

Elementär gruppteori, hemuppgifter till torsdag vecka 39

1. Avgör om $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \cong \mathbf{Z}_6$ gäller.
2. Underförstått att $\mathbf{Z} = \langle \mathbf{Z}, + \rangle$, visa att $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ej är cyklisk. Kan $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$ gälla?
3. Visa att $G_1 \times G_2$ är Abelsk om och endast om G_1 och G_2 är Abelska grupper.
4. Bevisa Sats 17 i föreläsningarna.
5. Låt G beteckna mängden av alla 2×2 matriser av formen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

där $a \neq 0$ och $a, b \in R$. Visa att mängden G försedd med matrismultiplikation är en undergrupp av den linjära gruppen $GL(2, R)$ av inverterbara 2×2 matriser med reella element.

6. Låt H_i vara en undergrupp till G_i , $i = 1, 2$. Visa att $H_1 \times H_2$ är en undergrupp till $G_1 \times G_2$.
7. Låt permutationerna R och S_p svara mot rotation respektive spegling i diedergruppen D_n . (Se sida 41 i kompendiet). Visa med induktion att formeln

$$R^k \circ S_p = S_p \circ R^{-k}$$

gäller för $k = 0, 1, \dots, n-1$.