidan vet vi att $\lim_{n\to\infty} f(z_{k_n}) = f(x_1)$.

$\because f(x_1) = M$

$\square$

Anmärkning Om intervallet ej är slutet gäller satsen inte.

Exempel $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 1. \quad M = 1, \quad m = 0.$

Om intervallet är oändligt gäller satsen inte heller.

Exempel $f(x) = 1 + e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad M = 2, \quad m = 1.$

Anmärkning Satsen har stor betydelse i tillämpningar där maximum eller minimum för f skall bestämmas. Om man enkelt kan utesluta vissa oändliga intervall kan vi också klara av fall som inte direkt uppfyller kraven i Sats 3.16.

Exempel Sök $\sup_{x \in \mathbb{R}} \ e^{-|x|} \sin x$.

Eftersom värdet av funktionen i $\frac{\pi}{2}$ är $e^{-\frac{\pi}{2}} > \ e^{-2}$ och eftersom $|x| > 2$ medför att $\left| e^{-|x|} \sin x \right| \leq e^{-2} \cdot 1$, får vi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \ e^{-|x|} \sin x \ = \ \sup_{|x| \leq 2} \ e^{-|x|} \sin x \overset{\text{Sats 3.16}}{=} \max_{-2 \leq x \leq 2} \ e^{-|x|} \sin x.$$

(Löses genom differentialkalkyl)

Svar: Maximet är $e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ som antas i punkten $\frac{\pi}{4}$.

3.7 Likformig kontinuitet

Definition 3.4 Funktionen f sägs vara likformigt kontinuerlig om

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D_f : \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

"Variationen i funktionsvärdena är $< \varepsilon$ i varje intervall av längden $< \delta$."

Sats 3.17 (Heines[3] sats)

Om funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $I = [a, b]$ så är den likformigt kontinuerlig på I.

[3] Heinrich Eduard Heine, 1821-1881, (Halle)

Bevis Antag motsatsen:

$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists\ x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta$ och $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$

Speciellt, om vi tar $\delta = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$, kan vi finna $\{x_{1n}\}, \{x_{2n}\}$ med

$$|x_{1n} - x_{2n}| < \frac{1}{n},\ |f(x_{1n}) - f(x_{2n})| \geq \varepsilon.$$

Följden $x_{1n} \in I$ har en konvergent delföljd: $\exists x_0 \in I$: $\lim_{n\to\infty} x_{1k_n} = x_0$.

Men $\lim_{n\to\infty} x_{2k_n}$ existerar också och är $= x_0$:

$$|x_{2k_n} - x_0| = |x_{2k_n} - x_{1k_n} + x_{1k_n} - x_0| \leq \underbrace{|x_{2k_n} - x_{1k_n}|}_{\leq \frac{1}{k_n} < \frac{1}{n}} + \underbrace{|x_{1k_n} - x_0|}_{\to 0,\text{ då } n\to\infty} \to 0$$

då $n \to \infty$

$\because \lim_{n\to\infty} x_{2k_n} = x_0$.

Vi har alltså $\lim_{n\to\infty} x_{2k_n} = x_0$ och $\lim_{n\to\infty} x_{1k_n} = x_0$ varför, eftersom f är kontinuerlig i x_0,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{2k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{1k_n}) = f(x_0). \tag{3.2}$$

Detta motsäger valet av x_{1n} och x_{2n}, ty (3.2) innebär att det finns N sådant att

$$n > N \implies |f(x_{2k_n}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ och } |f(x_{1k_n}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

alltså $|f(x_{1k_n}) - f(x_{2k_n})| \leq |f(x_{1k_n}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{2k_n})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Antitesen är alltså falsk.

$\because f$ är likformigt kontinuerlig.

$\square$

Exempel Bevisa att $\sqrt{x},\ x \geq 0$, är likformigt kontinuerlig. Enligt satsen är $\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 2$, likformigt kontinuerlig. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta : |x_1 - x_2|,\ x_1, x_2 \in [0, 2] \implies |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon$.

För $x_1, x_2 \geq 1$ har vi

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}\ .$$

Om nu ε väljs $< \frac{1}{2}$ så har vi

$$|x_1 - x_2| < \min(\delta, 2\varepsilon),\ x_1, x_2 \geq 0 \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Exempel $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, är ej likformigt kontinuerlig, ty $|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2|$, vilket innebär att om t.ex. $x_{1n} = n,\ x_{2n} = n + \frac{1}{2n}$ så är $|x_{1n} - x_{2n}| < \frac{1}{n}$ men $|x_{1n}^2 - x_{2n}^2| \geq 1,\ n = 1, 2 \ldots$

3.8 Cauchyföljder och Cauchys konvergenskriterium

Definition 3.5 Talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sägs vara en **Cauchyföljd**[4] (**C-följd** eller **fundamentalföljd**) om

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N : \; m, n > N \implies |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Sats 3.18 (Cauchys konvergenskriterium) Talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent om och endast om den är en Cauchyföljd.

Bevis ($\implies$) Antag att $\lim_{n\to\infty} x_n := x_0$ existerar. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och välj N så att

$$n > N \implies |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Då gäller för $n, m > N$

$$|x_n - x_m| \;=\; |x_n - x_0 + x_0 - x_m| \;\leq\; |x_n - x_0| \;+\; |x_0 - x_m| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \;.$$

$\because$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.

($\impliedby$) Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd. Påstår att $\lim_{n\to\infty} x_n$ existerar. Först visas att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad. Låt $\varepsilon = 1$ och välj N så att $n, m > N \implies |x_n - x_m| < 1$. Då är $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ begränsad av

$$\max\{|x_1|,\; |x_2|,\; |x_3|, \ldots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}.$$

Eftersom $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad har den en konvergent delföljd $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (Sats 3.15, Bolzano-Weierstrass) vars gränsvärde sätts $= x_0$.

Vi bevisar nu att $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Tag ett $\varepsilon > 0$ och observera att

(1) $\exists N_1 : \; m, n > N_1 \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

(2) $\exists K : \; k > K \geq N_1 \implies |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

För $n > n_{K+1}$ gäller, eftersom $n_{K+1} \geq K + 1$, att

$$|x_n - x_0| \;=\; |x_n - x_{n_{K+1}} + x_{n_{K+1}} - x_0| \;\leq\; |x_n - x_{n_{K+1}}| \;+\; |x_{n_{K+1}} - x_0| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

$\square$

[4] Augustin Louis Cauchy, 1789-1857 (Paris)

Anmärkning Cauchys kriterium garanterar existens av gränsvärde utan att vi behöver ha en "kandidat". Detta är en mycket viktig egenskap hos $\mathbb{R}$.

Sats 3.19 Antag $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ är en **kontraktion**, dvs $\exists\ c \in (0,1)$

$$\forall x_1, x_2 : |f(x_1) - f(x_2)| \ \leq\ c \cdot\ |x_1 - x_2|.$$

Då existerar en **fixpunkt** för f, dvs ett x_0 med $f(x_0) = x_0$.

Anmärkning Fallet $c = 0$ kan också tillåtas. I detta fall antar funktionen f bara ett enda värde, dvs. är konstant. Fixpunkten är denna konstant.

Bevis Definiera $x_1 \in \mathbb{R},\ x_{n+1} = f(x_n),\ n = 1, 2, \ldots$. Då är $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchyföljd, ty (induktionsbevis):

$$|x_3 - x_2| \ =\ |f(x_2) - f(x_1)| \ \leq\ c \cdot\ |x_2 - x_1|$$

$$|x_4 - x_3| \ \leq\ c \cdot\ |x_3 - x_2| \ \leq\ c^2 \cdot\ |x_2 - x_1|$$

$$\vdots$$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \ \leq\ c^n \cdot\ |x_2 - x_1|.$$

Nu gäller

$$|x_{n+k+2} - x_{n+1}| \ \leq\ |x_{n+k+2} - x_{n+k+1}| + |x_{n+k+1} - x_{n+k}| + \ldots + |x_{n+2} - x_{n+1}|$$

$$\leq\ (c^{n+k} + c^{n+k-1} + \ldots + c^n)\ |x_2 - x_1| \ \leq\ \frac{c^n}{1-c} \cdot |x_2 - x_1|.$$

Om N uppfyller $\frac{c^N}{1-c} \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon$ så får vi att

$$n, m > N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$\because \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd och f kontinuerlig (t.o.m. likformigt kontinuerlig)

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

$\square$

Anmärkning Fixpunkten är **entydig**. (Lätt!)

Kapitel 4

Differentialkalkyl

4.1 Definitioner; grundregler

Definition 4.1 Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och antag att D_f omfattar en omgivning av x_0, dvs. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset D_f$ för något $\varepsilon > 0$. Funktionen f sägs vara **deriverbar i $\boldsymbol{x_0}$** om

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existerar. Gränsvärdet kallas **$\boldsymbol{f}$:s derivata i $\boldsymbol{x_0}$**, bet $f'(x_0)$.

Funktionen f sägs vara **deriverbar** om den är deriverbar i alla punkter $x \in D_f$. Funktionen $x \to f'(x),\ x \in D_f$, kallas **$\boldsymbol{f}$:s derivata**, bet. f'.

Sats 4.1 Om f är deriverbar i x_0 så är f kontinuerlig i x_0.

Bevis Betrakta för $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\textbf{differenskvoten}} (x - x_0)$$

Då $x \to x_0$ existerar både gränsvärdet av $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ och gränsvärdet av $x - x_0$.

Alltså:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$\because \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\square$

Sats 4.2 Antag att u och v är deriverbara funktioner i det öppna intervallet $I = (a, b)$.

Då är $f(x) := u(x)v(x),\ x \in I$, deriverbar i $x \in I$ och $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Bevis Låt $x_0 \in I$. Studerar

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} \\
&\longrightarrow u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0) \text{ då } x \to x_0
\end{aligned}$$

Obs! v:s kontinuitet i x_0 utnyttjas också! $\square$

Sats 4.3 Antag att u och v är deriverbara i det öppna intervallet I och att $v(x) \neq 0, x \in I$. Då är $f(x) := u(x)/v(x),\ x \in I$, deriverbar i I och

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2},\ x \in I$$

Bevis Låt $x_0 \in I$ och betrakta

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0} = \frac{u(x)v(x_0)-v(x)u(x_0)}{v(x)v(x_0)(x-x_0)} \\
= \frac{1}{v(x)v(x_0)} &\cdot \frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)+u(x_0)v(x_0)-v(x)u(x_0)}{x-x_0} \\
\xrightarrow{x\to x_0} \frac{1}{\big(v(x_0)\big)^2} &\cdot \big(u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)\big)
\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Kedjeregeln

Sats 4.4 ("Fundamental Lemma of Differentiation") Antag att f är deriverbar i x_0. Då finns det en funktion η definierad i en omgivning av 0 sådan att

$$(*) \qquad f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + \eta(h)h$$

Funktionen $h \to \eta(h)$ är kontinuerlig i 0 och $\eta(0) = 0$.

Bevis Definiera

$$\eta(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)-f'(x_0) & ,h \neq 0 \\ 0 & ,h = 0 \end{cases}$$

Då är $(*)$ uppfylld, trivialt. Vidare är

$$\lim_{h\to 0}\eta(h) = f'(x_0)-f'(x_0) = 0,$$

varför η är kontinuerlig i 0. $\square$

Anmärkning För "vanliga" elementära funktioner är $\eta(h) \approx c \cdot h$.

Sats 4.5 (Kedjeregeln) Antag att g och u är sådana att $D_g = D_u = \mathbb{R}$. Inför $f(x) = g\big(u(x)\big)$. Antag att u är deriverbar i punkten x_0 och att g är deriverbar i $u(x_0)$. Då är $f = g \circ u$ deriverbar i x_0 och

$$f'(x_0) = g'\big(u(x_0)\big) \cdot u'(x_0)$$

(Kortformel: $(g \circ u)' = (g' \circ u) \cdot u'$)

Bevis

$$\begin{aligned} &f(x_0+h) - f(x_0) = g\big(u(x_0+h)\big) - g\big(u(x_0)\big) = g\big(u(x_0) + u(x_0+h) - u(x_0)\big) - g\big(u(x_0)\big) \\ &= g'\big(u(x_0)\big)\big(u(x_0+h) - u(x_0)\big) + \eta\big(u(x_0+h) - u(x_0)\big) \cdot \big(u(x_0+h) - u(x_0)\big) \end{aligned}$$

Härav

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= g'\big(u(x_0)\big) \cdot \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \\ &\quad + \eta\big(u(x_0+h) - u(x_0)\big) \cdot \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Låt nu $h \to 0$ i högra membrum

I termen: $g'\big(u(x_0)\big) \cdot u'(x_0)$ [u:s deriverbarhet]

II termen: $\underbrace{\eta(0)}_{=0} \cdot u'(x_0)$ [u kontinuerlig och η kontinuerlig i 0, se Sats 2.7]

$$\because \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g'\big(u(x_0)\big) \cdot u'(x_0)$$

$\square$

4.3 Satser om deriverbara funktioner

Sats 4.6 Antag att funktionen f är definierad på intervallet I (öppet eller slutet) och antag att f antar sitt största värde i en inre punkt $x_0 \in I$. [dvs. x_0 är **inte** en av I:s intervalländpunkter]. Om f är deriverbar i x_0 så är $f'(x_0) = 0$.

Anmärkning $f(x) = -|x|,\ x \in \mathbb{R}$ visar att deriverbarhetskravet är väsentligt!

Bevis Eftersom x_0 är en inre punkt av I så är $x_0 + h, x_0 - h \in I$ för tillräckligt små värden på $|h|$. Betrakta

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Detta uttryck är ≤ 0 för alla sådana h pga att $f(x_0)$ är funktionens största värde.

$$\text{Då gäller } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \text{ och } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Pga. antagandet existerar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Vi har då $f'(x_0) \geq 0$ och $f'(x_0) \leq 0$.

$\because f'(x_0) = 0$. $\square$

Anmärkning På motsvarande sätt visas att $f'(x_0) = 0$ om f antar sitt minsta väde i x_0 och är deriverbar där.

Korollarium 4.1 Om f är kontinuerlig på $I = [a, b]$ (slutet intervall) och $f(x_0) = \sup f(I)$ så är x_0 antingen ett nollställe för f', en punkt där f ej är deriverbar eller en intervalländpunkt a eller b.

Exempel Vilka värden antar funktionen $f(x) = x^3 + 2|x|,\ x \in [-2, 1] =: I$?

Funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-2, 1]$.

$f(I)$ är därför $= [\inf f(I), \sup f(I)]$, (jfr kapitel 3: $f(I)$ är ett intervall och f antar sitt minsta och största värde.)

$$\begin{aligned}
f(-2) &= -8 + 4 = -4 \\
f(1) &= 3 \\
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \begin{cases} 3x^2 + 2 & ,x > 0 \text{ saknar nollställe} \\ 3x^2 - 2 & ,x < 0 \text{ nollställe: } x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \\
f(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}) &= -\sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot \tfrac{2}{3} + 2 \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}
\end{aligned}$$

$$f[-2, 1] = [-4, 3]$$

Däremot $f[-1, 1] = [0, 3]$ och $f[-1, \frac{1}{2}] = [0, \frac{9}{8}]$

ty $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8} = \sqrt{\frac{81}{64}}$ och $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = \sqrt{\frac{32}{27}}$.

Sats 4.7 (Rolles[1] sats) Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar i (a, b).

Om $f(a) = f(b) = 0$ finns det åtminstone en punkt $x_0 \in (a, b)$ där $f'(x_0) = 0$.

Bevis Om $f(x) = 0,\ x \in [a, b]$, så är även $f'(x) = 0,\ x \in (a, b)$.

Antag nu att f antar positiva värden på (a, b). [Analogt för negativa.]

Då finns ett $x_0 \in (a, b)$ med $f(x_0) = \sup f[a, b]$ dvs. f antar sitt största värde i x_0

$\because f'(x_0) = 0$ (Sats 4.6). □

Sats 4.8 (Medelvärdessatsen) Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar i (a, b). Då finns ett tal $x_0 \in (a, b)$ så att

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bevis Definiera för $x \in [a, b]$

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Då har vi

$$F(a) = 0,\ F(b) = 0 \text{ och } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

som alltså existerar för $x \in (a, b)$.

Enligt sats 4.7 finns ett $x_0 \in (a, b)$ så att $F'(x_0) = 0$, dvs.

$$0 = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ eller } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Sats 4.9 Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar i (a, b). Då gäller

(i) $f'(x) > 0,\ x \in (a, b) \implies f$ strängt växande på $[a, b]$

(ii) $f'(x) < 0,\ x \in (a, b) \implies f$ strängt avtagande på $[a, b]$

Bevis av (i) Låt $x_1, x_2 \in [a, b],\ x_1 < x_2$. Då studeras f på $[x_1, x_2]$. Det existerar ett $x_0 \in (x_1, x_2)$ med

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Härav, eftersom $f'(x_0) > 0$, följer $f(x_1) < f(x_2)$ □

[1] Michel Rolle (1652-1719), Frankrike

Sats 4.10 (Generaliserade medelvärdessatsen) Låt funktionerna f och F vara kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara i (a, b). Antag vidare att $F'(x) \neq 0$ för varje $x \in (a, b)$. Då gäller att $F(b) - F(a) \neq 0$ och att det finns ett $x_0 \in (a, b)$ så att

$$(*) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(x_0)}{F'(x_0)}$$

Bevis Noterar först att $F(b) - F(a) = 0$ skulle medföra existens av ett $x \in (a, b)$ med $F'(x) = 0$, en motsägelse [enligt Rolles sats].

Inför funktionen Φ på $[a, b]$:

$$\Phi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \big(F(x) - F(a)\big)$$

Då är $\Phi(b) = \Phi(a) = 0$. Vidare ger Rolles sats (sats 4.7) att $\exists\ x_0 \in (a, b)$ med $\Phi'(x_0) = 0$. För detta x_0 har vi

$$0 = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(x_0)$$

som är ekvivalent med $(*)$. $\square$

Tillämpning

Sats 4.11 Antag att f och g är definierade på $[a, b]$ och uppfyller

(i) $f',\ g'$ existerar på (a, b)

(ii) $\exists\ x_0 \in (a, b):\ f(x_0) = g(x_0)$

(iii) $f'(x) > g'(x)$ för $x \in (x_0, b)$

(iv) $f'(x) < g'(x)$ för $x \in (a, x_0)$

Då är $f(x) > g(x)$ för varje $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$.

Bevis (på (a, x_0)) Undersöker $h(x) = f(x) - g(x),\ h(x_0) = 0,\ h'(x) < 0,\ x \in (a, x_0)$. h är avtagande på $[a, x_0]$, varför $h(x) > h(x_0) = 0,\ x \in (a, x_0)$. $\square$

Sats 4.12 Antag att funktionen f är deriverbar på (a, b) (där $a = -\infty,\ b = +\infty$ är tillåtet) och att derivatan är begränsad (dvs. mängden$\{f'(x) |\ a < x < b\}$ är begränsad. Då är f likformigt kontinuerlig på (a, b).

Bevis Övning! $\square$

4.4 L'Hospitals regler

I detta avsnitt behandlas den så kallade l'Hospitals[2] regel. Först, i Sats 4.13, formuleras regeln i fall $''\frac{0}{0}''$, därefter, i Sats 4.14, i fall $''\frac{\infty}{\infty}''$.

Sats 4.13 Låt f och F vara deriverbara funktioner på (a,b). Antag att $F'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$. Om

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} F(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L$$

Då gäller att $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{F(x)} = L$.

Bevis Eftersom $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} F(x) = 0$ utvidgas D_f och D_F till att omfatta a och $f(a)$ genom att sätta $f(a) = F(a) = 0$, dvs f och F blir kontinuerliga på hela $[a,b)$. Det gäller vidare att $F(x) \neq 0$ på (a,b) (eftersom $F'(x) \neq 0$ på (a,b); $F(x) = F(x) - F(a) = F'(x_0)(x-a)$ för något $x_0 \in (a,x)$.)

För givet $\varepsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ med

$$(*) \qquad a < x < a+\delta \implies \left|\frac{f'(x)}{F'(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Härav (sats 4.10): För dessa x

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)} - L\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)} - L\right| \overset{\exists\, x_0 \in (a,x)}{\overset{\downarrow}{=}} \left|\frac{f'(x_0)}{F'(x_0)} - L\right| \overset{(*)}{\overset{\downarrow}{<}} \varepsilon$$

Alltså $a < x < a+\delta \implies \left|\frac{f(x)}{F(x)} - L\right| < \varepsilon$, dvs.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{F(x)} = L$$

□

Anmärkning Under motsvarande antaganden gäller detta resultat också för gränsvärdet $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{F(x)}$.

Korollarium 4.2 Låt f och F vara deriverbara på $(a,+\infty)$.

Antag att $F'(x) \neq 0,\ x > a$.

Om $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ och $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L$ så gäller även

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = L$$

[2] Guillaume de l'Hospital (modern franska l'Hôpital)(1661-1704). Författare till den första läroboken i differentialkalkyl 1696.

Bevis Inför funktionerna g respektive G på $(0, \frac{1}{a})$ genom

$g(x) = f(\frac{1}{x}),\ G(x) = F(\frac{1}{x}),\ 0 < x < \frac{1}{a}$.

Då har vi $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{y\to\infty} f(y) = 0$ och motsvarande för G.

Vidare gäller $g'(x) = f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2},\ G'(x) = F'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2}$

varför

$$\frac{g'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{F'(\frac{1}{x})} \text{ och } \lim_{x\to 0^+} \frac{g'(x)}{G'(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f'(y)}{F'(y)} = L.$$

Härav (sats 4.13)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{G(x)} = L \text{ och } \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{F(y)} = L.$$

□

Sats 4.14 Antag att f och F är deriverbara på (a, b) och att $F'(x) \neq 0,\ x \in (a, b)$. Om

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} F(x) = \infty \text{ och } \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L$$

så gäller även

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{F(x)} = L.$$

Bevis Vi börjar med att konstatera att $\exists\ \delta^* > 0$ så att $a < x < a + \delta^* \implies F(x) \neq 0$, ty om $x_1 > a$ är en punkt där $F(x_1) = 0$ så är i varje fall

$$F(x) = F(x) - F(x_1) = F'(x_0)(x - x_1) \neq 0$$

(där $x_0 \in (x, x_1) \subset (a, b)$); vi kan då sätta $a + \delta^* = x_1$. Om ett dylikt x_1 ej finnes kan vi ju sätta $a + \delta^* = b$.

Låt nu $\varepsilon > 0$ vara givet och välj $\delta > 0,\ \delta \leq \delta^*$, så att

$$a < \xi < a + \delta \implies \left| \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

och $F'(\xi) \neq 0$.

Välj nu x och c så att $a < x < c < a + \delta$. Då finns, enligt generaliserade medelvärdessatsen, en punkt $\xi \in (x, c)$ så att

$$\frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$(F(x) - F(c) \neq 0$ ty F' är $\neq 0$ på (a, b).)

Från (4.1) följer nu

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2}$$

och, om vi valt $\varepsilon < 1$,

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right| \leq |L| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |L| + \frac{1}{2}. \tag{4.3}$$

Det gäller vidare att

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)} \overset{\substack{\text{algebraisk manipulation}\\ \downarrow}}{=} \frac{f(c)}{F(x)} - \frac{F(c)}{F(x)} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}$$

och med hjälp av (4.3) fås

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right| \leq \left|\frac{f(c)}{F(x)}\right| + \left|\frac{F(c)}{F(x)}\right|\big(|L| + \frac{1}{2}\big) \tag{4.4}$$

Låt nu $x \to a^+$ i (4.4). Eftersom $f(x),\ F(x) \to \infty$ då $x \to a^+$finns $\delta_1 > 0,\ \delta_1 < \delta$, så att

$$a < x < a + \delta_1 \implies \left|\frac{f(c)}{F(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ och } \left|\frac{F(c)}{F(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4\big(|L| + \frac{1}{2}\big)} \tag{4.5}$$

(4.2), (4.4) och (4.5) ger nu, för $a < x < \delta_1$,

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)} - L\right| \leq \left|\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)} - L\right| \overset{(4.4),\,(4.2)}{<}$$
$$\left|\frac{f(c)}{F(x)}\right| + \left|\frac{F(c)}{F(x)}\right|\big(|L| + \frac{1}{2}\big) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(4.5)}{<} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4\big(|L| + \frac{1}{2}\big)} \cdot \big(|L| + \frac{1}{2}\big) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Alltså har vi funnit ett $\delta_1 > 0$ så att

$$a < x < \delta_1 \implies \left|\frac{f(x)}{F(x)} - L\right| < \varepsilon$$

$\square$

Exempel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Exempel

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x \cdot \Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cot x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin^2 x = 1$$

eller $\sin x \cdot \dfrac{\big(\frac{\pi}{2} - x\big)}{\cos x} \to \dfrac{-1}{-\sin\frac{\pi}{2}} = 1$

4.5 Inversa funktioner

Definition 4.2 Låt S vara en relation på $\mathbb{R}$, dvs. en delmängd av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Relationen

$$S^{-1} := \{(x, y) |\ (y, x) \in S\}$$

kallas **den inversa relationen** till S.

Om f är en funktion så är f^{-1} en relation, men om f är en **omvändbar** funktion så blir f^{-1} en (omvändbar) funktion.

[**Bevis:** $f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2$ varför $(y_1, x_1),\ (y_1, x_2) \in f^{-1} \iff y_1 = f(x_1),\ y_1 = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, dvs. f^{-1} är en funktion.]

Sats 4.15 Antag att f är en kontinuerlig och strängt växande funktion definierad på intervallet I. Då gäller att

(i) $J := V_f = \{y|\ \exists x \in I : f(x) = y\}$ är ett intervall

(ii) den inversa relationen g av f är en funktion, som uppfyller $g\big(f(x)\big) = x,\ \forall x \in I;\ f\big(g(y)\big) = y,\ \forall y \in J$

(iii) g är strängt växande och kontinuerlig.

Bevis (i) Se kapitel 3, sats 3.5.

(ii) f är omvändbar ty $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),\ x_1, x_2 \in I$, varför inversen $g:\ V_f \to D_f$ är en funktion.

Om vi önskar beräkna $a = g\big(f(x)\big)$ noterar vi att $u = g(z) \iff f(u) = z$, varför vi drar slutsatsen att $f(a) = f(x)$ varav $a = x$ pga. att f är omvändbar.

För att visa $f(g(y)) = y,\ \forall y \in J$, konstaterar vi att alla $y \in J$ är av formen $y = f(x),\ x \in I$. Då följer $f(g(f(x))) = f(x),\ x \in I$, av att $g(f(x)) = x$.

(iii) Påstående: g är strängt växande.

Om ej g vore strängt växande skulle det finnas $y_1 < y_2$ med $g(y_1) \geq g(y_2)$ varav, pga. att f är växande, $f\big(g(y_1)\big) \geq f\big(g(y_2)\big)$, varav (ii) ger $y_1 \geq y_2$, en motsägelse.

Påstående: g är kontinuerlig

Låt y_0 vara en inre punkt av J. (Ändpunkterna behandlas analogt.) Då är $y_0 = f(x_0)$ för ett $x_0 \in I$. Om $y_1' < y_0 < y_2';\ y_1', y_2' \in J$ så har vi $\exists\ x_1', x_2' \in I$ så att $f(x_1') = y_1',\ f(x_2') = y_2'$. Vi har dessutom att $x_1' < x_0 < x_2'$ eftersom $x_1' = g(y_1')$ och $x_2' = g(y_2')$ och g är en strängt växande funktion (enligt ovan). Mao. är x_0 en inre punkt av I.

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet så att $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$. Sätt nu $y_1 = f(x_0 - \varepsilon),\ y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ dvs. $g(y_1) = x_0 - \varepsilon,\ g(y_2) = x_0 + \varepsilon$. Då f är strängt växande gäller $y_1 < y_0 < y_2$. Då g är strängt växande har vi

$$y \in (y_1, y_2) \implies g(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

eller

$$y_1 < y < y_2 \implies \big|g(y) - g(y_0)\big| < \varepsilon$$

Sätt $\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$:

$$|y - y_0| < \delta \implies \big|g(y) - g(y_0)\big| < \varepsilon.$$

$\square$

Sats 4.16 Antag att f är kontinuerlig och växande på intervallet I. Antag att f är omvändbar med inversen g. Antag att $y_0 \in J = f(I)$ är given och att $f'\big(g(y_0)\big)$ existerar och $\neq 0$. Då existerar även $g'(y_0)$ och vi har

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

Bevis Eftersom $f\big(g(y)\big) = y,\ y \in J$ har vi enligt sats 4.4

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{y_0 + h - y_0}{h} = \frac{f\big(g(y_0 + h)\big) - f\big(g(y_0)\big)}{h} \\ =& \Big(f'\big(g(y_0)\big) + \eta\big(g(y_0 + h) - g(y_0)\big)\Big) \cdot \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} \end{aligned}$$

Då $h \to 0$ gäller det att

$$f'\big(g(y_0)\big) + \eta\big(g(y_0 + h) - g(y_0)\big) \to f'\big(g(y_0)\big) + \eta(0) = f'\big(g(y_0)\big)$$

ty g är kontinuerlig i y_0 enligt Sats 4.15. Härav fås att

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

$\square$

Obs! Då vi **vet** att g är deriverbar kan kedjeregeln användas:

$$1 = (f \circ g)'(y_0) = f'\big(g(y_0)\big) \cdot g'(y_0)$$

4.6 Högre derivator

Låt f vara kontinuerlig och deriverbar. Om funktionen f' också är kontinuerlig säger vi att f är **kontinuerligt deriverbar**.

Om f' är deriverbar kallas dess derivata **andra derivatan** av f. Bet.: f''. Alltså $f'' = (f')'$.

Analogt definieras **tredje, fjärde, ...** derivatan av f.

Exempel Om f är två gånger deriverbar i (a, b) och det finns en punkt $x_0 \in (a, b)$ där $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$ så antar f i x_0 ett **strängt lokalt minimum**, dvs. det existerar en punkterad omgivning av x_0 där $f(x) > f(x_0)$.

Bevisskiss: Derivatan f' är strängt växande i en omgivning av x_0. Låt funktionen g vara konstanten $f(x_0)$ och använd Sats 4.11.

Kapitel 5

Integralkalkyl

5.1 Definitionen av Darbouxintegralen

Definition 5.1 En **indelning** eller **partition** av det slutna intervallet $[a, b]$ är en familj av slutna intervall $\Delta := \{I_i\}_{i=1}^n = \{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1}^n$ där $n \in \mathbb{N}$ och $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. Eftersom Δ bestäms av talföljden $\{t_i\}_{i=0}^n$ skriver vi också att $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^n$.

Definition 5.2 Låt f vara en begränsad funktion på det slutna intervallet $[a, b]$ och $\Delta = \{I_i\}_{i=1}^n$ en indelning av $[a, b]$. Sätt $M_i = \sup\{f(x)|x \in I_i\}$ och $m_i = \inf\{f(x)|x \in I_i\}$. Talen

$$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i \; l(I_i) \qquad\qquad l(I_i) = t_i - t_{i-1}$$

$$S_-(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i \; l(I_i)$$

kallas **över-** respektive **undersumman** av f med avseende på Δ, se Figur 5.1.

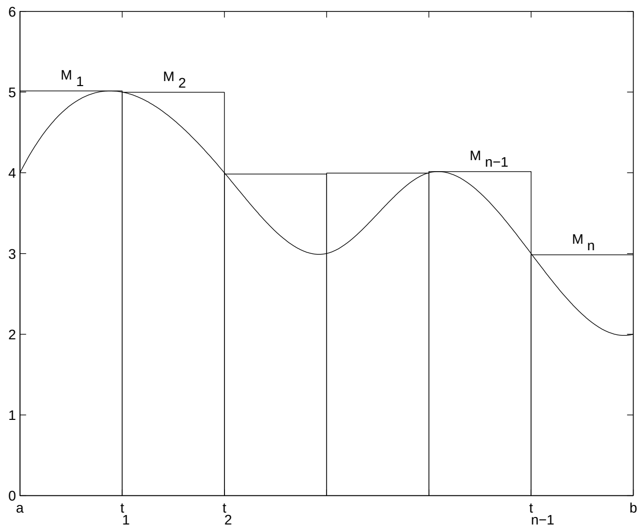
Låt $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^n$ vara en indelning av $[a, b]$. En **förfining** av Δ är en indelning Δ' som innehåller alla Δ :s indelningspunkter och ett antal indelningspunkter som inte tillhör Δ .

Exempel

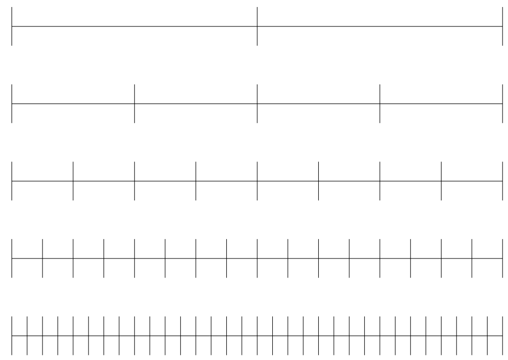
$$\begin{array}{llllll} \Delta: & a = & t_0 < & t_1 < \ldots < t_{n-1} < & t_n = b \\ \Delta': & a = & t'_0 < t'_1 < t'_2 < & t'_3 < \ldots < t'_m < \ldots < t'_N = b. \end{array}$$

där $t_1 = t'_3, \ldots, t_{n-1} = t'_m, \ldots, t_n = t'_N$.

Exempel Om $\Delta_1 = \{t_i^{(1)}\}_{i=0}^n$ och $\Delta_2 = \{t_i^{(2)}\}_{i=0}^m$ är indelningar av $[a, b]$ så är $\Delta_1 \cup \Delta_2$ en ny indelning som är en förfining av både Δ_1 och Δ_2.



Figur 5.1: Bildande av översumma



Figur 5.2: Successiv halvering av intervall

Exempel Vanlig förfining: Successiv halvering av intervallen, se Figur 5.2.

Sats 5.1 Låt $f,\ \Delta,\ m_i,\ M_i,\ i = 1, ..., n$ vara såsom i Definition 5.2. Definiera också $M = \sup\{f(x)|a \leq x \leq b\}$ och $m = \inf\{f(x)|a \leq x \leq b\}$. Då gäller

(i) $m(b-a)\ \leq\ S_-(f,\Delta)\ \leq\ S^+(f,\Delta)\ \leq\ M(b-a)$,

(ii) $S_-(f,\Delta)\ \leq\ S_-(f,\Delta')\ \leq\ S^+(f,\Delta')\ \leq\ S^+(f,\Delta)$
om Δ' är en förfining av Δ,

(iii) $S_-(f,\Delta_1)\ \leq\ S^+(f,\Delta_2)$

där Δ_1 och Δ_2 är två godtyckliga indelningar av $[a, b]$.

Bevis (i) Eftersom $m \le m_i \le M_i \le M,\ i = 1, 2, ..., n$, får vi att

$$m(b-a) \overset{(*)}{=} m\sum_{i=1}^{n} l(I_i) \le \sum_{i=1}^{n} m\ l(I_i) \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\ l(I_i)}_{=S_-(f,\Delta)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i\ l(I_i)}_{=S^+(f,\Delta)}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} M\ l(I_i) = M\sum_{i=1}^{n} l(I_i) = M(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + ... + t_i - t_{i-1} + ... + t_n - t_{n-1})$$

$$= M(t_n - t_0) = M(b-a).$$

(*) "teleskopering"

(ii) Låt Δ_i' beteckna den indelning av $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ som består av de intervall i Δ' som är delintervall av I_i. Då är $m_i\ l(I_i) \le S_-(f, \Delta_i')$ eftersom $m_i \le \inf\{f(x) | x \in \text{ intervall i } \Delta_i'\}$ Eftersom Δ' är en förfining av Δ är $\Delta' = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i'$ och $\Delta_i' \cap \Delta_j' = \emptyset$ om $i \ne j$.

$$S_-(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ l(I_i) \le \sum_{i=1}^{n} S_-(f, \Delta_i') = S_-(f, \Delta') \le S^+(f, \Delta') \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} S^+(f, \Delta_i') = S^+(f, \Delta') \le \sum_{i=1}^{n} M_i\ l(I_i) = S^+(f, \Delta).$$

(iii) Låt $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Då ger (ii)

$$S_-(f, \Delta_1) \le S_-(f, \Delta) \le S^+(f, \Delta) \le S^+(f, \Delta_2).$$

□

Definition 5.3 Låt f vara en begränsad funktion på $[a, b]$. Talen

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\Delta} S^+(f, \Delta)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\Delta} S_-(f, \Delta)$$

där supremum och infimum tas över alla indelningar av det slutna intervallet $[a, b]$, kallas **Darbouxöver-** respektive **Darbouxunderintegralen**[1] av f över $[a, b]$. Om

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

[1] Jean Gaston Darboux (1842-1917), Paris

sägs f vara **Darbouxintegrerbar** och det gemensamma värdet betecknas

$$\int_a^b f(x)dx$$

och kallas f's **Darbouxintegral** över $[a, b]$.

Anmärkning $f(x) = c$ är Darbouxintegrerbar: $\int_a^b c\ dx = c(b - a)$.

Exempel

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \text{ medan } \overline{\int_0^1} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$\Big($Tag $\Delta = \{t_i\},\ t_i = \frac{i}{n},\ M_i = \frac{i}{n},\ i = 1, 2, ..., n$

$$S^+(f, \Delta) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \;=\; \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2} \cdot (n+1)\right) \to \frac{1}{2}$$

då $n \to \infty$. Man kan visa att

$$S^+(f, \Delta) \;\geq\; \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i - 1) \;=\; \left(\frac{n-1}{2} \cdot n\right) \cdot \frac{1}{n^2} \;\to \frac{1}{2}.\Big)$$

Exempel $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{i-1}{n} \text{ på } \left[\ \frac{i-1}{n}\ ,\ \frac{i}{n}\ \right] \\ M_i &= \frac{i}{n} \text{ på } \left[\ \frac{i-1}{n}\ ,\ \frac{i}{n}\ \right] \end{aligned}$$

$$S_-(f, \Delta) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$$

$$S^+(f, \Delta) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$$

$\because \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$.

5.2 Egenskaper hos Darbouxintegralen

Sats 5.2 Antag att det existerar A och B så att

$$A \ \le f(x) \ \le \ B, \ x \in [a,b].$$

(Med andra ord: f är begränsad.) Då gäller

$$A(b-a) \ \le \ \underline{\int_a^b} f(x)dx \ \le \ \overline{\int_a^b} f(x)dx \ \le B(b-a)$$

Bevis Eftersom $A \ \le \ m = \ \inf\{f(x)|x \in [a,b]\} \ \le \ \sup\{f(x)|x \in [a,b]\} = M \ \le \ B$ har vi $A(b-a) \ \le \ m(b-a) \ \le \ S_-(f,\Delta) \ \le \ S^+(f,\Delta) \ \le \ M(b-a) \ \le \ B(b-a)$ fås

- $\sup_\Delta S_-(f,\Delta) \ \le \ \inf_\Delta S^+(f,\Delta)$
- $\underline{\int} f(x)dx \ \le \ \overline{\int} f(x)dx$
- $A(b-a) \ \le \ \underline{\int} f(x)dx \ \le \ \overline{\int} f(x)dx \ \le \ B(b-a)$

$\square$

Korollarium 5.1 Om f är Darbouxintegrerbar gäller

$$A(b-a) \ \le \ \int_a^b f(x)dx \ \le \ B(b-a)$$

Sats 5.3 (i) Antag att f är Darbouxintegrerbar på $[a,b]$. Då är också funktionen $x \curvearrowright k\ f(x)$ Darbouxintegrerbar för varje $k \in \mathbb{R}$ och

$$\int_a^b k\ f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) Antag att f_1 och f_2 är Darbouxintegrerbara på $[a,b]$. Då är $x \curvearrowright f_1(x) + f_2(x)$ Darbouxintegrerbar på $[a,b]$ och

$$\int_a^b \Big(f_1(x) + f_2(x)\Big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

(iii) Antag att f är Darbouxintegrerbar på $[a,b]$ och $[b,c]$, $a < b < c$. Då är f Darbouxintegrerbar på $[a,c]$ och

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

(iv) Antag att f_1 och f_2 är Darbouxintegrerbara på $[a,b]$ och $f_1(x) \leq f_2(x),\ x \in [a,b]$. Då gäller

$$\int_a^b f_1(x)dx \ \leq \ \int_a^b f_2(x)dx.$$

Bevis (i) Låt $g(x) = k\ f(x),\ x \in [a,b]$. Bildar $S_-(g,\Delta)$ och $S^+(g,\Delta)$ samt jämför dessa med $S_-(f,\Delta)$ och $S^+(f,\Delta)$. $\Delta = \{I_i\}_{i=1}^n$. Tag först $k \geq 0$. Då är $\inf\{g(x)|x \in I_i\} = k{\cdot}m_i$ och $\sup\{g(x)|x \in I_i\} = k{\cdot}M_i,\ i = 1,...,n$ (m_i, M_i introducerade i Definition 5.2). Härav

$$S_-(g,\Delta) = \sum_{i=1}^n k\ m_i\ l(I_i) = k\sum_{i=1}^n m_i\ l(I_i) = k \cdot S_-(f,\Delta)$$

och likaså $S^+(g,\Delta) = k \cdot S^+(f,\Delta)$.

Alltså

$$\sup_\Delta S_-(g,\Delta) = \sup_\Delta k \cdot S_-(f,\Delta) \overset{k\geq 0}{=} k \cdot \sup_\Delta S_-(f,\Delta) \overset{\text{ant.}}{=} k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Analogt:

$$\inf_\Delta S^+(g,\Delta) = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$\because$ g är Darbouxintegrerbar med $\int_a^b g(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$.

Om $k < 0$ observerar vi att

$$k \cdot M_i = \inf\{g(x)|x \in I_i\} \text{ och}$$

$$k \cdot m_i = \sup\{g(x)|x \in I_i\}.$$

Alltså

$$S_-(g,\Delta) = k \cdot \sum_{i=1}^n M_i\ l(I_i) = k \cdot S^+(f,\Delta)$$

och

$$S^+(g,\Delta) = k \cdot S_-(f,\Delta).$$

Igen

$$\sup_\Delta S_-(g,\Delta) = \sup_\Delta k \cdot S^+(f,\Delta) \overset{k\leq 0}{=} k \cdot \inf_\Delta S^+(f,\Delta) = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

och

$$\inf_\Delta S^+(g,\Delta) = \inf_\Delta k \cdot S_-(f,\Delta) = k \cdot \sup_\Delta S_-(f,\Delta) = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Härav fås

(1) g är Darbouxintegrerbar över $[a,b]$.

(2) $\int_a^b g(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$.

(ii) Låt $\varepsilon > 0$ och välj Δ' så att

$$S_-(f_1, \Delta') > \int_a^b f_1(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

och

$$S_-(f_2, \Delta') > \int_a^b f_2(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eftersom $m_i(f_1 + f_2) =: \inf\{f_1(x) + f_2(x)|x \in I_i\} \geq \inf\{f_1(x)|x \in I_i\} + \inf\{f_2(x)|x \in I_i\} := m_i(f_1) + m_i(f_2)$ får vi

$$S_-(f_1 + f_2, \Delta') = \sum_{i=1}^{n} m_i(f_1 + f_2)\ l(I_i)\ \geq\ \sum_{i=1}^{n}(m_i(f_1) + m_i(f_2))\ l(I_i) =$$

$$S_-(f_1, \Delta') + S_-(f_2, \Delta')\ > \int_a^b f_1(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}\ + \int_a^b f_2(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\because \sup_{\Delta'} S_-(f_1 + f_2, \Delta')\ > \int_a^b f_1(x)dx\ + \int_a^b f_2(x)dx - \varepsilon$$

för alla $\varepsilon > 0$.

$$\because \underline{\int_a^b}(f_1(x)dx + f_2(x))dx\ \geq \int_a^b f_1(x)dx\ + \int_a^b f_2(x)dx$$

På samma sätt inses, bland annat genom att utnyttja

$M_i(f_1 + f_2) := \sup\{f_1(x) + f_2(x)|x \in I_i\} \leq M_i(f_1) + M_i(f_2)$ att

$$\overline{\int_a^b}(f_1(x)dx + f_2(x))dx\ \leq \int_a^b f_1(x)dx\ + \int_a^b f_2(x)dx.$$

$$\because \overline{\int_a^b}(f_1(x)dx + f_2(x))dx\ \leq \int_a^b f_1(x)dx\ + \int_a^b f_2(x)dx\ \leq \underline{\int_a^b}(f_1(x)dx + f_2(x))dx$$

På grund av att $\underline{\int} \leq \overline{\int}$ alltid får vi

$$\overline{\int_a^b}(f_1(x)dx + f_2(x))dx\ = \underline{\int_a^b}(f_1(x)dx + f_2(x))dx\ = \int_a^b f_1(x)dx\ + \int_a^b f_2(x)dx.$$

(iii) Låt Δ_1 vara en indelning av $[a, b]$ och Δ_2 en indelning av $[b, c]$. Sätt $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ som är en indelning av $[a, c]$ (speciell såtillvida att b är en indelningspunkt). För $\varepsilon > 0$ låt Δ_1 vara sådan att

$$S^+(f, \Delta_1)\ \leq\ \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

och Δ_2 sådan att

$$S^+(f, \Delta_2)\ \leq\ \overline{\int_b^c} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

För $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ är

$$S^+(f,\Delta) \;=\; S^+(f,\Delta_1) \;+\; S^+(f,\Delta_2) \;\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \;+ \overline{\int_b^c} f(x)dx + \varepsilon.$$

Härav följer att

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx \;\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \;+ \overline{\int_b^c} f(x)dx + \varepsilon.$$

Om Δ är en godtycklig indelning av $[a,c]$ sätts $\Delta' = \Delta \cup \{b\}$. Då är Δ' som ovan och dessutom en förfining av Δ. Då har vi

$$S^+(f_1,\Delta) \;\geq\; S^+(f,\Delta') \;=\; S^+(f,\Delta_1') \;+\; S^+(f,\Delta_2') \;\geq \overline{\int_a^b} f(x)dx \;+ \overline{\int_b^c} f(x)dx.$$

Här är $\Delta_1' = \Delta' \cap [a,b]$ och $\Delta_2' = \Delta' \cap [b,c]$.

Vi har alltså kommit fram till att

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx \;= \overline{\int_a^b} f(x)dx \;+ \overline{\int_b^c} f(x)dx \overset{\text{ant.}}{=} \int_a^b f(x)dx \;+ \int_b^c f(x)dx.$$

Analogt inses att också

$$\underline{\int_a^c} f(x)dx \;= \int_a^b f(x)dx \;+ \int_b^c f(x)dx$$

(iv) Eftersom $f_1(x) \leq f_2(x)$ för varje x gäller också

$$S^+(f_1,\Delta) \leq S^+(f_2,\Delta)$$

$$S_-(f_1,\Delta) \leq S_-(f_2,\Delta)$$

för varje indelning Δ.

Då

$$\int_a^b f_1(x)dx \;=\; \inf S^+(f_1,\Delta) \;\leq\; \inf S^+(f_2,\Delta) \;=\; \int_a^b f_2(x)dx$$

$\square$

Sats 5.4 Låt f vara begränsad på $[a,b]$. Då är f Darbouxintegrerbar om och endast om $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta$-indelning av $[a,b] : S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta) \ < \varepsilon$.

Bevis ($\Longleftarrow$) Tag $\varepsilon > 0$. Då finns ett Δ så att

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \;\leq\; S^+(f,\Delta) \text{ (gäller alltid)}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \;\geq\; S_-(f,\Delta) \text{ (gäller alltid)}$$

och

$$S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Härav fås

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \;\leq\; S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta) < \varepsilon.$$

$\because \overline{\int_a^b} = \underline{\int_a^b}$, dvs f är Darbouxintegrerbar.

($\Longrightarrow$) Om f är Darbouxintegrerbar existerar Δ_1 så att

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S^+(f,\Delta_1)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

och Δ_2 så att

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_-(f,\Delta_2)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Om vi väljer $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ fås

$$S^+(f,\Delta) \;-\; S_-(f,\Delta) \;\leq\; S^+(f,\Delta_1) \;-\; S_-(f,\Delta_2) \;\leq$$

$$S^+(f,\Delta_1) \;-\int_a^b f(x)dx \;+\int_a^b f(x)dx \;-\; S_-(f,\Delta_2) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

□

Korollarium 5.2 Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f Darbouxintegrerbar på $[a,b]$.

Korollarium 5.3 Om f är monoton på $[a,b]$ så är f Darbouxintegrerbar på $[a,b]$.

Bevis av Korollarium 5.2 f är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$ (slutet, begränsat intervall, se kapitel 3). För givet $\varepsilon > 0$ kan δ väljas så att

$$|x-y| < \delta, \quad x,y \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \;<\; \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Låt Δ vara en indelning $\{t_i\}_{i=0}^n$ av $[a,b]$ sådan att $l(I_i) = t_i - t_{i-1} < \delta$. Då är

$$(*) \qquad M_i - m_i = \sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x) \;<\; \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Detta gäller ty

$M_i = f(\xi_i)$ för något $\xi_i \in I_i$, $m_i = f(\eta_i)$ för något $\eta_i \in I_i$ och eftersom $|\xi_i - \eta_i| \le l(I_i) < \delta$ medför $f(\xi_i) - f(\eta_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, vilket är påståendet $(*)$.

Med andra ord, då $S^+(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i \; l(I_i)$ och $S_-(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i \; l(I_i)$ har vi

$$S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta) \; < \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \; l(I_i) = \varepsilon.$$

Bevis-skiss för Korollarium 5.3 Låt f vara växande (det fall då f är avtagande behandlas analogt). Välj Δ så att indelningspunkterna **inte** är diskontinuitetspunkter för f (sådana diskontinuitetspunkter är högst numrerbart många).

Då är $M_i = m_{i+1}, \; i = 1, 2, 3..., n-1$. Om dessutom alla $l(I_i)$ väljs $< \delta < \frac{\varepsilon}{4M}$ och dessutom "nästan lika långa" så att

$$\max | \; l(I_i) - l(I_j) \; | \; < \; \frac{\varepsilon}{2M} \frac{1}{n}$$

där $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Då är

$$S^+(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \; l(I_i),$$

$$S_-(f,\Delta) = \; m_1 \; l(I_1) + \sum_{i=2}^{n} m_i \; l(I_i) \; = \; m_1 \; l(I_1) + \sum_{i=2}^{n} M_{i-1} \; l(I_i).$$

$$S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta) \; = \; M_n \; l(I_n) + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \; l(I_i) - \underbrace{\sum_{i=2}^{n} M_{i-1} \; l(I_i)}_{\sum_{i=1}^{n-1} M_i \; l(I_{i+1})} - m_1 \; l(I_1) \; \le$$

$$2M \cdot \delta + \sum_{i=1}^{n-1} | \; l(I_{i+1}) - l(I_i) \; | \; M_i \; = \; 2M\delta + (n-1) \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \frac{M}{n} < \varepsilon.$$

□

Sats 5.5 (Integralkalkylens medelvärdessats I) Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$. Då finns ett tal $\xi \in [a,b]$ så att

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Anmärkning $f(\xi)$ är "f:s medelvärde" på $[a,b]$:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Bevis f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då existerar $\xi_0, \xi_1 \in [a, b]$ med

$$f(\xi_0) = M := \sup \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$$

och

$$f(\xi_1) = m := \inf \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}.$$

Då har vi

$$\begin{array}{rcccl} m & \leq & f(x) & \leq & M, \quad x \in [a, b] \\ \Rightarrow m(b-a) & \leq & \int_a^b f(x)dx & \leq & M(b-a) \\ \Longleftrightarrow f(\xi_1) & \leq & \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} & \leq & f(\xi_0) \end{array}$$

Av satsen för mellanliggande värden (f kontinuerlig på [a,b]!) följer att det finns ett ξ i $[a, b]$ så att $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. ($\xi$ ligger mellan ξ_0 och ξ_1.) □

Sats 5.6 (Integralkalkylens huvudsats) Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och definiera

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \ x \in [a, b].$$

Då är F kontinuerlig på $[a, b]$ och $F'(x) = f(x)$ för varje $x \in (a, b)$.

Bevis f är (Darboux-)integrerbar på $[a, b]$ och därmed på alla delintervall av $[a, b]$.

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt. \tag{+}$$

Konvention: Om $a < b$ så är

$$\int_b^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int_a^b f(x)dx.$$

Härmed är formeln (+) ovan också definierad för $h < 0$; förstås så att $x + h \in [a, b]$. Nu gäller enligt integralkalkylens medelvärdessats I (Sats 5.5)

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)h, \quad \xi = \xi(h)$$

där $\xi = \xi(h) \in (x, x+h)$ om $h > 0$ och $\xi \in (x+h, x)$ om $h < 0$. På grund av f:s kontinuitet är

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi(h)) \to f(x) \text{ då } h \to 0.$$

□

Sats 5.7 Antag att f och F är kontinuerliga på $[a,b]$ och att $f(x) = F'(x)$ för varje $x \in (a,b)$. Då gäller

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Anmärkning F är en så kallad **primitiv funktion** till f.

Bevis Låt Δ vara en indelning av $[a,b]$. Då gäller

$$F(b) - F(a) \;=\; \sum_{i=1}^{n} F(t_i) - F(t_{i-1}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \;\overset{\text{ant}}{=}\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\; l(I_i)$$

$$\leq\; \sum_{i=1}^{n} M_i\; l(I_i) \;=\; S^{+}(f,\Delta)$$

och motsvarande för undersumman. Här är ξ_i är en punkt tillhörande I_i. I den andra likheten ovan gäller differentialkalkylens medelvärdessats.

Alltså

$$S_{-}(f,\Delta) \;\leq\; F(b) - F(a) \;\leq\; S^{+}(f,\Delta)$$

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \sup_{\Delta} S_{-}(f,\Delta) \;\leq\; F(b) - F(a) \;\leq\; \inf_{\Delta} S^{+}(f,\Delta) \;=\; \int_a^b f(x)dx.$$

□

Sats 5.8 Om f är **kontinuerlig** på $[a,b]$ så gäller

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0 \quad\Longrightarrow\quad f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Bevis Antag $\exists\; x_0 \in [a,b] : f(x_0) \neq 0$, dvs $|f(x_0)| > 0$. Eftersom $|f(x)|$ är kontinuerlig existerar ett intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (ensidigt om x_0 är en ändpunkt) där $\varepsilon > 0$, med $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \implies |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$.

Vi har då (om x_0 antas vara en inre punkt)

$$\int_a^b |f(x)|dx \;=\; \int_a^{x_0-\varepsilon} |f(x)|dx \;+\; \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|dx \;+\; \int_{x_0+\varepsilon}^{b} |f(x)|dx$$

$$\geq\; 0 + 2\varepsilon \cdot \frac{|f(x_0)|}{2} + 0 \;=\; \varepsilon|f(x_0)| \;>\; 0$$

Motsägelse! □

Sats 5.9 (Integralkalkylens medelvärdessats II) Antag att f och g är kontinuerliga på $[a, b]$ och att g inte ändrar tecken på $[a, b]$. Då finns det ett tal $\xi \in [a, b]$ så att

$$\int_a^b f(x)\ g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Bevis Antag att g är positiv på $[a, b]$. Definiera $m := \inf_{a \le x \le b} f(x)$ och $M := \sup_{a \le x \le b} f(x)$ som i beviset av Sats 5.5.

$$\int_a^b m\ g(x)dx \ \le \ \int_a^b f(x)\ g(x)dx \ \le \ \int_a^b M\ g(x)dx$$

eftersom

$$m\ g(x) \ \le \ f(x)\ g(x) \ \le \ M\ g(x),\ \ x \in [a, b].$$

Då har vi

$$m \ \le \ \frac{\int_a^b f(x)\ g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \ \le \ M.$$

Eftersom f antar sitt största värde M och sitt minsta värde m i punkten ξ_0 respektive $\xi_1 \in [a, b]$ så antas också det mellanliggande värdet

$$\frac{\int_a^b f(x)\ g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

i en punkt $\xi \in [a, b]$. □

5.3 Om Riemannintegralen

Definition 5.4 Låt f vara en funktion definierad på $[a, b]$ och $\Delta = \{I_i\}_{i=1}^n$ en indelning av $[a, b]$. Summan

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\ l(I_i)$$

där $x_i \in I_i$ kallas en **Riemannsumma**[2].

Definition 5.5 Funktionen f sägs vara **Riemannintegrerbar** om det finns ett tal A så att $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$:

$$l(I_i) < \delta,\ x_i \in I_i,\ i = 1, 2, ..., n \implies \left| \sum_{i=1}^n f(x_i)\ l(I_i) - A \right| < \varepsilon.$$

Talet A kallas i så fall f:s **Riemannintegral** på $[a, b]$.

[2]Bernhard Riemann (1826-1866), Göttingen, Berlin.

Sats 5.10 Funktionen f:s Riemannintegral på $[a, b]$ är entydig. Beviset utelämnas (lätt!).

Sats 5.11 Om f är Riemannintegrerbar på $[a, b]$ så är f begränsad på $[a, b]$.

Bevis Låt $\varepsilon = 1$ och välj δ och indelningen $\Delta = \{I_i\}$ så att för $x_i \in I_i,\ x_i' \in I_i,\ i = 1, 2, ..., n.$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ l(I_i) - A\Big| < 1, \quad \Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i')\ l(I_i) - A\Big| < 1$$

Triangelolikheten ger att

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ l(I_i)\ -\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\ l(I_i)\Big| < 2.$$

Låt $x_i = x_i'$ för $i = 2, 3, \ldots, n$. Då fås

$$|f(x_1) - f(x_1')|\ l(I_1) < 2$$

och vidare

$$|f(x_1)|\ =\ |f(x_1) - f(x_1') + f(x_1')|\ \leq\ \frac{2}{l(I_1)} + |f(x_1')|.$$

$\because$ $|f|$ är begränsad av $\max_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{2}{l(I_i)} + |f(x_i')|\Big)$ på hela $[a, b]$.

$\square$

Anmärkning Notera att f inte behöver vara kontinuerlig.

Sats 5.12 Funktionen f är Riemannintegrerbar om och endast om den är Darbouxintegrerbar, och integralernas värden är lika.

Bevis ($\Longrightarrow$) Av definition 5.5 följer, om vi tar supremum respektive infimum av termerna i Riemannsumman:

$$\begin{array}{ccccccc} A-\varepsilon & < & & \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ l(I_i) & & < & A+\varepsilon \\ A-\varepsilon & \leq & \sum_{i=1}^{n} m_i\ l(I_i) & \leq & \sum_{i=1}^{n} M_i\ l(I_i) & \leq & A+\varepsilon \end{array}$$

(Observera att x_i är ett godtyckligt element i I_i!) Alltså för denna indelning Δ är

$$A-\varepsilon\ \leq\ S_{-}(f,\Delta)\ \leq\ S^{+}(f,\Delta)\ \leq\ A+\varepsilon.$$

Resultatet följer ur Sats 5.4.

($\Longleftarrow$) Bevisas ej här (se Protter Morrey s 114-115). $\square$

Sats 5.13 f är kontinuerlig på $[a,b] \implies f$ är Riemannintegrerbar på $[a,b]$.

Bevis Eftersom f antas vara kontinuerlig på $[a,b]$ är den **likformigt** kontinuerlig. Därför, för $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ så att

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Om alltså $l(I_i) < \delta$ så är

$$\sup\Big\{|f(x) - f(y)| \ \Big| \ x, y \in I_i\Big\} \ \leq \ \frac{\varepsilon}{b-a}$$

(ty $\frac{\varepsilon}{b-a}$ är majorant till mängden i fråga) och alltså

$$M_i - m_i = \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in I_i\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Varje Δ med $l(I_i) < \delta, \ i = 1, 2, ..., n$ uppfyller

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \ l(I_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i \ l(I_i) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \ l(I_i) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{b-a} \ \sum_{i=1}^{n} \ l(I_i) = \varepsilon.$$

Då är också

$$S_-(f, \Delta) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ l(I_i) \ \leq \ S^+(f, \Delta).$$

Vi har igen

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon \ \leq \ S_-(f, \Delta) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ l(I_i) \ \leq \ S^+(f, \Delta) \ \leq \ \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

$$\because \ \Big| \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ l(I_i) \ - \int_a^b f(x)dx \ \Big| \ \leq \ \varepsilon$$

såsnart Δ är sådant att $l(I_i) < \delta$. $\square$

Satsen följer egentligen av Korollarium 5.2 och Sats 5.12, men bevisas här för fullständighetens skull.

Om substitutionsmetoden

Sats 5.14 Antag att f är kontinuerlig på det öppna intervallet I. Låt u och u' vara kontinuerliga på det öppna intervallet J och antag att $u(J) \subset I$, dvs $\{u(x) \mid x \in J\} \subset I$. Då gäller för $a, b \in J$

$$\int_a^b f(u(x)) \ u'(x)dx \ = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

Bevis Låt $c \in I$ och inför
$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$
Då är $F'(x) = f(x)$. Sätt $G(x) = F(u(x))$ och använd kedjeregeln
$$G'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$
Följaktligen
$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)dx \;=\; \int_a^b G'(x)dx \;=\; G(b) \;-\; G(a) \;=\; F(u(b)) \;-\; F(u(a))$$
$$= \int_c^{u(b)} f(t)dt \;-\; \int_c^{u(a)} f(t)dt \;=\; \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$
□

Anmärkning Om u är strängt monoton existerar u^{-1} och genom att substituera $y = u(x)$ ($\iff x = u^{-1}(y)$), $dy = u'(x)dx$ fås
$$\int_a^b f(y)dy = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x)) \cdot u'(x)dx.$$

5.4 Om generaliserade integraler

Definition 5.6 Låt $I = [a, b)$ ($b = +\infty$ tillåtet) och antag att funktionen f är integrerbar på $[a, c]$ för varje $a < c < b$. Om
$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx = L$$
existerar sägs f vara integrerbar på $[a, b)$ och L är integralens värde. Vi säger också att $\int_a^b f(x)dx$ är **konvergent** med värdet L.

Om gränsvärdet ej existerar sägs den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)dx$ vara **divergent**, eller att f inte är integrerbar på $[a, b)$.

Antag att det finns en punkt $d \in (a, b)$ så att funktionen f är begränsad på $[a, c_1]$ och $[c_2, b]$ för alla $c_1 < d < c_2$. Vi säger att f är integrerbar på $[a, b]$ om både

(+) $$\lim_{c_1 \to d^-} \int_a^{c_1} f(x)dx \text{ och } \lim_{c_2 \to d^+} \int_{c_2}^b f(x)dx$$

existerar.

Om gränsvärdena betecknas L_1 respektive L_2 definieras den generaliserade integralen
$$\int_a^b f(x)dx = L_1 + L_2.$$
Om någotdera gränsvärdet i (+) ej existerar sägs den generaliserade integralen vara divergent.

Exempel

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

är divergent medan

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$$

är konvergent.

Sats 5.15 Antag att f är kontinuerlig på $[a,b)$ och att $|f(x)| \le g(x),\ x \in [a,b)$. Då gäller

$$\int_a^b g(x)dx \text{ konvergent } \implies \int_a^b f(x)dx \text{ konvergent.}$$

Dessutom

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \le \int_a^b g(x)dx.$$

Bevis Antag först att $f \ge 0$ och inför för $x < b$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Då är F och G icke-avtagande (ty derivatan är ≥ 0) och enligt antagandet existerar $\lim_{x\to b^-} G(x) = M$.

Då $f(x) \le g(x),\ x \in [a,b)$, är $F(x) \le G(x) \le M,\ x \in [a,b)$, varför $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existerar (sats 3.13) och är $\le M$.

$\because$ Den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)dx$ är konvergent och $\le \int_a^b g(x)dx$.

Om f antar både positiva och negativa värden, sätt

$$f_1(x) := \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{(ofta: } f^+\text{)}$$

$$f_2(x) := \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \quad \text{(ofta: } f^-\text{)}$$

Då gäller: f_1, f_2 är kontinuerliga och ≥ 0.

(i) $f_1 - f_2 = f$

(ii) $f_1 + f_2 = |f| \ \le\ g$

Enligt första delen av beviset är både

$$\int_a^b f_1(x)dx \text{ och } \int_a^b f_2(x)dx$$

konvergenta, ty $0 \le f_1(x) \le g(x)$ och $0 \le f_2(x) \le g(x)$ enligt antagandet.

Enligt räknereglerna för gränsvärden följer av (i) och (ii) att både

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ och } \int_a^b f(x)dx$$

är konvergenta.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b f_1(x)dx\right| + \left|\int_a^b f_2(x)dx\right|$$
$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Härav

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

□

Exempel $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$. $\int_0^1 f(x)dx$. Konvergent!

Sats 5.16 Antag att f och g är kontinuerliga på $[a, b)$ och att $0 \leq g(x) \leq f(x)$ för varje $x \in [a, b)$. Då gäller att

$$\int_a^b g(x)dx \text{ divergent } \implies \int_a^b f(x)dx \text{ divergent.}$$

Bevis Kontraposition (lätt!). □

Exempel

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

är konvergent.

Motivering: sätt

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

Då är

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq g(x), \ x > 0$$

och

$$\int_\varepsilon^c g(x)dx = (1-\varepsilon) + \int_1^c \frac{1}{x^2}dx = (1-\varepsilon) + \left(1 - \frac{1}{c}\right) \to 1 + 1 = 2$$

då $\varepsilon \to 0^+$ och $c \to +\infty$ $(0 < \varepsilon < 1, \ c > 1)$. Obs! $\varepsilon \to 0^+$ och $c \to +\infty$ oberoende av varandra, i vilken ordning som helst.

Anmärkning

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

är också konvergent (se Exempel s. 89), men

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

är divergent. Detta bygger på jämförelsen med trappfunktionen

$$t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq x \leq n\pi + \frac{\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

Det gäller att integralen

$$\int_0^\infty \frac{t(x)}{x} dx$$

är divergent.

Kapitel 6

Oändliga följder, oändliga serier

6.1 Grundläggande egenskaper

Låt $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd och definiera för $n = 1, 2, \ldots \quad s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Definition 6.1 Serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ säges vara **konvergent** med summan s om $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar och är $= s$. Vidare kallas s_n seriens **partialsummor** $(n = 1, 2, \ldots)$ Om $\lim_{n\to\infty} s_n$ ej existerar sägs serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vara **divergent**.

Sats 6.1 Om serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ är konvergent så är $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
Anmärkning Implikationen gäller ej omvänt! T.ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent.

Bevis Låt $s_n = s_{n-1} + u_n, \quad n = 2, 3, \ldots$ varav $u_n = s_n - s_{n-1}$. Om $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$ så följer $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. □

Sats 6.2 a) Om serierna $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ är konvergenta, så är också $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ (där $c \in \mathbb{R}$) konvergenta och $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ är divergent så är också $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ divergent för alla $c \neq 0$.

Bevis Följer direkt av egenskaperna för gränsvärden □

Sats 6.3 Den **geometriska serien** $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$, $a \neq 0$, är konvergent för $|r| < 1$ och divergent för $|r| \geq 1$. Om $|r| < 1$ är seriens summa $= \frac{a}{1-r}$.

Bevis $\sum_{n=1}^{N} a \cdot r^{n-1} = a \cdot \frac{1-r^N}{1-r} \to \frac{a}{1-r}$ då $N \to \infty$ om $|r| < 1$. Annars är den divergent. $\square$

Sats 6.4 (Jämförelsetest) Antag att $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Om $u_n \leq a_n$ för varje n och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent så är också serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergent, och $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) Om $0 \leq a_n \leq u_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent så är även $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergent.

Bevis (i) Kalla $s_n := \sum_{i=1}^{n} u_i$ och $t_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ seriens respektive partialsummor. Både s_n och t_n är växande talföljder, $0 \leq s_n \leq t_n$. t_n är begränsad av $\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ enligt antagande. Då är också s_n begränsad och alltså konvergent.

(ii) Om $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vore konvergent så skulle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ också vara det enligt (i). Detta leder till en motsägelse.

$\square$

Sats 6.5 (Cauchys integraltest) Låt $f : [1, \infty) \curvearrowright \mathbb{R}$ vara kontinuerlig, icke-negativ och icke-växande. Sätt $u_n := f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Då är

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent.}$$

Satsens påstående följer enkelt av att

$$\sum_{i=2}^{N} u_i \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{N-1} u_i.$$

Exempel $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i} \leq \underbrace{\int_1^N \frac{1}{x}dx}_{=\ln N} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} \leq \ln N \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N-1}.$$

Exempel $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{N^2} \leq 1 - \frac{1}{N} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(N-1)^2}$$

Sats 6.6 Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är två positiva serier (d.v.s. serier med positiva termer) och om

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$$

så är antingen båda serierna divergenta eller båda serierna konvergenta.

Bevis För n tillräckligt stort, $n > N$, gäller

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < A + 1, \quad n = N + 1, N + 2, \ldots$$

Då konvergensen/divergensen avgörs av dessa termer (och ej alls av $a_n, b_n, n \leq N$) följer resultatet av sats 6.4:

$$\frac{A}{2} \cdot b_n < a_n \text{ och } a_n < (A + 1) \cdot b_n, \quad n > N.$$

$\square$

Anmärkning

(1) Om $A = 0$ kan vi sluta oss till att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent implicerar att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent (men inte den motsatta implikationen). Om $A = \infty$ får vi att $\sum b_n$ divergent $\Rightarrow \sum a_n$ divergent.

(2) Sats 6.6 gäller också t.ex. om det finns c och d där $0 < c < d < \infty$ så att $c < \frac{a_n}{b_n} < d$ för alla n. (I beviset ersätts $\frac{A}{2}$ med c och $A + 1$ med d.)

6.2 Serier med positiva och negativa termer, potensserier

Definition 6.2 Serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sådan att $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ är konvergent sägs vara **absolut konvergent**. Om $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ är konvergent men $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ divergent sägs den förra vara **betingat konvergent**

Sats 6.7 Om $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ är konvergent så konvergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Bevis (övning) Bygger på att om $s_n := \sum_{i=1}^{n} u_i,\ t_n := \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ så är $\{t_n\}$ en Cauchyföljd (ty t_n är konvergent). Då är även $\{s_n\}$ en Cauchyföljd:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \quad n, m > N \implies |t_n - t_m| < \varepsilon$$

implicerar (sätt $n > m$; om $n < m$ är resonemanget analogt)

$$|s_n - s_m| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| \leq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots + |u_n| = t_n - t_m < \varepsilon.$$

Eftersom $\{s_n\}$ är en Cauchyföljd existerar $\lim_{n \to \infty} s_n$. $\square$

Sats 6.8 (**Leibnitz'**[1] test för alternerande serier)

Antag att $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ uppfyller

(1) varannan term i $\{u_n\}$ är ≥ 0, varannan ≤ 0

(2) $|u_{n+1}| \leq |u_n|$, $n = 1, 2, \ldots$

(3) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Då är $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergent.

Bevis $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Låt t.ex. $u_1, u_3, u_5, \ldots \geq 0$ och $u_2, u_4, u_6, \ldots \leq 0$. Betrakta

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + \underbrace{\underbrace{u_{2k}}_{\leq 0} + \underbrace{u_{2k+1}}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$$s_2 = u_1 + u_2 \geq 0$$

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{\underbrace{u_{2k+1}}_{\geq 0} + \underbrace{u_{2k+2}}_{\leq 0}}_{\geq 0}$$

$$s_{2k+2} - s_{2k+1} = u_{2k+2} \leq 0$$

Härav följer att $0 \leq s_n \leq u_1$ för alla n. Följden $s_1, s_3, s_5, \ldots$ är avtagande och alltså konvergent. Sätt $A = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$. Följden $s_2, s_4, s_6, \ldots$ är växande och konvergent med gränsvärdet B. Vi har

$$B - A = \lim_{k\to\infty} s_{2k+2} - \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k+2} = 0$$

(enligt antagande (3)). För givet $\epsilon > 0$ ligger alltså s_n i intervallet $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ så snart n är tillräckligt stort, m.a.o. talföljden s_n är konvergent. $\square$

Anmärkning Av beviset framgår att för en serie som uppfyller Leibnitz' kriterier (1), (2) och (3) gäller följande: Om seriens summa A approximeras med en partialsumma s_n så har felet $(A - s_n)$ samma tecken som den först bortlämnade termen u_{n+1} och är till sitt absolutbelopp mindre än denna: $|A - s_n| \leq |u_{n+1}|$. Felet $A - s_n$ kallas **trunkeringsfelet**.

[1] Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), tysk matematiker och filosof

Exempel

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \text{ är betingat konvergent}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \text{ är absolut konvergent}$$

Exempel Med litet arbete fås att $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ är konvergent:

$$\int_0^{n\cdot\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{(i-1)\cdot\pi}^{i\cdot\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{=:u_i}$$

u_i:na är alternerande och uppfyller *Leibnitz*'s kriterier i Sats 6.8.

Sats 6.9 (**d'Alamberts**[2] **kvottest**)

Antag att $u_n \neq 0$ för varje n och att

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| =: \rho \text{ existerar}$$

Då gäller att

(i) Om $\rho < 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absolut konvergent.

(ii) Om $\rho > 1$ (eller $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \infty$) så är $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergent.

(iii) Om $\rho = 1$ är frågan oavgjord. T.ex. $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$

Bevis (i) Om $\rho < 1$ sätt $c = \frac{1+\rho}{2} < 1$. Då gäller för $n \geq N$ att $|u_{n+1}| \leq c \cdot |u_n|, \quad n \geq N$ varav $|u_{n+k}| \leq c^k \cdot |u_n|, \quad n \geq N$ eller $|u_{N+k}| \leq c^k \cdot |u_N|$

För $n \geq N$ har vi alltså $|u_{N+k}| \leq c^k \cdot |u_N|, \; k = 1, 2, \ldots$

Jämförelseserien $\sum_{k=1}^{\infty} c^k |u_N|$ är en konvergent geometrisk serie så

$$s_{N+k} := \sum_{i=1}^{N+k} u_i \text{ och } |s_{N+k}| \leq |s_N| + \frac{|u_N|}{1-c} \text{ för alla } k \in \mathbb{N}.$$

Sats 6.7 ger resultatet

(ii) Om $c = \frac{\rho+1}{2} > 1$ så är för $n > N$

$$|u_n| > c^{n-N}|u_N| > |u_N|.$$

Termerna går ej ens mot 0! Sats 6.1 ger resultatet. □

[2] Jean Le Rond d'Alambert (1717-1783), Paris

Om potensserier

Definition 6.3 En **potensserie** är en serie av formen

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

Här är $a \in \mathbb{R}$ och $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{R}$. x betraktas som **variabel**, a och c'na som konstanter. För sådana värden på x för vilka potensserien konvergerar definierar den en funktion f av x:

$$f:\ x \curvearrowright \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Sats 6.10 Om potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ konvergerar för $x = x_1 \neq a$ är serien absolut konvergent för alla x med $|x-a| < |x_1 - a|$ och det finns ett M sådant att

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ |c_n(x-a)^n| \leq M\left(\frac{|x-a|}{|x_1-a|}\right)^n$$

då $|x-a| \leq |x_1 - a|$.

Bevis Om $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1-a)^n$ är konvergent går termerna $\to 0:\ \lim_{n\to\infty} c_n(x_1-a)^n = 0$. En konvergent talföljd är begränsad, alltså $\exists M\ :\ |c_n(x_1-a)^n| \leq M,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$ Då gäller om $|x-a| \leq |x_1-a|$:

$$|c_n(x-a)^n| = |c_n(x_1-a)^n| \cdot \left|\frac{(x-a)^n}{(x_1-a)^n}\right| \leq M \cdot \left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^n.$$

Om $|x-a| < |x_1-a|$ sätt $\rho := \frac{|x-a|}{|x_1-a|} < 1$. Då är

$$|c_n(x-a)^n| \leq M \cdot \rho^n$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x-a|^n \text{ är konvergent.}$$

Obs! ρ beror på x. $\square$

Sats 6.11 Låt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ vara en godtycklig potensserie. Då gäller ett av följande tre alternativ:

(i) serien konvergerar endast då $x = a$

(ii) serien konvergerar för alla x-värden

(iii) det finns ett tal R (**seriens konvergensradie**) sådant att serien konvergerar då $|x-a| < R$ och divergerar då $|x-a| > R$.

Sats 6.12 Potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ kan deriveras och integreras termvis innanför sin konvergensradie.

Bevis: Se Protter, Morrey, Theorem 9.23

Med andra ord: Definiera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad |x-a| < R$ där R är potensseriens konvergensradie.

Då är f **kontinuerlig** på $(a-R, a+R)$, f **deriverbar** på $(a-R, a+R)$ med

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}, \quad a-R < x < a+R \text{ och}$$

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad a-R < x < a+R.$$

Anmärkning Då $|x-a| = R$ kan situationen variera: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$ divergerar för $x = 1$, men konvergerar för $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ uppfyller kriterierna i Leibnitz' sats om alternerande serier.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n$ har konvergensradien 1, ty serien divergerar för alla $|x| > 1$. ($\frac{1}{n^2}x^n \to \infty$, standardgränsvärde)

Anmärkning Potensserier är mycket viktiga, i tillämpningar såväl som i avancerad matematisk teori.

Exempel $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ är en potensserie med konvergensradien 0, ty $\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = (n+1)x \to \infty$ för $x \neq 0$.

Exempel $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ (vet att summan är e^x).

Exempel Om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradien $R > 0$ så är $f^{(n)}(0) = n!\ c_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

6.3 Taylors formel

Sats 6.13 Antag att f och dess n första derivator är kontinuerliga på ett intervall som innehåller $[a, b]$. Antag att $f^{(n+1)}$ existerar i (a, b). Då finns ett $\xi \in (a, b)$ sådant att

(1) $f(b) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + R_n$ där **resttermen**

(2) $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Anmärkning För $n = 0$ har vi medelvärdessatsen:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

Bevis Definiera

$$R_n = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j$$

Då uppfyller R_n formel (1). Bör visa att R_n är av formen (2). Bilda, för $x \in [a, b]$,

$$\Phi(x) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(b-x)^j - R_n \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}$$

Φ är kontinuerlig på $[a, b]$, Φ' existerar på (a, b), $\Phi(b) = 0$, $\Phi(a) = 0$. Enligt Rolles sats finns det ett tal $\xi \in (a, b)$ så att $\Phi'(\xi) = 0$.

$$\Phi'(x) = -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(b-x)^{j-1} \cdot j + (n+1)R_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

$$\overset{\text{i=j-1}}{=} -\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x)}{i!}(b-x)^i + (n+1)R_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)R_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

För $x = \xi$ fås, eftersom $\Phi'(\xi) = 0$ och $\xi \neq b$,

$$0 = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n + (n+1)R_n \frac{(b-\xi)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

varur

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad \text{d.v.s. (2)}$$

$\square$

Exempel

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{e^a}{j!}(x-a)^j + R_n$$

$$R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \text{ mellan } a \text{ och } x.$$

$$\forall a, x \in \mathbb{R} \ : \ R_n \to 0 \text{ då } n \to \infty \text{ (standardgränsvärde } \frac{M^n}{n!} \to 0)$$

$$\because e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^a}{j!}(x-a)^j, \ x \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

Exempel

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin(a + n \cdot \frac{\pi}{2})}{n!}(x-a)^n + R_n$$

$$|R_n| \leq \frac{1}{n!}(x-a)^n \quad (x, a \in \mathbb{R})$$

$$\because \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot \frac{\pi}{2})}{n!} x^n \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot \frac{\pi}{2})}{n!} x^n \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ \ldots$$

Exempel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \quad |x| < 1 \text{ geometrisk serie}$$

Integreras! (se Sats 6.12)

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad |x| < 1$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots \quad |x| < 1$$

Observera! Man kan visa att formeln gäller även för $x = 1$ (men naturligtvis inte för $x = -1$)

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad \text{(alternerande serie)}$$

$$\because \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

Exempel

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, \quad -1 \le x \le 1$$

från $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad (|x| < 1)$

Sats 6.14 Antag att $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (u-b)^n$ är konvergent för $|u-b| < R,\ R > 0$.

(a) Om $b = kc + d$ så gäller

$$f(kx+d) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^n (x-c)^n \text{ för } |x-c| < \frac{R}{|k|}$$

(b) För fixt $k \in \mathbb{N}$

$$f((x-c)^k + b) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^{kn} \text{ för } |x-c| < R^{\frac{1}{k}}.$$

Sats 6.15 (Taylors[3]sats med resttermen i integralform)

Antag att f och dess $(n+1)$ första derivator är kontinuerliga på intervallet I och låt $a \in I$. Då gäller för varje $x \in I$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + R_n(a,x)$$

där

$$R_n(a,x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Bevis Integralkalkylens huvudsats ger

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \quad \forall x \in I \tag{6.1}$$

Inför $u(t) = f'(t),\ u'(t) = f''(t),\ v(t) = -(x-t),\ v'(t) = 1$ och integrerar (6.1) partiellt:

$$f(x) = f(a) + /_a^x u(t)v(t) + \int_a^x f''(t) \cdot (x-t)dt =$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \int_a^x f''(t) \cdot (x-t)dt$$

Detta är satsens påstående för $n = 1$.

[3]Brook Taylor (1685-1731), engelsk matematiker

Sätt $u(t) = f''(t)$, $u'(t) = f'''(t)$, $v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2$, $v'(t) = x - t$ och integrera partiellt. Då fås

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + /_a^x u(t)v(t) + \int_a^x f'''(t)\cdot\frac{1}{2}(x-t)dt$$

$$= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + f''(a)\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2dt,$$

d.v.s. påståendet för $n = 2$.

Fortsätt med induktion, t.ex. □

Anmärkning Eftersom $(x-t)^n$ ej byter tecken mellan a och x fås av integralkalkylens medelvärdessats att $\exists\ \xi$ mellan a och x så att

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Anmärkning Om $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig på $[a,x]$ (eller $[x,a]$) är funktionen $x \curvearrowright f^{(n+1)}(\xi)$, $(\xi = \xi(x))$ begränsad och

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + (x-a)^{n+1}\cdot H_n(x)$$

där H_n är en begränsad funktion av x i en omgivning av a.

Sats 6.16 (Taylorpolynomets entydighetssats)

Låt f vara en funktion som jämte sina $(n+1)$ första derivator är kontinuerlig i $[-d,d]$, $d > 0$. Om det finns tal $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ och en i intervallet definierad och begränsad funktion G_n sådan att för $-d \le x \le d$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^{n+1}G_n(x), \tag{6.2}$$

så är

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k = 0,1,2,\dots,n$$

Alltså är (6.2) **Taylorpolynomet** av ordningen n.

Anmärkning Motsvarande sats gäller för utveckling av f kring punkten a. Utvecklingen av f kring $a = 0$ kallas ofta för **MacLaurin**[4]utveckling.

[4]Colin MacLaurin (1698-1746), skotsk matematiker

Bevis Vet att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^{(n+1)}H_n(x), \qquad x \in [-d, d]$$

där H_n är begränsad.

Alltså, för $x \in [-d, d]$:

$$0 = (a_0 - f(0)) + (a_1 - f'(0)) \cdot x + \cdots + \big(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\big)x^n + x^{n+1}(G_n(x) - H_n(x)).$$

Då $x \to 0$ fås först att $a_0 - f(0) = 0$, därefter (efter division med x) att $a_1 - f'(0) = 0$,... (med induktion t.ex.) att

$$0 = \big(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\big) + x\big(G_n(x) - H_n(x)\big)$$

Då $x \to 0$ går $x\big(G_n(x) - H_n(x)\big)$ också mot 0 (ty $|G_n(x) - H_n(x)| \leq M,\ x \in [-d, d]$).

$$\because \quad a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

$\square$

Sats 6.17 För varje $m \in \mathbb{R}$ och $|x| < 1$ gäller

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

Anmärkning Om vi **betecknar** $\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$ med $\binom{m}{n}$ fås $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$. (Där dessutom $\binom{m}{0} = 1$). För m **heltal** är $\binom{m}{n} = 0$ om $n > m$.

Bevis

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + R_k(0, x)$$

$$R_k(0, x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} m(m-1)\cdots(m-k)(1+t)^{m-k-1} dt$$

Visar att $R_k \to 0$ då $k \to \infty$ om $|x| < 1$. Inför

$$c_m(x) = \begin{cases} (1+x)^{m-1}, & \text{om } m \geq 1,\ x \geq 0 \text{ eller } x \leq 0,\ m \leq 1 \\ 1, & \text{om } m \leq 1,\ x \geq 0 \text{ eller } m \geq 1,\ x \leq 0 \end{cases}$$

Då $(1+t)^{m-1} \leq c_m(x)$ för varje $t \in (0, x) \qquad \big(\in (x, 0)\big)$

$$R_k(0, x) \leq c_m(x) \frac{|m(m-1)\cdots(m-k)|}{k!} \quad \Big|\int_0^x \Big|\frac{x-t}{1+t}\Big|^k dt\Big| \tag{6.3}$$

Låt

$$u_k(x) = c_m(x)\left|\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k)}{k!}\right| \quad |x|^{k+1}$$

och substituera i (6.3) $t = xs$:

$$|R_k(0,x)| \leq u_k(x)\int_0^1 \frac{(1-s)^k}{(1+xs)^k}ds$$

och, på grund av att $1 - s \leq 1 + xs \qquad \forall x \in [-1,1]$, fås

$$|R_k(0,x)| \leq u_k(x)$$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är konvergent då $|x| < 1$:

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\frac{m-k+1}{k+1}\right| \cdot |x| \to |x| < 1 \text{ då } k \to \infty$$

$$\because u_k(x) \to 0$$

$$\because \lim_{h\to 0} R_k(0,x) = 0,\ |x| < 1$$

$\square$