

## Analys I, Hemuppgifter 8, 19.11.2014

1. Låt  $f$  vara en begränsad funktion på  $I := [a, b]$ , och sätt  $M := \sup_{x \in I} f(x)$  och  $m := \inf_{x \in I} f(x)$ . Definiera också  $M' := \sup_{x \in I} |f(x)|$  och  $m' := \inf_{x \in I} |f(x)|$ . Visa att

$$M' - m' \leq M - m.$$

Bevisa med hjälp av denna olikhet att  $|f|$  är integrerbar på  $I$  om  $f$  är integrerbar på  $I$ .

2. Låt  $f$  och  $g$  vara begränsade och icke-negativa funktioner på  $I := [a, b]$ , och sätt  $M := \sup_{x \in I} f(x)$ ,  $m := \inf_{x \in I} f(x)$ ,  $N := \sup_{x \in I} g(x)$  och  $n := \inf_{x \in I} g(x)$ . Visa att

$$\sup_{x \in I} f(x)g(x) - \inf_{x \in I} f(x)g(x) \leq MN - mn.$$

Bevisa med hjälp av denna olikhet att  $fg$  är integrerbar på  $I$  om  $f$  och  $g$  är integrerbara på  $I$ .

3. Antag att  $f$  och  $g$  är begränsade funktioner på  $I := [a, b]$  sådana att  $f$  och  $f + g$  är integrerbara. Visa att då är även  $g$  integrerbar. Använd detta och uppgift 2 för att visa att också  $fg$  är integrerbar.

4. Låt  $f$  vara en kontinuerlig och icke-negativa funktion på  $I := [a, b]$ . Visa att  $\int_a^b f(x) dx = 0$  om och endast om  $f(x) = 0$  för varje  $x \in I$ .

5. Låt  $f$  och  $g$  vara integrerbara funktioner på  $[a, b]$ . Visa att Cauchy-Schwarz olikhet gäller:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$