

### Analys I, Hemuppgifter 3, 1.10.2014

1. Betrakta talföljden  $a_1, a_2, a_3, \dots$  som uppfyller  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < 1$  och definiera

$$A_k = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k a_n.$$

Visa att  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  existerar.

2. Visa med stöd av definitionen på kontinuitet att  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  är kontinuerlig i  $[-1, 1]$ .

3. Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 8}{x^{\frac{1}{6}} - 2}$$

har ett gränsvärde då  $x \rightarrow 64$ . Bestäm ett  $\delta > 0$  som "svarar mot"  $\varepsilon = 1$ .

4. (a) Visa att i varje intervall  $]a, b[$  finns ett irrationellt tal.

(b) Visa, att funktionen  $f(x)$  som definieras genom  $f(x) = \frac{p}{q^2}$  för rationella  $x = \frac{p}{q}$ , (bråket förkortat) och  $f(x) = 0$  för irrationella  $x$ , är diskontinuerlig i alla rationella punkter.

5. Är talföljden  $(x_n)$ , som definieras av rekursionsformeln  $x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}$ ,  $x_1 = 3$ , konvergent?