

Analys I, Hemuppgifter 5, 15.10.2014

1. Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $]a, b[$ samt att $f(a) > 0$ och $f(b) = 0$. Visa att f har ett minsta nollställe i $[a, b]$, dvs. att det finns ett nollställe x_0 som är mindre än varje annat nollställe.

2. Låt f vara en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}$. Antag att

$$\alpha_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ och } \alpha_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

existerar och $\alpha_-, \alpha_+ \in (0, 1)$. Visa att ekvationen $f(x) - x = 0$ har åtminstone en rot. Hur är det med ekvationen $f(x) - x^2 = 0$? Kan man säga något om dess eventuella rötter?

3. Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av 0 och att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{x}{|x|} \right) = 0.$$

Visa, att f är diskontinuerlig i 0.

4. Visa att funktionen f som är definierad genom $f(x) = 0$ om $x \leq 0$ och $f(x) = \frac{1}{n}$ om $\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}$ är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

5. Låt (x_n) vara en talföljd, som konvergerar mot 0. Visa att talföljden (y_n) , där

$$y_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

också konvergerar mot 0.