

Elementär gruppteori, hemuppgifter till torsdag vecka 38

1. Visa att i en Abelsk grupp gäller $(a * b)^n = a^n * b^n$, där n är ett heltal.
2. Definiera mängden G genom $G = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, där $\mathbf{R}$ betecknar de reella talen. Vi kan införa en operation $*$ på G genom att för alla $a, b \in G$ definiera

$$a * b = a + b + a \cdot b,$$

där $+$ och $\cdot$ betecknar vanlig addition respektive multiplikation av reella tal. Visa att $\langle G, * \rangle$ är en grupp. (Du behöver inte visa att G är sluten under $*$).

3. Skriv följande permutationer som en produkt av disjunkta cykler:

$$a) (13)(257)(385),$$

$$b) (12345)(67)(1357)(163),$$

$$c) (31)(42)(523),$$

$$d) (145)(1235)(13).$$

4. Visa att $\langle \mathbf{Z}, + \rangle \cong \langle G, \cdot \rangle$, där $G = \{2^m : m \in \mathbf{Z}\}$.
5. Låt $\langle G, * \rangle$ vara en grupp och definiera för alla $a, b \in G$: $a \bullet b = b * a$. Visa att $\langle G, \bullet \rangle$ är en grupp och att $\langle G, * \rangle \cong \langle G, \bullet \rangle$.
6. Låt $\langle G, * \rangle$ och $\langle H, \bullet \rangle$ vara isomorfa grupper. Visa att om $\langle G, * \rangle$ är cyklisk så är också $\langle H, \bullet \rangle$ cyklisk. (Ledning: Visa först att $e_H = \varphi(e_G)$. Visa sedan att om a genererar G så gäller det att $\varphi(a^k) = \varphi(a)^k$ för $k \in \mathbf{Z} \dots$).