

Analys I, Hemuppgifter 6, 22.10.2014

1. Sätt

$$x_n = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existerar.

2. Visa att summan av likformigt kontinuerliga funktioner är likformigt kontinuerlig men att produkten inte i allmänhet har denna egenskap.

3. Låt $a_0 = 0$ och $a_n = n - 1 + a_{n-1}$ för $n = 1, 2, \dots$ och definiera en funktion f på $[0, \infty[$ genom

$$f(x) = n(x - n)^2 + a_n \text{ för } x \in [n, n + 1[\text{ och } n = 0, 1, \dots$$

Är f likformigt kontinuerlig? Motivera!

4. Betrakta $s_n = \sum_{i=1}^n u_i$ och $S_n = \sum_{i=1}^n |u_i|$, där $u_i \in \mathbb{R}$ och $n = 1, 2, \dots$. Visa att följderna $(s_n)_n$ är konvergent om följderna $(S_n)_n$ är konvergent.

5. Antag att funktionen f är likformigt kontinuerlig på $]a, b[$. Visa att $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existerar samt att f är begränsad.

6. Visa att funktionen

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2(1-x)}\right)$$

avbildar intervallet $] -\infty, 0]$ bijektivt på $]0, 1]$.